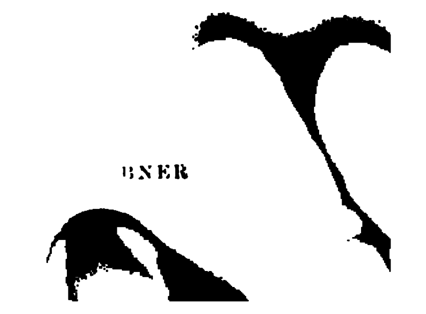

SHENKO









THEORETISCHE MECHANIK.

VON

J. SOMOFF,

MITGLIED DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND PROF. EM. DER UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG.

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

ALEXANDER ZIWET.

I. THEIL.

KINEMATIK.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.

KINEMATIK.

Von

J. SOMOFF,

MITGLIED DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND PROF. EM. DER UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG.

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

ALEXANDER ZIWET.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.



Vorwort des Uebersetzers.

Die bisher nur in russischer Sprache existirende „Theoretische Mechanik“ von J. Somoff, auf welche mich zuerst mein hochverehrter Lehrer, Herr Professor Dr. W. Schell, aufmerksam machte, bietet so viel des Neuen und Originalen in der Behandlung sowol, als auch in der Auswahl und Gruppirung des Stoffes, dass der Wunsch, dieses Werk den nicht russisch lesenden Fachmännern und Studirenden durch eine deutsche Uebersetzung zugänglich zu machen, wohl gerechtfertigt erscheinen kann. Um den eigenthümlichen Charakter des Originals zu wahren, wurden keine wesentlichen Aenderungen vorgenommen. So wurde z. B. die Bezeichnungsweise der sogenannten geometrischen Operationen, obwol dieselbe manche Inconsequenzen mit sich führt, unverändert beibehalten; dagegen sind zur Unterscheidung der partiellen Derivirten die vielfach üblichen runden ∂ gewählt worden; auch wurde eine Anzahl störender Druckfehler, die sich im Originale vorfanden, berichtigt.

Der im Jahre 1876 zu St. Petersburg verstorbene Verfasser, Professor Joseph Somoff, ist in Russland durch eine Reihe gediegener Lehrbücher über verschiedene Theile der Mathematik, sowie durch zahlreiche Abhandlungen und Untersuchungen speciellerer Natur, die zum Theil auch in französischer Sprache in den Memoiren der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften veröffentlicht wurden, rühmlichst bekannt. Leider gelang es ihm nicht, die „Theoretische Mechanik“ vollständig herauszugeben. Der erste Theil, die Kinematik, bildet jedoch ein in sich abgeschlossenes Ganzes und erscheint daher in der Uebersetzung einzeln für sich. Der Druck des zweiten Theiles, der eine allgemeine Einleitung in die Statik und Dynamik, sowie die Statik enthält, wurde erst nach des Ver-





THEORETISCHE MECHANIK.

VON

J. SOMOFF,

MITGLIED DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND PROF. EM. DER UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG.

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

ALEXANDER ZIWET.

I. THEIL.

KINEMATIK.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.

KINEMATIK.

VON

J. SOMOFF,

MITGLIED DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND PROF. EM. DER UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG.

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

ALEXANDER ZIWET.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.



Vorwort des Uebersetzers.

Die bisher nur in russischer Sprache existirende „Theoretische Mechanik“ von J. Somoff, auf welche mich zuerst mein hochverehrter Lehrer, Herr Professor Dr. W. Schell, aufmerksam machte, bietet so viel des Neuen und Originalen in der Behandlung sowol, als auch in der Auswahl und Gruppirung des Stoffes, dass der Wunsch, dieses Werk den nicht russisch lesenden Fachmännern und Studirenden durch eine deutsche Uebersetzung zugänglich zu machen, wohl gerechtfertigt erscheinen kann. Um den eigenthümlichen Charakter des Originals zu wahren, wurden keine wesentlichen Aenderungen vorgenommen. So wurde z. B. die Bezeichnungsweise der sogenannten geometrischen Operationen, obwol dieselbe manche Inconsequenzen mit sich führt, unverändert beibehalten; dagegen sind zur Unterscheidung der partiellen Derivirten die vielfach üblichen runden ∂ gewählt worden; auch wurde eine Anzahl störender Druckfehler, die sich im Originale vorfanden, berichtigt.

Der im Jahre 1876 zu St. Petersburg verstorbene Verfasser, Professor Joseph Somoff, ist in Russland durch eine Reihe gediegener Lehrbücher über verschiedene Theile der Mathematik, sowie durch zahlreiche Abhandlungen und Untersuchungen speciellerer Natur, die zum Theil auch in französischer Sprache in den Memoiren der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften veröffentlicht wurden, rühmlichst bekannt. Leider gelang es ihm nicht, die „Theoretische Mechanik“ vollständig herauszugeben. Der erste Theil, die Kinematik, bildet jedoch ein in sich abgeschlossenes Ganzes und erscheint daher in der Uebersetzung einzeln für sich. Der Druck des zweiten Theiles, der eine allgemeine Einleitung in die Statik und Dynamik, sowie die Statik enthält, wurde erst nach des Ver-



Vorwort des Uebersetzers.

Die bisher nur in russischer Sprache existirende „Theoretische Mechanik“ von J. Somoff, auf welche mich zuerst mein hochverehrter Lehrer, Herr Professor Dr. W. Schell, aufmerksam machte, bietet so viel des Neuen und Originalen in der Behandlung sowol, als auch in der Auswahl und Gruppirung des Stoffes, dass der Wunsch, dieses Werk den nicht russisch lesenden Fachmännern und Studirenden durch eine deutsche Uebersetzung zugänglich zu machen, wohl gerechtfertigt erscheinen kann. Um den eigenthümlichen Charakter des Originals zu wahren, wurden keine wesentlichen Aenderungen vorgenommen. So wurde z. B. die Bezeichnungsweise der sogenannten geometrischen Operationen, obwol dieselbe manche Inconsequenzen mit sich führt, unverändert beibehalten; dagegen sind zur Unterscheidung der partiellen Derivirten die vielfach üblichen runden ∂ gewählt worden; auch wurde eine Anzahl störender Druckfehler, die sich im Originale vorfanden, berichtigt.

Der im Jahre 1876 zu St. Petersburg verstorbene Verfasser, Professor Joseph Somoff, ist in Russland durch eine Reihe gediegener Lehrbücher über verschiedene Theile der Mathematik, sowie durch zahlreiche Abhandlungen und Untersuchungen speciellerer Natur, die zum Theil auch in französischer Sprache in den Memoiren der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften veröffentlicht wurden, rühmlichst bekannt. Leider gelang es ihm nicht, die „Theoretische Mechanik“ vollständig herauszugeben. Der erste Theil, die Kinematik, bildet jedoch ein in sich abgeschlossenes Ganzes und erscheint daher in der Uebersetzung einzeln für sich. Der Druck des zweiten Theiles, der eine allgemeine Einleitung in die Statik und Dynamik, sowie die Statik enthält, wurde erst nach des Ver-

fassers Tode vollendet. Die Dynamik endlich wird von Herrn Professor Paul Somoff, dem Sohne des verstorbenen Professors Joseph Somoff, nach autographirten Collegienheften bearbeitet und herausgegeben werden.

Durch die Güte des Herrn Professors Paul Somoff sind mir die am Ende der Kinematik beigefügten Zusätze und Berichtigungen, die von dem Verfasser für eine zweite Auflage in Aussicht genommen waren, zur Verfügung gestellt worden; leider war es schon zu spät, dieselben an den betreffenden Stellen des Textes einzufügen.

Alexander Ziwet.

Vorrede des Verfassers.

Langjährige Vorlesungen über theoretische Mechanik an der Universität zu St. Petersburg gaben mir Veranlassung, diese Wissenschaft systematisch zu bearbeiten; ich habe mich bemüht, einerseits die Principien und Theorien der Mechanik klar zu legen, andererseits die Beweise für manche Sätze und die Methoden zur Lösung verschiedener Probleme möglichst zu vereinfachen. So entstand ein vollständiger Cursus der theoretischen Mechanik, der mehrmals autographirt wurde, so dass meine Zuhörer ihn schon seit längerer Zeit benutzen. Nach nochmaliger genauer Durchsicht und nach Einverleibung verschiedener Abschnitte, zu deren Behandlung die den Vorlesungen zugemessene Zeit nicht hinreichte, habe ich mich entschlossen, diesen Cursus der Mechanik herauszugeben und überliefere nunmehr den ersten Theil desselben, die Kinematik, der Beurtheilung des wissenschaftlichen Publikums. Obwol es an Werken über Mechanik sowol in fremden Sprachen, als auch in der russischen nicht mangelt, so glaube ich doch,

dass auch mein Werk nicht überflüssig sein wird. Es ist besonders für junge Leute bestimmt, welche die mathematischen und physikalischen Wissenschaften an den Universitäten studiren. Bei Abfassung desselben hatte ich hauptsächlich den Umstand im Auge, dass in der Universität der Unterricht in der theoretischen Mechanik nicht nur darauf ausgehen muss, die Studirenden mit jenen Grundwahrheiten bekannt zu machen, auf denen gegenwärtig das ganze System der exakten Naturwissenschaften beruht, sondern dass derselbe ihnen zugleich auch eine Uebung in der mathematischen Analysis und in der Geometrie bieten soll. Soviel die Analysis und die Geometrie zur Entdeckung der Gesetze der Bewegung und des Wirkens der Naturkräfte beigetragen haben, ebensoviel haben die Mechanik und die mathematische Physik die Entwickelung der analytischen und geometrischen Forschungsmethoden gefördert. Die Geschichte der Differential- und Integralrechnung zeigt, dass die Mechanik eine unerschöpfliche Quelle von Problemen war, zu deren Lösung neue Integrationsmethoden für Functionen und Differentialgleichungen erdacht wurden. Man kann sagen, dass die beiden umfangreichen Bände der Mechanik von Euler nichts sind als eine Sammlung von Aufgaben der Integralrechnung. In der analytischen Mechanik von Lagrange zeigt sich die ganze Macht jener eleganten allgemeinen Methode, die aus einer einzigen Formel die Lösungen aller Probleme derselben Art herleitet. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik sind solchen Beispielen gewidmet, die zur Erläuterung der Methode der Integration von Differentialgleichungen in der kanonischen Form, und von solchen mit partiellen Derivirten erster Ordnung dienen. Die physikalisch-mathematischen Untersuchungen über die Attractionskräfte, über Elektricität und Magnetismus, über Wärme, Elasticität, Licht, Schall und über die Wellenbewegung im allgemeinen behandeln die Lehre von den Eigenschaften der Functionen, von den verschiedenen Reihenentwickelungen derselben und von der Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Zwischen der Analysis, Geometrie, Mechanik und mathematischen Physik besteht gegenwärtig ein so enger Zusammenhang, dass man sich beim Unterricht nicht zu sehr um die Abgrenzung jener Wissenschaften

von einander zu kümmern braucht. Die erste Anforderung, die man an eine zeitgemässe Behandlung der mathematischen Wissenschaften stellen muss, ist wie Lamé sehr richtig bemerkt*), die, dass *die Eintheilung der Wissenschaft in reine und angewandte Mathematik für immer beseitigt werde.* Deshalb glaube ich, dass man es mir nicht zum Vorwurf machen wird, wenn ich von dem eigentlichen Gegenstande der Mechanik häufig abschweife, um Probleme zu entwickeln, die in die Analysis und Geometrie gehören.

Lagrange betrachtete die Mechanik als eine Geometrie, bei der zu den drei Dimensionen des Raumes noch eine vierte, die Zeit, hinzutritt; die Analysis in der Mechanik sah er als eine Weiterentwickelung der geometrischen Analysis an.**) Nach dieser Anschauung treten die Kräfte und die Massen in der Analysis nicht als Grössen von besonderer Art auf; denn die Kräfte werden durch Strecken ausgedrückt, die Massen durch Verhältnisse von Kräften. Bei der Anwendung analytischer Resultate auf wirkliche Bewegungen ist man jedoch genöthigt, die concrete Bedeutung der Kräfte als der Ursachen der Bewegung in Betracht zu ziehen. Infolge dessen zerfallen die in der Mechanik auftretenden Probleme in zwei Gruppen: in *kinematische* und *dynamische*; die Probleme der ersten Art werden gegenwärtig in einem besonderen Theile der Mechanik behandelt, den man Kinematik nennt. Schon D'Alembert spricht in der Vorrede zu seiner Dynamik von der Nothwendigkeit, vor allen anderen Dingen die Gesetze der Bewegung zu studiren. Carnot beabsichtigte ein Werk *über die geometrischen Bewegungen* zu schreiben. Ampère aber hat zuerst offen auf den grossen Vortheil hingewiesen, den das Studium der geometrischen Eigenschaften der Bewegung und der Verhältnisse der Geschwindigkeiten der verschiedenen Theile einer Maschine zu einander unabhängig von dem Begriffe von Kräften

*) „Écartez à tout jamais la division de la science en Mathématiques pures et appliquées.“ Cours de Physique mathématique rationnelle 1861. Discours préliminaire.

**) „Ainsi on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géométrique.“ Théorie des fonctions analytiques.

und Massen bieten muss.*) Poncelet machte den ersten Versuch zur Verwirklichung dieses Gedankens von Ampère, indem er in seinen Vorlesungen an der Pariser Facultät der Wissenschaften (1838—1839) die geometrische Theorie der wichtigsten zur Uebertragung der Bewegung dienenden Maschinentheile entwickelte. Seitdem kam die Behandlung kinematischer Probleme mehr und mehr in Aufnahme. Man erinnerte sich der Descartes'schen Methode zur Construction der Tangente an eine Rollcurve, die auf der Existenz eines Rotationscentrums bei der Bewegung einer ebenen, auf einer anderen hinrollenden Curve beruht, sowie der Tangentenconstruction von Roberval, die sich auf die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten gründet. Man studirte eingehend die geometrischen Eigenschaften der Bewegung eines unveränderlichen Systems. Auf Grund dieser Eigenschaften ergaben sich neue elegante Methoden zur Construction von Tangenten und Krümmungsradien für manche Curven, sowie auch von Normalen für gewisse Flächen. Dann wurden die Beschleunigungen höherer Ordnungen untersucht und auf die Lösung von Problemen über die zweite Krümmung und die Aenderung der ersten Krümmung angewendet. Endlich fand man die Methode zur Bestimmung der Beschleunigungen bei der relativen Bewegung. So bildete sich der theoretische Theil der Kinematik aus, der in verschiedenen Lehrbüchern als Einleitung in die Mechanik behandelt wurde. Resal, der ihn durch viele eigene Untersuchungen bereicherte, trennte ihn von dem angewandten Theile der Kinematik, der die Theorie der Mechanismen zum Gegenstande hat, und gab eine systematische Darstellung desselben unter dem Namen der *reinen Kinematik* (Traité de Cinématique pure, par H. Resal, Paris 1862). Hierauf erschien die reine Kinematik als ein besonderer Theil der Mechanik in den Werken: Cours de Mécanique et de machines par E. Bour, Paris 1865. — Treatise on natural Philosophy, W. Thomson and P. Tait. V. I. Oxford 1867. — Theorie der Bewegung und der Kräfte, Dr. W. Schell. Leipzig 1870.

*) Essai sur la classification des connaissances humaines.

Ich habe nach dem Vorgange von Bour die theoretische Mechanik eingetheilt in: *Kinematik*, *Statik* und *Dynamik*; dabei habe ich zur Kinematik nur die allgemeinen grundlegenden kinematischen Probleme über die Bewegung eines Punktes und über die eines unveränderlichen Systems gezogen; andere kinematische Fragen, die sich auf speciellere Theorien beziehen, wie z. B. die Probleme über die Deformation eines elastischen Körpers und über die Geschwindigkeiten der Flüssigkeiten, schien mir unzweckmässig von den dynamischen zu trennen. Die Lösung der Probleme über die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei der Bewegung eines Punktes habe ich auf eine gleichartige Methode basirt, die eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Methode der Differentialrechnung ist und die man das *geometrische Differentiiren* nennen kann. Der Begriff der geometrischen Derivirten von veränderlichen geraden Strecken und die Betrachtung der Beschleunigungen als successiver geometrischer Derivirten der Geschwindigkeit rührt von Resal her. Er bemerkte die bei der Differentiation einer Summe auftretende Analogie zwischen den geometrischen und den gewöhnlichen Derivirten; doch übersah er noch andere Analogien. In der Abhandlung „*Ueber die Beschleunigungen verschiedener Ordnungen*“ *) habe ich eine Formel zur Differentiation eines geometrischen Productes aufgestellt, die der Leibnitz'schen Formel zur Differentiation eines algebraischen Productes analog ist; dort habe ich gezeigt, wie bequem sie zur Bestimmung der Projectionen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auf gegebene feste oder bewegliche Axen dienen kann. Zugleich habe ich verschiedene Anwendungen der Formel zur Bestimmung der Sehne des von einem Punkte durchlaufenen Weges vermittelst der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen verschiedener Ordnungen gegeben; diese Formel, die der Taylor'schen Reihe entspricht, ist von Möbius aufgestellt worden („Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorems.“ Crelle's Journal, B. 36). Zu diesen

*) Supplement zu dem V. Bande der Memoiren der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften Nr. 5 (russisch). Auch französisch: Mémoire sur les accélérations de divers ordres (Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg VII. Série, T. VIII, Nr. 5).

Analogien habe ich (im IV. und VII. Capitel der Kinematik) noch hinzugefügt: die Ausdehnung des Multiplicationsgesetzes zweier algebraischer Summen auf geometrische Summen, die Methode, die geometrischen Derivirten einer beliebigen variablen geradlinigen Strecke mit Hilfe der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ihrer Endpunkte auszudrücken, die geometrische Differentiation nach verschiedenen Variablen und mehrere Sätze über die geometrischen Variationen. Aus allen diesen Analogien und Verallgemeinerungen ergab sich eine eigenthümliche Methode für kinematische Untersuchungen, welche die früheren synthetischen Methoden ersetzt und die Anwendung der Analysis auf die Kinematik bedeutend erleichtert, besonders in der Hinsicht, dass sie erlaubt, lange Rechnungen, in denen oft ohne jede Nothwendigkeit geradlinige Coordinaten auftreten, zu vermeiden. Ein anderes wichtiges Hilfsmittel zur Anwendung der Analysis auf die Kinematik bietet die directe Methode zur Bestimmung der Differentialparameter erster Ordnung einer Punktfunction. Lamé betrachtete den Differentialparameter erster Ordnung einer Punktfunction als einen analytischen Ausdruck, der die Eigenschaft hat, bei der Vertauschung eines rechtwinkligen geradlinigen Coordinatensystems mit einem andern ebensolchen Systeme seine Form beizubehalten; er zeigte, welche Gestalt jener Ausdruck annimmt, wenn man die geradlinigen Coordinaten mit rechtwinkligen krummlinigen vertauscht. Doch benutzte er den Vortheil nicht, welchen die Darstellung des Differentialparameters durch eine auf der Normale der Niveaufläche aufgetragene Strecke darbietet. Indem ich den Parameter in dieser Weise darstellte und ihn unabhängig von dem Coordinatensystem als die Derivirte der Punktfunction nach einer zur Niveaufläche normalen Verschiebung definirte, habe ich in der Abhandlung: *Directe Methode zur Bestimmung des Ausdruckes der Differentialparameter erster und zweiter Ordnung und der Krümmung einer Fläche in irgend welchen recht- oder schiefwinkligen Coordinaten**) gezeigt, wie man mit Hilfe der Para-

*) Supplement zum VIII. Bande der Memoiren der Kais. Akademie der Wissenschaften Nr. 4; auch unter dem Titel: „Moyen d'exprimer directement en coordonnées curvilignes quelconques, orthogonales ou

meter gewisser einfacher Functionen den Parameter einer zusammengesetzten Function bestimmt. Diese Methode, die Differentialparameter erster Ordnung zu bilden, umfasst alle graphischen und analytischen Methoden zur Construction von Normalen an Flächen und Curven. Sie ist im VII. Capitel der Kinematik dargelegt mit neuen Entwicklungen und Anwendungen auf die Bestimmung der Coordinatenparameter der bemerkenswerthesten Coordinatensysteme. In der oben erwähnten Abhandlung über die Beschleunigungen verschiedener Ordnungen habe ich die allgemeinsten Formeln gegeben für die Projectionen der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen verschiedener Ordnungen auf die drei Coordinatenparameter und auf drei andere zu diesen conjugirte Axen, die ich Coordinatenaxen genannt habe; hierauf habe ich jene Formeln zur Ableitung allgemeiner Ausdrücke für die bei der Bestimmung der ersten und zweiten Krümmung einer Curve auftretenden Grössen in krummlinigen Coordinaten angewendet. Im X. und XI. Capitel der Kinematik ist die Ableitung aller dieser Formeln bedeutend vereinfacht mit Hilfe der Formeln für die Projectionen der geometrischen Derivirten der directen und reciproken Coordinatenparameter auf die Richtungen dieser Parameter; dann habe ich im XII. Capitel gezeigt, wie man mit Hilfe derselben Ausdrücke die geometrischen Derivirten des Differentialparameters einer beliebigen Punktfunction finden kann. Alles dies bildet die Grundlage für die allgemeine Theorie der krummlinigen Coordinaten, deren Gebrauch in der Geometrie und in der mathematischen Physik mehr und mehr Verbreitung findet. Im XII. und XIII. Capitel zeige ich, wie mit Hilfe der Beschleunigungen und der geometrischen Derivirten der Differentialparameter die allgemeinen Ausdrücke für die Derivirten der Function eines Punktes oder Punktsystems nach der Zeit gebildet werden und wie sich auf Grund dieser Ausdrücke die allgemeine Form der Bedingungen ergiebt, welchen die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte genügen müssen, wenn diese Punkte nicht frei sind.

obliques, les paramètres différentiels du premier et du second ordres et la courbure d'une surface.“ Mémoires de l'Ac. des sciences de St. Pétersbourg, VII Série, T. VIII, Nr. 16, 1865.

In der Kinematik des unveränderlichen Systems erläutere ich zuerst die Eigenschaften der möglichen Geschwindigkeiten eines freien Systems, ausgehend von den Bedingungen für die Geschwindigkeiten, welche sich aus der Unveränderlichkeit der Abstände der Punkte von einander, sowie der von diesen Abständen eingeschlossenen Winkel ergeben. Hierauf leite ich dieselben Eigenschaften aus den Formeln her, die Euler für die Projectionen einer möglichen Geschwindigkeit auf drei mit dem Systeme unveränderlich verbundene Axen aufgestellt hat. Dabei verweise ich auf den Zusammenhang, der zwischen dem Systeme der möglichen Geschwindigkeiten und dem Systeme der auf den Geschwindigkeiten senkrechten Geraden, welches Plücker den *Liniencomplex* genannt hat, besteht. Ebenso gründe ich auch die Untersuchungen über die Beschleunigungen verschiedener Ordnungen bei der Bewegung eines unveränderlichen Systems auf die Formeln von Euler und auf andere, die zur allgemeinen Bestimmung der Projectionen der geometrischen Derivirten einer Strecke auf rechtwinklige bewegliche Axen dienen.

Die Eigenschaften der möglichen Geschwindigkeiten eines unfreien unveränderlichen Systems sind von Mannheim untersucht worden. Er beschränkte sich dabei auf die Betrachtung solcher Bedingungen für die möglichen Geschwindigkeiten, die sich auf die einfache Bedingung zurückführen lassen, dass ein starrer Körper sich mit einem Punkte auf eine feste Fläche stützt. Thomson und Tait (Treatise on natural philosophy pag. 133) zeigen, dass es eine allgemeinere Bedingung giebt, die die Form einer linearen Gleichung zwischen den Projectionen der Translationsgeschwindigkeit und denen der Winkelgeschwindigkeit der Rotation auf drei zu einander senkrechte Axen hat, und dass sich diese Bedingung durch einen aus zwei Hooke'schen Schlüsseln gebildeten Mechanismus realisiren lässt. Ich gebe dieser Bedingung eine von dem Coördinatensysteme unabhängige Form und zeige, wie man, mit Hilfe gegebener Bedingungen von dieser Form, deren Anzahl nicht grösser als fünf sein darf, analytisch die möglichen Geschwindigkeiten eines unfreien unveränderlichen Punktsystems untersuchen kann, indem man die conjugirten Rotationsaxen für

jedes System möglicher Geschwindigkeiten bestimmt, oder die conjugirten Polaren des einem jeden möglichen Geschwindigkeitssysteme entsprechenden linearen Complexes. In dem von der relativen Bewegung handelnden XVII. Capitel endlich leite ich mit Hilfe der Möbius'schen Formel für die Sehne des durchlaufenen Weges und der Formeln für die geometrische Differentiation mit einem Schlage die Beziehungen her, die zwischen den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen verschiedener Ordnungen bei der absoluten, der relativen und der Führungsbewegung bestehen. Ich habe mich nur auf geometrische Beispiele der relativen Bewegung beschränkt und die interessanten Beispiele der relativen Bewegung der irdischen Gegenstände, die von der täglichen Bewegung der Erde herrührt, in die Dynamik verwiesen; denn dieselben erfordern den Begriff der Schwerkraft.

J. Somoff.

Inhaltsübersicht der Kinematik.

Einleitung.

Die bei irgend einer Naturerscheinung der Beobachtung sich darbietenden Körper haben eine gewisse Gestalt und eine gegenseitige Lage, welche sie entweder eine bestimmte Zeit hindurch beibehalten oder fortwährend ändern. Im ersten Falle befinden sie sich in Ruhe, im zweiten in Bewegung. Die Methoden zur Untersuchung der mathematischen Umstände des einen, wie des andern Zustandes der Körper, bilden den Gegenstand der *theoretischen Mechanik*.

Nach der Art der in der theoretischen Mechanik auftretenden Fragen und gemäss der natürlichen Reihenfolge, in der sich dieselben darbieten, theilt sich diese Wissenschaft in drei Theile: Kinematik, Statik und Dynamik.

In der *Kinematik* werden diejenigen Fragen über die Bewegung behandelt, zu deren Lösung es nicht nöthig ist, den Stoff der Körper, ihre Trägheit und die zwischen den Theilen der Materie wirkenden Kräfte in Betracht zu ziehen, d. h. zu deren Lösung nur die Raumverhältnisse und die Zeit der Bewegung betrachtet zu werden brauchen. Dieser Theil der Mechanik steht im innigsten Zusammenhang mit der Geometrie, auf die er sich hauptsächlich stützt und die er, möchte man sagen, vervollständigt, indem er zu den drei Dimensionen der Geometrie noch eine vierte, die Zeit, hinzufügt. Ihm gebührt der Name, den Lagrange der Mechanik überhaupt giebt: Geometrie von vier Dimensionen.*)

In der *Statik* werden zunächst die allgemeinen Beziehungen zwischen den kinematischen Grössen und den eine Bewegung

*) Théorie des fonctions analytiques, nouvelle édition; Paris 1813. pag. 311.

hervorbringenden Kräften behandelt; auf Grund dieser Beziehungen wird dann das Mass der Kraft und das der Masse eines Körpers festgestellt. Dann werden die Methoden zur Umwandlung der Kräfte behandelt, die Ersetzung gegebener Kräfte durch andere einfachere und die Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichts von Kräften, d. h. der Bedingungen, unter denen gewisse Kräfte die Wirkung anderer Kräfte vernichten. Zugleich werden die Methoden untersucht, die zur Bestimmung der Gestalt und Lage dienen, welche die Körper haben müssen, wenn die auf sie wirkenden Kräfte sich im Gleichgewicht befinden sollen.

Die *Dynamik* endlich hat zum Gegenstand die Methoden zur Untersuchung der Umstände einer Bewegung, welche durch bestimmte Ursachen, Trägheit und Kräfte, hervorgerufen wird, sowie zur Bestimmung der Kräfte, welche im Stande sind, eine gewisse Bewegung hervorzubringen.

Kinematik.

I. Capitel.

Bewegung eines Punktes. — Gleichförmige Bewegung und deren Geschwindigkeit. — Ungleichförmige Bewegung. — Deren mittlere Geschwindigkeit und die in einer gegebenen Zeit erlangte Geschwindigkeit. — Zusammensetzung von Geschwindigkeiten.

1. In der *Kinematik* werden die Bewegungen der geometrischen Gebilde zugleich mit der Zeit der Bewegung betrachtet.

Die Untersuchung der Bewegung irgend eines Gebildes von einer, zwei oder drei Dimensionen lässt sich auf die Untersuchung der Bewegung von Punkten zurückführen, da jedes Gebilde der geometrische Ort von Punkten ist, deren Lage durch gewisse Bedingungen bestimmt wird; daher beziehen sich die ersten Fragen der Kinematik auf die Bewegung eines einzelnen Punktes.

Die Bewegung eines Punktes ist die stetige Aenderung seiner Lage in Bezug auf nach Uebereinkunft gewählte geometrische Gebilde, z. B. in Bezug auf drei zu einander senkrechte Ebenen.

Wenn es zur Bestimmung der Bewegung eines Punktes nicht erforderlich ist, die Bewegung derjenigen Gebilde zu kennen, auf welche seine Lage bezogen wird, so werden diese Gebilde als absolut unbeweglich betrachtet, und die Bewegung des Punktes heisst *absolut.*

Die Bewegung eines Punktes heisst *relativ*, wenn es zur Bestimmung dieser Bewegung nöthig ist, die absolute Bewegung des Punktes und die absolute Bewegung der Gebilde zu kennen, auf welche die Lage des Punktes bezogen wird.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der absoluten Bewegung.

2. Die von einem Punkt beschriebene Linie heisst seine *Bahn* (*Trajectorie*). Der Bogen s der Bahn, welcher den von dem Punkt in der Zeit t durchlaufenen Weg darstellt, ist eine Function dieser Zeit. Die einfachste Form einer solchen Function ist:

$$s = vt,$$

wo v eine Constante bedeutet. Die Bewegung, bei welcher der durchlaufene Weg sich als eine Function von dieser Form darstellt, heisst *gleichförmig*.

Das constante Verhältniss $v = \frac{s}{t}$ des Weges zu der entsprechenden Zeit nennt man die *Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung.*

3. Eine Bewegung, bei der sich der Weg als eine andere Function der Zeit darstellt, heisst *veränderlich.* Wenn bei einer solchen Bewegung der durchlaufene Weg durch die Function $s = f(t)$ dargestellt wird, so ändert sich das Verhältniss $\frac{s}{t} = \frac{f(t)}{t}$ zugleich mit t, d. h. es hat für jedes gegebene t einen bestimmten Werth. Dieser Werth heisst die *mittlere Geschwindigkeit der Bewegung während der Zeit t.* Er ist gleich der Geschwindigkeit einer solchen gleichförmigen Bewegung, bei welcher der Punkt in der Zeit t einen Weg zurücklegt, der dem in derselben Zeit mit veränderlicher Bewegung zurückgelegten Wege s gleich ist. Bei der veränderlichen Geschwindigkeit kommt ausser der mittleren Geschwindigkeit noch eine Geschwindigkeit in Betracht, die man *die von dem Punkte in einer gegebenen Zeit erlangte,* oder einfach *die Geschwindigkeit zu einer gegebenen Zeit* nennt; dieselbe bestimmt sich folgendermassen (Fig. 1).

Es sei AB die Bahn des beweglichen Punktes m, $AM = s = f(t)$ der in der Zeit t durchlaufene Weg und $MM' = \Delta s$ der in der unendlich kleinen auf t folgenden Zeit τ durchlaufene Weg. Das Verhältniss $\frac{\Delta s}{\tau}$, welches die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung während der Zeit τ darstellt, nähert sich bei abnehmendem und der Null sich näherndem τ der derivirten Function $\frac{ds}{dt} = f'(t)$;

Fig. 1.

diese Grenze der mittleren Geschwindigkeit der Bewegung während der unendlich kleinen Zeit τ heisst eben die *Geschwindigkeit zur Zeit t.*

Wir werden diese Geschwindigkeit durch die Strecke $MT = f'(t)$ darstellen, die auf der Tangente der Bahn im Punkte M aufgetragen wird und nach der Seite hin gerichtet ist, wohin der Punkt m sich zur Zeit t bewegt.

Die Länge und Richtung von MT stellen die Grenze der Länge und Richtung der Geraden MS dar, die auf der Sehne MM' aufgetragen und der Geschwindigkeit gleichgemacht ist, mit welcher der Punkt in gleichförmiger Bewegung die Sehne MM' in der Zeit τ durchlaufen kann, die also dem Verhältniss $\frac{MM'}{\tau}$ gleich ist. In der That, nähert sich τ der Null, so nähert sich die Richtung MS der Richtung der Tangente, auf welcher die Länge MT aufgetragen ist, und da sich dabei das Verhältniss des Bogens Δs zur Sehne MM' der Einheit nähert *), so giebt die Gleichung

$$\frac{\Delta s}{\tau} = \frac{\Delta s}{\text{Sehne } MM'} \cdot MS$$

in der Grenze

$$f'(t) = \lim MS, \text{ d. h. } MT = \lim MS.$$

Im Falle der geradlinigen Bewegung, d. h. wenn die Bahn eine gerade Linie ist, fällt die Richtung der Geschwindigkeit MT mit der Richtung der Bahn zusammen.

Beispiele: 1) Die Bewegung eines fallenden Körpers ist oft durch die Bewegung eines einzigen Punktes bestimmt, der, wie Galilei gefunden hat, in vertikaler Richtung einen dem Quadrat der entsprechenden Zeit proportionalen Weg durchläuft: folglich ist dieser Weg durch eine Function von der Form $s = at^2$ dargestellt, wo a eine constante positive Grösse ist. Die mittlere Geschwindigkeit dieser Bewegung während der Zeit t ist $\frac{s}{t} = at$, und die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, die wir mit v bezeichnen wollen, ist:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2at.$$

Sie ist also doppelt so gross als die mittlere Geschwindigkeit. Beide Geschwindigkeiten sind der Zeit proportional, d h. wachsen mit der

*) Sturm, Cours d'analyse de l'École polytechnique. T. I. Leçon 23.

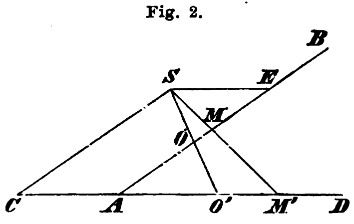
Zeit gleichförmig. Eine Bewegung, welche diese Beschaffenheit hat, heisst *gleichförmig beschleunigt*. Die Constante a ist dem in der Zeiteinheit von dem Punkte durchlaufenen Wege gleich; denn es wird $s = a$ für $t = 1$. Dieselbe ist auch gleich der mittleren Geschwindigkeit in der Zeiteinheit und gleich der Hälfte der in der Zeiteinheit erlangten Geschwindigkeit; bezeichnet man daher diese letztere durch g, so hat man: $a = \frac{1}{2}g$, $s = \frac{1}{2}gt^2$, $v = gt$. Unter dieser Form werden die Fallgesetze gewöhnlich dargestellt.

Die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung während eines beliebigen Zeitraumes $t' - t$ ist das arithmetische Mittel aus der im Anfang und aus der am Ende dieser Zeit erlangten Geschwindigkeit; denn diese Geschwindigkeit ist:

$$\frac{at'^2 - at^2}{t' - t} = a(t' + t) = \frac{2at' + 2at}{2}.$$

2) Angenommen, der von dem unbeweglichen leuchtenden Punkte S (Fig. 2) beleuchtete Punkt m bewege sich gleichförmig auf der Geraden AB mit der Geschwindigkeit c, vom Punkte O aus; es soll die Bewegung seines Schattens auf einer gegebenen Ebene bestimmt werden.

Fig. 2.



Die Bahn des Schattens ist offenbar eine Gerade CD, nämlich der Durchschnitt der gegebenen mit der durch S und AB gehenden Ebene. Es sei M die Lage des Punktes m zur Zeit t, M' die Lage seines Schattens zur selben Zeit, O' die Anfangslage dieses Schattens; $AO = \alpha$, $AO' = \beta$, $O'M' = s$. Zieht man noch SC' parallel AB und SE parallel CD, so sei $SC = a$, $SE = b$. Die ähnlichen Dreiecke AMM' und SME geben

$$s = \frac{b(\alpha + ct)}{a - \alpha - ct} - \beta$$

für den von dem Schatten M' in der Zeit t durchlaufenen Weg $O'M'$; daraus leiten wir die von diesem Punkte in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit her:

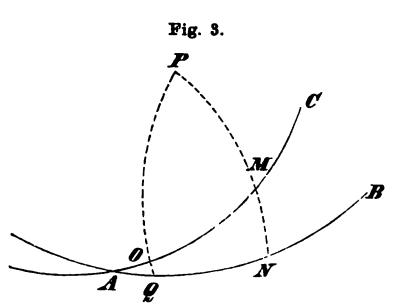
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{abc}{(a - \alpha - ct)^2} = \frac{abc}{ME^2} = \frac{c.\,CM'^2}{a\,b}.$$

Diese Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des beleuchteten Punktes m von dem unbeweglichen Punkte E und direct proportional dem Quadrate der Entfernung des Schattenpunktes M' von dem festen Punkte C. Sie wird unendlich gross, wenn m nach E kommt, d. h. wenn M' sich ins Unendliche entfernt.

3) Der Punkt m bewege sich auf einer Kugelfläche, welche die Erde darstellt (Fig. 3). Ist P einer der Pole, AB der Aequator, die Bahn des Punktes ein grösster Kugelkreis AC und ändert sich die geographische

Länge proportional der Zeit t, so soll der durchlaufene Weg und die Geschwindigkeit am Ende dieser Zeit bestimmt werden.

Fig. 3.



Es sei O die Anfangslage des beweglichen Punktes, M seine Lage zur Zeit t, Q der Schnittpunkt des Meridians des Punktes O mit dem Aequator, N der Schnittpunkt des Meridians von M mit dem Aequator, $AO = p$, $AQ = q$; Winkel $MAN = A$, $OM = s$, $QN = at$, wo a eine Constante; endlich bezeichnen wir mit β die geographische Breite MN und mit α das Azimuth PMC. Aus dem sphärischen Dreieck AMN leiten wir die Gleichung ab

$$\tan(p + s) = \frac{\tan(q + at)}{\cos A},$$

welche zur Bestimmung des durchlaufenen Weges als Function der Zeit dienen kann. Durch Differentiation erhalten wir die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes m, nämlich:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{a\cos^2(p + s)}{\cos A\cos^2(q + at)} = \frac{a\cos A}{\cos^2 A\cos^2(q + at) + \sin^2(q + at)}.$$

Da $\cos(p + s) = \cos\beta\cos(q + at)$, so kann der für die Geschwindigkeit gefundene Ausdruck in die Form gebracht werden:

$$v = \frac{a\cos^2\beta}{\cos A}. \tag{1}$$

Diese Formel zeigt, dass *die Geschwindigkeit sich proportional dem Quadrate des Cosinus der Breite des Ortes des beweglichen Punktes ändert.*

Die Breite lässt sich nun als Function der Zeit durch die Formel ausdrücken:

$$\tan\beta = \tan A\sin(q + at).$$

Die Richtung der Geschwindigkeit v, d. h. der Tangente an die Bahn AC im Punkte M bestimmt sich durch das Azimuth α, das mit der Zeit durch die Gleichung verbunden ist:

$$\cos\alpha = \sin A\cos(q + at).$$

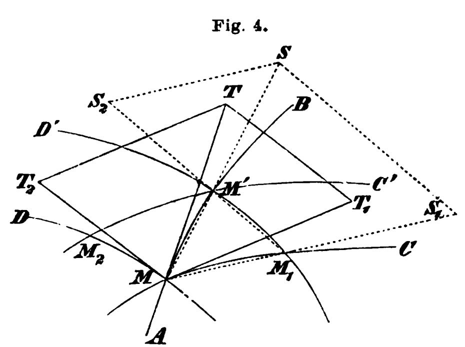
Der Cosinus der Breite β ist der Radius eines Parallelkreises, der durch den Punkt M hindurchgeht und deshalb ist, wie Formel (1) zeigt, *die Geschwindigkeit zur Zeit t dem Quadrat des Radius desjenigen Parallelkreises proportional, auf dem der Punkt sich zu dieser Zeit befindet.* Daraus folgt, dass der Punkt m seine grösste Geschwindigkeit hat, wenn er sich auf dem Aequator befindet, d. h. in A oder in dem diametral gegenüberliegenden Punkte.

4. *Lehrsatz.* Wenn zwei Linien (p) und (q), die einer beliebigen Fläche S angehören, sich continuirlich derart

ändern*), dass ihr Schnittpunkt m sich auf einer Linie AB bewegt und zur Zeit t die Geschwindigkeit v hat, so hängt diese Geschwindigkeit von zwei andern Geschwindigkeiten ab: von der Geschwindigkeit u der Bewegung des Schnittpunktes der veränderlichen Linie (q) mit der festen, die Lage der Linie (p) zur Zeit t darstellenden Linie, und von der Geschwindigkeit w der Bewegung des Schnittpunktes der veränderlichen Linie (p) mit der festen, die Lage von (q) zur Zeit t darstellenden Linie, — nämlich: *Die Geschwindigkeit v ist die Diagonale des über den Geschwindigkeiten u und w construirten Parallelogramms* (Fig. 4).

Beweis. Es mögen MC und MD die Lagen der Linien (p) und (q) zur Zeit t darstellen, $M'C'$ und $M'D'$ deren Lage zur Zeit $t + \tau$, M_1 den Durchschnitt von $M'D'$ mit MC und M_2 den Schnittpunkt von $M'C'$ mit MD. Tragen wir auf der Sehne MM' die Länge $MS = \frac{MM'}{\tau}$ ab, auf der Sehne MM_1 die Länge $MS_1 = \frac{MM_1}{\tau}$ und

Fig. 4.



auf der Sehne M_1M' die Länge $M_1S_2 = \frac{M_1M'}{\tau}$, und lassen wir τ abnehmen und gegen Null convergiren. Dabei geht MS in die Gerade MT über, welche die Geschwindigkeit v der Bewegung von m auf AB darstellt; die Gerade MS_1 geht in die Gerade MT_1 über, die die Geschwindigkeit u der Bewegung des Punktes M_1 auf der Linie MC von M nach C hin darstellt, und die Gerade M_1S_2 geht in eine gewisse Länge MT_2 über, welche auf der Tangente der Linie MD im Punkt M liegen muss, da die Richtung M_1S_2 beim Zusammenfallen der Punkte M_1 und M' mit M auf die Tangente der Linie M_1D' in M_1 fällt und die letztere in allen ihren Punkten mit MD

*) Dabei ändert sich nicht nur die Lage der Linie, sondern auch ihre Krümmung in jedem ihrer Punkte.

zusammenfällt. Ziehen wir noch die Gerade S_1S, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MS_1S und MM_1M', dass $S_1S = \frac{M_1M'}{\tau} = M_1S_2$ und dass S_1S parallel M_1M' ist; also sind die Geraden S_1S und M_1S_2 gleich und parallel für jedes τ, und deshalb sind auch die Grenzen T_1T und MT_2, denen sie sich fortwährend nähern, gleich und einander parallel. Daraus ergiebt sich: 1) dass das Viereck MT_1TT_2 ein Parallelogramm ist, 2) dass die Geschwindigkeit u oder MT_1 der Bewegung des Punktes M_1 längs MC bestimmt wird, wenn man vom Endpunkt der Geschwindigkeit v die TT_1 parallel zur Tangente MT_2 der Linie MD zieht, bis sie die in M an MC gelegte Tangente trifft. Auf Grund der letzten Folgerung aber zeigt es sich, dass die Gerade MT_2, welche die Grenzlage von M_1S_2 darstellt, die Geschwindigkeit w der Bewegung von M_2 auf MD ist, da sie durch dieselbe Construction wie MT_1 bestimmt wird.

Also wird die Geschwindigkeit v durch die Diagonale MT des Parallelogramms dargestellt, das sich über den die Geschwindigkeiten u und w darstellenden Längen MT_1 und MT_2 als Seiten construiren lässt, was zu beweisen war.

Die Bewegung des Punktes m auf AB wird betrachtet als zusammengesetzt aus der Bewegung von M_1 auf MC und M_2 auf MD, weil sie durch die gleichzeitige Verbindung dieser beiden Bewegungen hervorgebracht werden kann, wenn man zugleich die Linien (p) und (q) sich in der Zeit τ ändern lässt. Die Bewegungen auf MC und MD nennt man die *Componenten* der Bewegung auf MB.

Zwei gleichzeitige gleichförmige Bewegungen von den Geschwindigkeiten u und w auf den Geraden MT_1 und MT_2 können als die Componenten einer gleichförmigen Bewegung auf MT von der Geschwindigkeit v angesehen werden; denn zieht man zu MT_1 und MT_2 parallele Gerade durch die auf diesen Geraden sich bewegenden Punkte, d. h. durch die Endpunkte der Strecken ut und wt, so schneiden sich dieselben auf MT, und der Schnittpunkt bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v, weil die drei Längen ut, wt und vt sich proportional den drei Längen MT_1, MT_2 und MT ändern.

Die Geschwindigkeiten u und w heissen *die Componenten* der Geschwindigkeit v.

5. Die Geschwindigkeit v schliesst den Polygonalzug $MT_1 T$, der aus der Geschwindigkeit u und der der Geschwindigkeit w gleichen und parallelen Strecke $T_1 T$ gebildet wird; daher ist die Projection von v auf jede Axe x gleich der Summe der Projectionen von u und w auf dieselbe Axe, d. h.:

$$v \cos(vx) = u \cos(ux) + w \cos(wx) \tag{2}$$

für jede Richtung von x.

Setzen wir der Kürze halber fest, dass *geometrische Summe* mehrerer Strecken $u, u', u'', \ldots$ eine solche Strecke genannt werden soll, deren Projection auf jede beliebige Axe gleich der Summe der Projectionen der Strecken $u, u', u'' \ldots.$ auf dieselbe Axe ist, und nehmen wir zur Bezeichnung einer solchen Summe die von Resal*) vorgeschlagene Bezeichnungsweise an:

$$\bar{s} = \bar{u} + \bar{u'} + \bar{u''} + \ldots$$

Unter dieser Voraussetzung und auf Grund der Gleichung (2) kann man nun sagen, dass die Geschwindigkeit v die geometrische Summe der Geschwindigkeiten u und w ist, und man kann dies so bezeichnen:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}. \tag{3}$$

Die Grade $\bar{w}$, die man zu $\bar{u}$ geometrisch hinzufügen muss, um $\bar{v}$ als Summe zu erhalten, heisst die geometrische Differenz von $\bar{v}$ und $\bar{u}$, was symbolisch ausgedrückt wird durch:

$$\bar{w} = \bar{v} - \bar{u}.$$

Das Dreieck MT_1M' (Fig. 4) giebt die Gleichungen

$$v^2 = u^2 + w^2 + 2\,uw \cos(uw),$$

$$u : w : v = \sin(vw) : \sin(vu) : \sin(uw)$$

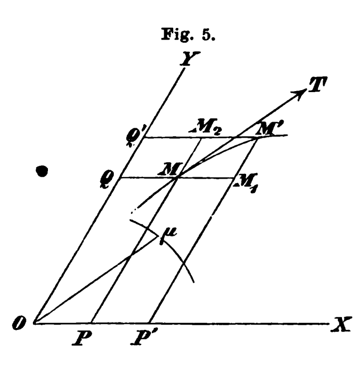
zur Bestimmung der Grösse und Richtung einer der drei Geschwindigkeiten u, v, w, wenn die beiden andern gegeben sind.

6. Der Punkt m bewege sich in der Ebene und sei auf zwei in der Ebene gelegene feste Axen Ox und Oy bezogen; x und y seien seine geradlinigen Coordinaten bezüglich dieser

*) Resal, Traité de Cinématique pure, page 18.

Axen (Fig. 5). Der Ort M des Punktes m zur Zeit t ist der Schnittpunkt der Geraden QM und PM, die den Axen Ox und Oy parallel sind. Diese Geraden bewegen sich mit m zugleich und nehmen zur Zeit $t + \tau$ die Lagen $M'Q'$ und $M'P'$ an, welche die ursprünglichen Lagen resp. in den Punkten M_1 und M_2 schneiden. Auf Grund des in §. 4. bewiesenen Lehrsatzes ist v zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit der geradlinigen Bewegung von M_1 auf einer zur Axe Ox parallelen Geraden und der Geschwindigkeit der geradlinigen Bewegung von M_2 auf einer zu Oy parallelen Geraden. Die erste dieser Geschwindigkeitscomponenten ist $+\frac{dx}{dt}$ oder $-\frac{dx}{dt}$, je nachdem die Abscisse x wächst oder abnimmt bei zunehmendem t. Die zweite Geschwindigkeitscomponente ist $\pm\frac{dy}{dt}$. Jedenfalls kann man die Derivirten der Coordinaten nach der Zeit: $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ als Coordinaten des Endpunktes T der die Geschwindigkeit v darstellenden Geraden MT ansehen, in Bezug auf Axen, die ihren Ursprung in M haben, den Axen Ox und Oy parallel und mit ihnen gleichgerichtet sind. Allgemein hat man:

Fig. 5.



$$\overline{v} = \overline{x'} + \overline{y'}.$$

Im Falle rechtwinkliger Axen ist:

$$x' = v \cos(vx),\; y' = v \cos(vy),\; v^2 = x'^2 + y'^2.$$

Zur Bestimmung der Grösse und Richtung der Geschwindigkeit v muss man die Functionen der Zeit kennen, welche x und y ausdrücken.

Der Hodograph der Geschwindigkeit. Man kann die Derivirten der Coordinaten nach der Zeit, x' und y', als Coordinaten bezüglich der Axen Ox und Oy eines Punktes μ betrachten, der sich am Endpunkt einer der Geschwindigkeit v gleichen, parallelen und gleichgerichteten Geraden $O\mu$ befindet. Zugleich mit m wird sich auch μ bewegen. Die Bahn dieses letzteren

Punktes ist von Hamilton *Hodograph der Geschwindigkeit* genannt worden. Ist der Hodograph bekannt, so bestimmt sich die Geschwindigkeit in einem gegebenen Punkte M folgendermassen. Man legt in diesem Punkte die Tangente an die Bahn des Punktes m, nach der Seite hin, wohin dieser Punkt sich bewegt; dann zieht man durch den Anfangspunkt O eine ihr parallele und gleichgerichtete Gerade $O\mu$; man bestimmt den Schnittpunkt μ dieser zweiten Geraden mit dem Hodographen und trägt endlich auf der ersteren eine der $O\mu$ gleiche und gleichgerichtete Strecke MT ab.

Beispiele: 1) Es sei

$$x = at, \; y = \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{a}$$

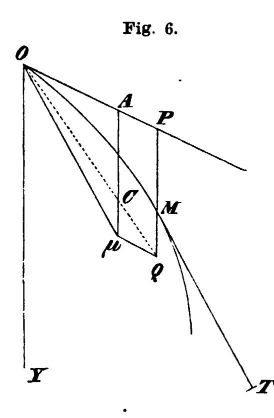
Die Bewegung, bei der die Coordinaten des beweglichen Punktes durch diese Functionen der Zeit dargestellt werden, ist zusammengesetzt aus einer gleichförmigen, der Axe Ox parallelen von der Geschwindigkeit a und aus einer gleichmässig beschleunigten, der Axe Oy parallelen, bei der die in der Einheit der Zeit erlangte Geschwindigkeit g ist. Eine derartige Bewegung würde, wie Galilei fand, ein unter beliebiger Neigung gegen den Horizont geworfener Körper haben, wenn die Luft nicht wäre.

Aus Gleichung (a) leiten wir die Geschwindigkeitscomponenten ab:

$$x' = a, \; y' = gt = \frac{g}{a}\, x.$$

Die erste ist constant, die zweite ist der Zeit oder der Abscisse x proportional. — Die Gleichung $x' = a$, welche die Zeit t nicht enthält, ist die Gleichung des Hodographen. Sie gehört einer der Axe Oy parallelen Geraden an (Fig. 6). Aus der gegebenen Lage M des beweglichen Punktes m bestimmt sich die Lage des Punktes μ folgendermassen: Bestimmen wir den Punkt C durch die Coordinaten a und g, ziehen wir die Gerade OC bis zum Durchschnitt mit der Ordinate PM von M und aus dem Schnittpunkt Q eine Parallele zur Axe Ox bis zum Durchschnitt mit der Ordinate AC von C; der Schnittpunkt ist, wie leicht zu sehen, der Punkt μ, und die Gerade AC ist der Hodograph. Die Geschwindigkeit v stellt sich als eine der $O\mu$ gleiche und parallele Gerade OT dar.

Fig. 6.



Eliminirt man t aus den Gleichungen (a), so ergibt sich die Gleichung der Bahn

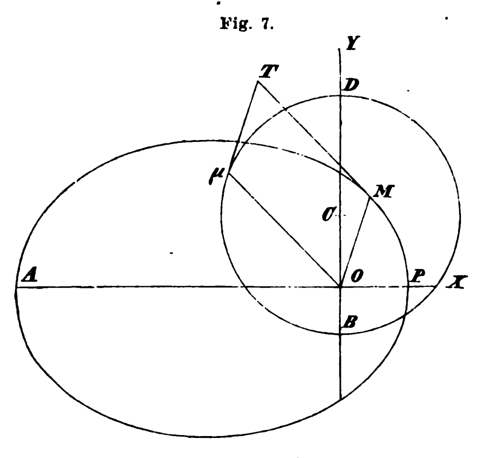
$$2a^2 y = gx^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Bahn des Punktes m eine Parabel ist, die im Punkte O die Axe Ox berührt.

2) Die Geschwindigkeit der elliptischen Bewegung eines Planeten auf Grund der Kepler'schen Gesetze zu bestimmen.

Nach den von Kepler gefundenen Gesetzen bewegt sich der als Punkt zu betrachtende Planet derart auf einer Ellipse, dass die von dem Radiusvector des Planeten beschriebenen Flächenräume den entsprechenden Zeiten proportional sind, wenn die Radienvectoren aus *dem* Brennpunkt gezogen werden, in welchem sich die Sonne befindet. Es sei (Fig. 7) O der Ort der Sonne, M der Ort des Planeten zur Zeit t, $2a$ die grosse Axe der Planetenbahn, e das Verhältniss der Excentricität zur halben grossen Axe, p der halbe Parameter, r der Radiusvector OM und φ der Winkel MOP, welchen der Radiusvector r mit derjenigen Richtung der grossen Axe bildet, die durch den der Sonne nächsten, *Perihel* genannten, Scheitel P geht. Die Gleichung der Bahn in Polarcoordinaten ist dann:

Fig. 7.



$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \tag{a}$$

Das Differential der Sectorenfläche MOP ist $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$, und nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze muss sein Verhältniss zu dt gleich einer gewissen constanten Grösse c sein, d. h.:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{b}$$

Bezeichnet man mit x und y die Coordinaten des Planeten M in Bezug auf rechtwinklige Axen Ox und Oy (diese so genommen, dass die Axe der positiven x durch das Perihel P geht), so hat man aus Gleichung (a):

$$x = r \cos \varphi = \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi},$$

$$y = r \sin \varphi = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

Nimmt man die Derivirten dieser Ausdrücke nach t und beachtet, dass, wie Gleichung (b) ergiebt, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2c}{r^2}$, so findet man:

$$x' = -\frac{2c}{p} \sin \varphi, \quad y' = \frac{2c}{p} (\cos \varphi + e), \tag{c}$$

und hieraus folgt durch Elimination des Winkels φ:

$$x'^2 + \left(y' - \frac{2ce}{p}\right)^2 = \frac{4c^2}{p^2},$$

als Gleichung des Hodographen. Dieselbe zeigt, dass *der Hodograph der Planetenbewegung ein Kreis vom Radius* $\frac{2c}{p}$ *ist, dessen Mittelpunkt* C *sich auf der Axe* Oy *in der Entfernung* $OC = \frac{2ce}{p}$ *von* O *befindet.*

Da $\frac{2ce}{p} < \frac{2c}{p}$, so schneidet der Hodograph die grosse Axe AP. Um die Geschwindigkeit im Punkte M zu bestimmen, zieht man in diesem Punkte die Tangente an die Planetenbahn und parallel dazu $O\mu$ bis zum Durchschnitt mit dem Hodographen; dann macht man $MT = O\mu$.

Die Formeln (c) liefern:

$$v^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{4c^2}{p^2} \cdot \left\{1 + 2e\cos\varphi + e^2\right\},$$

aus Gleichung (a) aber hat man:

$$e\cos\varphi = \frac{p}{r} - 1,$$

also:

$$v^2 = \frac{4c^2}{p^2}\left\{\frac{2p}{r} - 1 + e^2\right\}$$

oder:

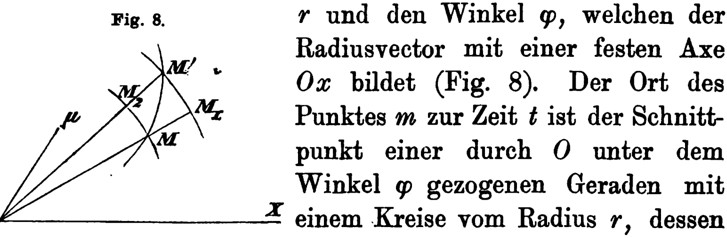
$$v^2 = \frac{8c^2}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right).$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Geschwindigkeit am grössten ist, wenn der Radiusvector am kleinsten ist, d. h. im Perihelium, und am kleinsten, wenn der Radiusvector am grössten ist, d. h. im Aphelium. Auf dem Hodographen sind diese beiden Geschwindigkeiten durch die Längen

$$OD = \frac{2c}{a(1-e)}, \quad OB = \frac{2c}{a(1+e)}$$

dargestellt.

7. Angenommen, der in der Ebene bewegliche Punkt m sei durch Polarcoordinaten bestimmt: durch den Radiusvector



r und den Winkel φ, welchen der Radiusvector mit einer festen Axe Ox bildet (Fig. 8). Der Ort des Punktes m zur Zeit t ist der Schnittpunkt einer durch O unter dem Winkel φ gezogenen Geraden mit einem Kreise vom Radius r, dessen Mittelpunkt in O ist. Diese beiden Linien ändern sich bei der Bewegung des Punktes m, und zur Zeit $t + \tau$ durchschneiden sie sich mit den ihre Lage zur Zeit t darstellenden Linien in M_1 und M_2; daher ist die Geschwindigkeit v zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit der Bewegung des

Punktes M_1 auf dem Radiusvector OM und aus der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes M_2 auf der Peripherie des aus O als Centrum mit dem Radius OM beschriebenen Kreises. Die erste Geschwindigkeitscomponente ist gleich der Grenze, der sich das Verhältniss $\frac{MM_1}{\tau}$ nähert, wenn τ gegen Null convergirt. Diese Grenze ist $+\frac{dr}{dt}$ oder $-\frac{dr}{dt}$, je nachdem r, bei zunehmendem t, wächst oder abnimmt. Die zweite Geschwindigkeitscomponente ist die Grenze des Verhältnisses $\frac{MM_2}{\tau}$, welche auf $+r\frac{d\varphi}{dt}$ oder $-r\frac{d\varphi}{dt}$ führt, je nachdem φ bei zunehmendem t wächst oder abnimmt. Es ist leicht zu sehen, dass man in jedem Falle hat:

$$v\cos(vr) = \frac{dr}{dt} \text{ und } v\sin(vr) = r\frac{d\varphi}{dt}, \tag{a}$$

wo (vr) den Winkel μOM bezeichnet, welchen die Richtung des Radiusvectors $O\mu$ des Hodographen mit dem entsprechenden Radiusvector der Bahn des Punktes m macht und der von 0^0 bis 360^0 in demselben Sinne wie der Winkel φ gerechnet wird. Zur Bestimmung der Grösse der Geschwindigkeit hat man die Gleichung:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{b}$$

Beispiel: Auf welcher Linie muss der Punkt m sich bewegen, damit die Geschwindigkeitscomponenten (a) *constant seien?*

Bezeichnet man diese constanten Geschwindigkeiten mit a und b, so ist:

$$\frac{dr}{dt} = a,\ r\frac{d\varphi}{dt} = b;$$

daraus folgt:

$$\frac{dr}{r} = \frac{a}{b}d\varphi$$

und wenn man integrirt:

$$\log\frac{r}{r_0} = \frac{a}{b}(\varphi - \varphi_0),$$

wo r_0 und φ_0 die Coordinaten des Punktes für $t = 0$ sind. Man kann diese Gleichung in der Form schreiben:

$$r = r_0 e^{\frac{a}{b}(\varphi - \varphi_0)};$$

sie stellt die sogenannte *logarithmische Spirale* dar. Da nach Gleichung (a)

$$\tan(vr) = \frac{b}{a},$$

so bildet die Richtung der Geschwindigkeit v oder der Tangente *einen constanten Winkel mit dem Radiusvector des Berührungspunktes.*

8. Als Beispiel der Bestimmung der Geschwindigkeit, wenn der Punkt sich auf einer krummen Fläche bewegt, wollen wir den Fall betrachten, wenn der Punkt m (wie im dritten Beispiel des dritten Paragraphen) sich auf einer Kugel vom Radius Eins bewegt, welche die Erde repräsentirt; die Lage des Punktes ist dann durch die Breite β und die Länge λ bestimmt. Wenn sich zur Zeit der Bewegung diese Coordinaten beide ändern, so ist die Geschwindigkeit der Bewegung v zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit der Bewegung auf dem Meridian, welche $+\frac{d\beta}{dt}$ oder $-\frac{d\beta}{dt}$ ist, je nachdem die Breite wächst oder abnimmt, und der Geschwindigkeit der Bewegung auf einem Parallelkreise, welche, wie leicht zu sehen, $+\frac{d\lambda}{dt}\cos\beta$ oder $-\frac{d\lambda}{dt}\cos\beta$ ist, je nachdem die Länge λ zu- oder abnimmt. Bezeichnet man mit α das Azimuth der Geschwindigkeit v, d. h. den Winkel, welchen die Richtung von v mit der Tangente an den Meridian bildet (diese Tangente nach der Seite hin gerichtet, nach welcher die Breite zunimmt), so hat man:

$$v\cos\alpha = \frac{d\beta}{dt} \text{ und } v\sin\alpha = \frac{d\lambda}{dt}\cos\beta, \tag{a}$$

$$v^2 = \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \cos^2\beta.$$

Benutzen wir nun diese Formeln zur Lösung der Aufgabe:

Auf welcher Curve muss ein Punkt sich bewegen, wenn seine Geschwindigkeitscomponenten (a) *constant sein sollen?*

Setzen wir

$$\frac{d\beta}{dt} = a,\ \frac{d\lambda}{dt}\cos\beta = b. \tag{b}$$

Nach Gleichung (a) ist:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b};$$

folglich ist das Azimuth der Tangente in jedem Punkte der gesuchten Curve constant. Diese Eigenschaft hat die Bahn eines Schiffes, welches immer unter demselben Windstriche segelt.

Aus den Gleichungen (b) folgt:

$$\frac{d\beta}{\cos\beta} = \cot\alpha\,.\,d\lambda.$$

Integrirt man und bezeichnet mit β_0 und λ_0 die Breite und Länge der Anfangslage des beweglichen Punktes, so erhält man:

$$\log \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}\beta_0 + \frac{\pi}{4}\right)} = (\lambda - \lambda_0) \cot\alpha,$$

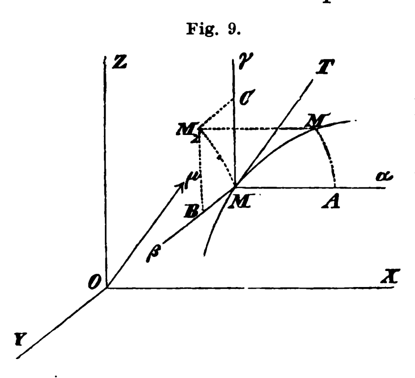
oder:

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\tfrac{1}{2}\beta_0 + \tfrac{\pi}{4}\right) e^{(\lambda - \lambda_0)\cot\alpha}.$$

Die Curve, welche diese Gleichung hat, heisst *Loxodrome.*

9. Betrachten wir noch den Fall, wo der Punkt m sich im Raume bewegt und durch drei geradlinige Coordinaten x, y, z bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz bestimmt ist (Fig. 9). M sei die Lage von m zur Zeit t; $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ seien drei den Coordinatenaxen parallele Gerade; M' die Lage von m zur Zeit $t + \tau$; A, B, C die Schnittpunkte der Geraden $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ mit drei durch M' gelegten, den Coordinatenebenen parallelen Ebenen, und M_2 der Schnittpunkt der Ebene $\beta M\gamma$ mit einer durch M' parallel der Axe Ox gezogenen Geraden. Während der Zeit τ setzt sich die Bewegung des Punktes m zusammen aus der Bewegung

Fig. 9.



des Punktes A auf $M\alpha$ und der Bewegung von M_2 in der Ebene $\beta M\gamma$ auf einer gewissen Linie MM_2; daher ist auch die Geschwindigkeit der erstern Bewegung aus der Geschwindigkeit der Bewegung von A und der von M_2 zusammengesetzt; die letztere aber resultirt aus den Geschwindigkeiten der Bewegungen der Punkte B und C auf den Geraden $M\beta$ und $M\gamma$; also ist die Geschwindigkeit $v = MT$ der Bewegung des Punktes m aus den drei Geschwindigkeiten zusammengesetzt, welche die Punkte A, B, C bei ihren Bewegungen auf drei den Coordinatenaxen parallelen Geraden haben. Wie leicht zu sehen, ist die erste Geschwindigkeitscomponente $+\frac{dx}{dt}$ oder $-\frac{dx}{dt}$, je nachdem sich der Punkt A bezüglich der Ebene

$\beta M\gamma$ auf der Seite befindet, wohin x wächst, oder auf der, wohin x abnimmt. Die zweite Geschwindigkeitscomponente ist $\pm \frac{dy}{dt}$ und die dritte $\pm \frac{dz}{dt}$. Ueberhaupt sind die Derivirten der Coordinaten:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \; y' = \frac{dy}{dt}, \; z' = \frac{dz}{dt}$$

die Coordinaten des Endpunktes T der Geschwindigkeit v, bezüglich der Axen $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, und auch die Coordinaten bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz des Punktes μ, welcher den Hodographen beschreibt.

Im Falle rechtwinkliger Axen hat man:

$$x' = v \cos(vx), \; y' = v \cos(vy), \; z' = v \cos(vz),$$

und

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Beispiel. Die Bewegung zu untersuchen, bei welcher die Coordinaten des beweglichen Punktes durch die Functionen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cos(kt) + \alpha' \sin(kt) \\ y &= \beta \cos(kt) + \beta' \sin(kt) \\ z &= \gamma \cos(kt) + \gamma' \sin(kt), \end{aligned} \tag{a}$$

wo α, β, γ, α', β', γ' und k Constante sind. Jedesmal, wenn die Zeit einen Zuwachs $T = \frac{2\pi}{k}$ erhält, wächst die Grösse kt um 2π, und $\sin(kt)$, $\cos(kt)$ und folglich auch x, y, z kehren zu ihren früheren Werthen zurück, d. h. der bewegliche Punkt kehrt auf seinen früheren Platz zurück.

Eine derartige Bewegung heisst periodisch. Die sehr kleinen schwingenden Bewegungen der Theilchen eines elastischen wägbaren Körpers oder des Aethers bestehn aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Bewegungen, bei denen die Coordinaten sich in Functionen von der Form (a) ausdrücken.

Aus den Gleichungen (a) leiten sich die Projectionen der Geschwindigkeit v auf die Coordinatenaxen, oder die Coordinaten des den Hodographen beschreibenden Punktes μ ab, nämlich:

$$\begin{aligned} x' &= [\alpha' \cos(kt) - \alpha \sin(kt)]\, k \\ y' &= [\beta' \cos(kt) - \beta \sin(kt)]\, k \\ z' &= [\gamma' \cos(kt) - \gamma \sin(kt)]\, k. \end{aligned} \tag{b}$$

Bezeichnet man mit A, B, C die Determinanten zweiten Grades

$$\beta\gamma' - \gamma\beta', \; \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \; \alpha\beta' - \beta\alpha',$$

so folgt aus den Gleichungen (a) und (b):

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= 0 \\ Ax' + By' + Cz' &= 0, \end{aligned} \tag{c}$$

d. h. der Punkt m und der den Hodographen beschreibende Punkt μ bewegen sich in einer und derselben durch den Anfangspunkt gehenden Ebene. Nach einer Eigenschaft der Determinanten hat man ferner:

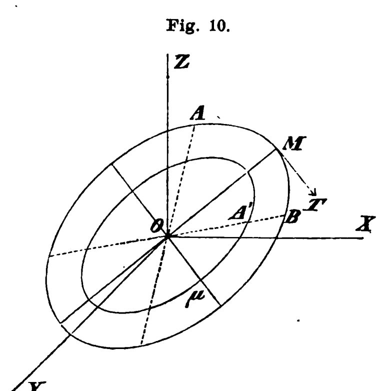
$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \; A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = 0;$$

dies zeigt, dass die Coordinaten der Punkte A (α, β, γ) und B $(\alpha', \beta', \gamma')$ den Gleichungen (c) genügen; man kann daher die Lage der Ebene (c) durch die Bedingung bestimmen, dass sie durch den Coordinatenanfang und durch die Punkte A und B gehen soll. Der Punkt A ist die Anfangslage des Punktes m, denn für $t = 0$ hat man:

$$x = \alpha, \; y = \beta, \; z = \gamma.$$

Zieht man einen Radiusvector OB (Fig. 10) und trägt auf ihm eine Länge $OA' = OB.\,k$ ab, so erhält man einen Punkt A', der die Anfangslage des den Hodographen beschreibenden Punktes μ ist; denn die Coordinaten $k\alpha'$, $k\beta'$, $k\gamma'$ des Punktes A' sind die Werthe von x', y', z' für $t = 0$.

Fig. 10.



Durch Elimination von $\sin(kt)$ und $\cos(kt)$ aus den Gleichungen (a) erhält man die Gleichungen der Projectionen der Bahn des Punktes m auf die Coordinatenebenen

$$\begin{aligned} (\beta z - \gamma y)^2 + (\beta' z - \gamma' y)^2 &= A^2 \\ (\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma' x - \alpha' z)^2 &= B^2 \\ (\alpha y - \beta x)^2 + (\alpha' y - \beta' x)^2 &= C^2. \end{aligned} \qquad (d)$$

Dies sind im allgemeinen die Gleichungen von drei Ellipsen, die ihren Mittelpunkt im Coordinatenanfang haben; da also die Bahn eine ebene Curve ist, die zur Projection auf eine der Coordinatenebenen eine Ellipse hat, so ist sie selbst eine Ellipse. Der Coordinatenanfang ist der Mittelpunkt derselben. Die Geraden OA und OB sind zwei conjugirte Halbmesser der Ellipse; denn die Coordinaten der Punkte A und B erfüllen, wie leicht zu sehen, die Gleichungen (d), und die Gerade OB welche durch die Anfangslage A' des den Hodographen beschreibenden Punktes μ geht, ist parallel der Anfangsgeschwindigkeit, deren Richtung in die Tangente der Bahn im Punkte A fällt; und diese Eigenschaft hat der zu dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser OA conjugirte Halbmesser.

Nimmt man OA und OB als Axen eines neuen Coordinatensystems der ξ, η und setzt $OA = a$, $OB = b$, so hat man als Gleichung der Bahn:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \qquad (e)$$

Durch Elimination von $\sin(kt)$ und $\cos(kt)$ aus den Gleichungen (b) erhält man die Gleichungen der Projectionen des Hodographen auf die Coordinatenebenen:

$$(\beta z' - \gamma y')^2 + (\beta' z' - \gamma' y')^2 = A^2 k^2$$
$$(\gamma x' - \alpha z')^2 + (\gamma' x' - \alpha' z')^2 = B^2 k^2$$
$$(\alpha y' - \beta x')^2 + (\alpha' y' - \beta' x')^2 = C^2 k^2,$$

welche drei den drei Ellipsen (d) ähnliche und mit ihnen ähnlich gelegene Ellipsen darstellen; also ist der Hodograph eine der Ellipse (e) ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse und ihre Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = k^2.$$

Da der Radiusvector des Hodographen $O\mu$ der Tangente an die Ellipse (e) im Punkte m (ξ, η) parallel ist, so hat er die Richtung eines Durchmessers, der zu dem durch den Punkt m gehenden Durchmesser conjugirt ist. Folglich bestimmt sich die Geschwindigkeit v für eine gegebene Lage des Punktes m folgendermassen. Man zieht Om und sucht auf die bekannte Weise denjenigen dazu conjugirten Halbmesser, welcher nach der Seite der Bewegung des Punktes m hin gerichtet ist; auf letzterem trägt man die Länge $O\mu = Om.k$ ab und zieht die dieser gleiche, parallele und nach derselben Seite hin gerichtete Länge mT; dieselbe stellt die Geschwindigkeit v dar.

Aus den Gleichungen (a) und (b) lässt sich für die Geschwindigkeit leicht der Ausdruck ableiten:

$$v = k\sqrt{a^2 + b^2 - r^2},$$

wo $r = Om$. Dieser Ausdruck folgt auch aus der bekannten Eigenschaft der Ellipse, dass die Quadratsumme der conjugirten Halbmesser gleich der Quadratsumme der Halbaxen ist.

In dem speciellen Falle, wenn die Determinanten A, B, C Null werden, liegen die Punkte

$$A(\alpha, \beta, \gamma), \quad A'(\alpha', \beta', \gamma')$$

auf einer durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden; dann führen die Gleichungen (d) auf folgende:

$$\beta z - \gamma y = 0, \quad \gamma x - \alpha z = 0, \quad \alpha y - \beta x = 0,$$

welche eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade darstellen; also ist in diesem Falle die Bahn die Gerade OA; dieselbe stellt auch den Hodographen dar.

10. Auf den Lehrsatz des Paragraphen 4. über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten gründet sich die Methode Robervals für die Construction der Tangente an eine Curve in einem gegebenen Punkte. Das Wesen dieser Methode besteht in der Bestimmung der Winkel, welche die Tangente der gegebenen Curve mit den Tangenten jener sich ändernden Linien (p) und (q) bildet, durch deren Durchschnitt sich die Lage des die gegebene Curve beschreibenden Punktes M (Fig. 4) bestimmt; dabei wird das Verhältniss zwischen den Geschwin-

digkeiten der Bewegungen der Punkte M_1 und M_2 als bekannt vorausgesetzt.

Das Verhältniss der Sinus dieser Winkel

$$\frac{\sin(vu)}{\sin(vw)} = \frac{w}{u} \tag{a}$$

hängt nicht von dem Gesetze der Bewegung des Punktes M auf der gegebenen Curve ab und kann aus den geometrischen Eigenschaften der Curve oder aus ihren Gleichungen abgeleitet werden.

Beispiele: 1) Ist die Curve eben und ist $f(x, y) = 0$ ihre Gleichung in geradlinigen Coordinaten x und y, bezeichnen ferner ξ, η die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangente der Curve im Punkte (x, y), so hat man nach Gleichung (a):

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\sin(vx)}{\sin(vy)} = \frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}.$$

Differentiirt man die Gleichung der Curve, so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0;$$

eliminirt man hieraus vermittelst der vorstehenden Proportion dx und dy, so erhält man die Gleichung der Tangente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

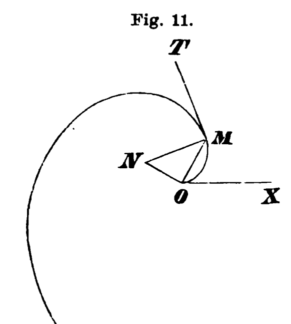
2) Es sei $f(r, \varphi) = o$ als Gleichung der Curve in Polarcoordinaten r und φ gegeben. In diesem Falle geht das Verhältniss (a) über in:

$$\tan(vr) = \frac{r\,d\varphi}{dr} = -\frac{r\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\dfrac{\delta f}{\partial \varphi}}.$$

Z. B. für die Archimedische Spirale ist $r = a\varphi$ und

$$\tan(vr) = \frac{r}{a}.$$

Fig. 11.

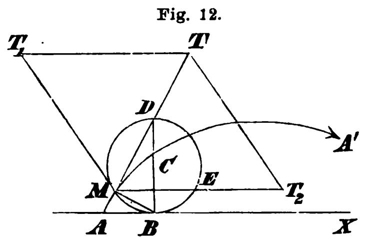


Man kann daher die Tangente in einem gegebenen Punkte M folgendermassen construiren. Man errichtet im Pol O (Fig. 11) eine Senkrechte ON auf dem Radiusvector OM, macht dieselbe gleich der constanten Strecke a, zieht NM und senkrecht dazu MT; die Gerade MN ist die Normale und MT die Tangente. Die Eigenthümlichkeit dieser Tangente besteht darin, dass die Strecke ON, welche man Subnormale nennt, *constant* ist.

3) Tangente an die durch Rollen des

Kreises $BMDE$ (Fig. 12) auf der Graden AA' erzeugte Cykloide AMA'. Die Lage des die Cykloide erzeugenden Punktes M bestimmt sich als Durchschnitt der Kreisperipherie $BMDE$ mit der zur Grundlinie AA' parallelen Geraden ME; die Geschwindigkeit MT der Bewegung auf der Cykloide ist daher zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit MT_1 der Bewegung auf dem Kreise $MDEB$ und der Geschwindigkeit MT_2 auf der Geraden ME. Diese Geschwindigkeitscomponenten sind einander gleich; denn nach einer Eigenschaft der Cykloide wächst die Länge AB um ebensoviel wie der Bogen BM, und folglich bewegt sich auch der Punkt M um ebensoviel parallel der Geraden AA' vorwärts. Also ist das Geschwindigkeitsparallelogramm T_1MT_2T ein Rhombus und der Winkel TMT_1 gleich dem Winkel TMT_2. Infolge dieser Eigenschaft trifft die Tangente MT den Endpunkt D des Durchmessers, der durch den Punkt B geht, in welchem der erzeugende Kreis die Gerade AA' berührt; denn die Winkel DMT_2 und DME werden durch die Hälften der einander gleichen Bogen DM und DE gemessen.

Fig. 12.



4) Wenn eine Curve im Raume als Durchschnitt zweier Flächen bestimmt ist, deren Gleichungen in geradlinigen Coordinaten sind:

$$f(x,y,z) = o, \quad F(x,y,z) = o, \tag{a}$$

und wenn ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der im Punkte x, y, z an die Curve gelegten Tangente sind, so müssen die Differenzen $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ den Projectionen der Geschwindigkeit v auf die Axen proportional sein; man kann daher die Gleichung der Tangente in der Form darstellen:

$$\xi - x : \frac{dx}{dt} = \eta - y : \frac{dy}{dt} = \zeta - z : \frac{dz}{dt}$$

oder

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}. \tag{b}$$

Die Gleichungen (a) geben aber:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = o, \quad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = o,$$

woraus man durch Elimination von dx, dy, dz vermittelst der Gleichungen (b) als Gleichungen der Tangente erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = o,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = o.$$

11. Ist v die Geschwindigkeit der Bewegung zur Zeit t und s der in dieser Zeit zurückgelegte Weg, so hat man nach dem im Paragraph 3. Bewiesenen

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

also

$$s = \int_0^t v dt.$$

So erhalten wir, wenn die Geschwindigkeit v als Function der Zeit ausgedrückt ist, durch Integration dieser Function den Weg, welchen der Punkt in einer gegebenen Zeit zurücklegt.

Zur Darstellung der Geschwindigkeit als Function der Zeit dient, wenn Functionen, die die Coordinaten darstellen, gegeben sind, der Satz von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

Zuweilen wird des bequemeren Integrirens wegen die Zeit t durch eine andre Variable ersetzt, als deren Function die Zeit dargestellt ist. Es sei etwa $t = \varphi(\alpha)$, so ist

$$\frac{ds}{d\alpha} = v \, . \, \varphi'(\alpha) \text{ und } s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} v \varphi'(\alpha) d\alpha,$$

wo α_0 der Werth von α für $t = 0$ ist. So ist der Weg s als Function von α ausgedrückt. Eliminirt man dann α mit Hilfe der Gleichung $t = \varphi(\alpha)$, so erhält man eine Gleichung zwischen s und t.

Bezeichnet nun α eine der Coordinaten, so ist s als Function dieser Coordinate ausgedrückt und ein solcher Ausdruck hängt nicht von dem Gesetze, nach dem der Punkt sich bewegt, ab.

Als Beispiele empfehlen wir, den in der Zeit t durchlaufenen Weg bei den in den vorangehenden Paragraphen betrachteten Bewegungen zu berechnen.

Das Differential des Weges s

$$ds = v dt$$

stellt sich als unendlich kleine Strecke dar, die auf der Richtung der Geschwindigkeit v aufgetragen ist, und repräsentirt einen Weg, der mit dieser Geschwindigkeit in der unendlich

kleinen Zeit dt gleichförmig durchlaufen ist. Man kann dasselbe als den unendlich kleinen Zuwachs Δs des Weges betrachten, wobei ein unendlich kleiner Theil höherer Ordnung vernachlässigt wird; denn es ist allgemein

$$\Delta s = ds + \varepsilon,$$

wo ε eine bezüglich Δs unendlich kleine Grösse ist.

Wenn die Geschwindigkeit v zusammengesetzt ist aus den Geschwindigkeiten u und w der Bewegungen auf den durch ihren Durchschnitt den beweglichen Punkt bestimmenden Linien (p) und (q) (§. 4.), so stellen udt und wdt, auf den Richtungen von u und w aufgetragen, die Differentiale zweier auf denjenigen Linien gelegenen Bogen s_1 und s_2 dar, welche die Lagen von (p) und (q) zur Zeit t darstellen. Infolge der Proportionen

$$ds : ds_1 : ds_2 = v : u : w$$

ist das Differential ds immer die Diagonale eines über den Differentialen ds_1 und ds_2 errichteten Parallelogramms.

Das Product der Geschwindigkeit v in die unendlich kleine Zeit dt, oder die Grösse ds, heisst gewöhnlich die unendlich kleine Verschiebung des Punktes; man kann daher sagen, dass *die unendlich kleine Verschiebung ds auf der gegebenen Curve das Resultat der Zusammensetzung oder die geometrische Summe der unendlich kleinen Verschiebungen auf den Curven (p) und (q) ist.*

Dieser Satz kann, statt des Satzes über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, zur Untersuchung der Eigenschaften der Curven und der geometrischen Bewegungen nach der Methode des unendlich Kleinen dienen.*)

---

*) *Schell:* Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Th., II. Cap., pag. 113 u. ff.

II. Capitel.

Gerade Strecken, welche ihre Länge und Lage mit der Zeit stetig ändern; ihre geometrischen Derivirten verschiedener Ordnungen. — Beschleunigungen verschiedener Ordnungen bei der Bewegung eines Punktes.

12. Setzen wir fest, dass jede gerade Strecke, die ihre Länge und Richtung oder nur ihre Länge oder nur ihre Richtung stetig mit der Zeit ändert, *eine geometrische Function der Zeit* heissen soll.

Nennen wir ferner zwei geometrische Functionen u und u' *geometrisch gleich*, wenn sie gleiche Länge und einerlei Richtung haben, d. h. wenn sie in einer Geraden oder einander parallel liegen und gleich und von demselben Sinne sind. Eine derartige Gleichheit wollen wir schreiben

$$\overline{u} = \overline{u'},$$

indem wir über jede Seite der Gleichung einen Horizontalstrich setzen.

Zwei geometrische Functionen von gleicher Länge, aber entgegengesetztem Sinne, die in einer Geraden liegen oder parallel sind, werden wir *geometrisch entgegengesetzt* nennen. Ist eine von ihnen mit $\overline{u}$ bezeichnet, so werden wir die andre mit $-\overline{u}$ bezeichnen.

Die Art und Weise, wie sich die Länge und Richtung einer geometrischen Function ändert, hängt von der Bewegung ihres Anfangs- und ihres Endpunktes ab.

Die geometrische Function $\overline{u}$ mit beweglichem Anfangspunkt lässt sich durch eine Function mit festem Anfangspunkt ersetzen, wenn man aus einem beliebigen festen Punkte O eine ihr geometrisch gleiche Strecke $\overline{OA}$ zieht und die Bewegung des Punktes A der Bedingung unterwirft, dass $\overline{OA}$ während der ganzen Zeit der Bewegung der gegebenen Function $\overline{u}$ geometrisch gleich bleiben soll.

Die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes A hat Resal vorgeschlagen, die *geometrische derivirte Function* erster Ordnung der Function $\overline{OA}$ oder der ihr gleichen $\overline{u}$ zu nennen.

die auf den Richtungen der partiellen Derivirten $\frac{du}{dt}$ und Θu aufzutragen sind.

Das erstere nennen wir *Differential nach der Länge*, das zweite *Differential nach der Richtung*, und die Grösse Θdt *Winkeldifferential* oder *Winkelverschiebung der Function* $\bar{u}$.

14. Ist $\bar{v}$ die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes m zur Zeit t, so nennt man die geometrische Derivirte $\bar{v}_1$ von $\bar{v}$ die *Beschleunigung erster Ordnung* der Bewegung von m. Ueberhaupt nennt man die geometrische Derivirte $\bar{v}_n$ von $\bar{v}$ die *Beschleunigung* n^{ter} *Ordnung* bei der Bewegung des Punktes m.

Als Anfangspunkt der Beschleunigung, sowie auch als Anfangspunkt der Geschwindigkeit $\bar{v}$ nimmt man den Punkt m an.

Die Derivirte der Geschwindigkeit nach der Länge

$$\frac{dv}{dt} = v_1 \cos(v_1 v)$$

nennt man *Beschleunigung in der Richtung der Geschwindigkeit* oder *in der Richtung der Tangente der Bahn*, oder auch *Tangentialbeschleunigung*.*) Das Winkeldifferential der Geschwindigkeit Θdt ist nichts andres, als der Contingenzwinkel der Bahn im Punkte m. Sein Verhältniss zu dem durchlaufenen Wege ds, d. h. $\frac{\Theta dt}{ds} = \frac{\Theta}{v}$ ist die erste Krümmung der Bahn im Punkte m; bezeichnet man also mit ϱ den Radius der ersten Krümmung, so hat man $\frac{\Theta}{v} = \frac{1}{\varrho}$; folglich $\Theta = \frac{v}{\varrho}$ und daher $\Theta v = \frac{v^2}{\varrho}$, d. h. die geometrische Derivirte der Geschwindigkeit nach der Richtung ist gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit, getheilt durch den Radius der ersten Krümmung.**) Ihre Richtung fällt mit der des Krümmungsradius ϱ zusammen, welcher in die erste Hauptnormale fällt. In der That, wenn

*) *Duhamel*, Cours de mécanique rationnelle, Livre II, fin du chap. 1.

**) Der Verfasser bedient sich der Benennungen Radius der 1. und 2. Krümmung, Ebene der 1. Krümmung, 1. und 2. Hauptnormale statt der gebräuchlicheren Ausdrücke: Krümmuugsradius, Torsions- oder Schmiegungsradius, Schmiegungsebene, Hauptnormale und Binormale.

Anm. d. Uebersetzers.

$O\mu$ eine der Geschwindigkeit $\bar{v}$ geometrisch gleiche Strecke ist, die von dem festen Anfangspunkt O ausgeht, so wird die Bahn des Punktes μ zum Hodographen der Geschwindigkeit $\bar{v}$; nun ist aber die Geschwindigkeit des Punktes μ die Beschleunigung erster Ordnung $\bar{v}_1$, und die durch $O\mu$ und diese Geschwindigkeit hindurchgehende Ebene ist der Ebene der ersten Krümmung, die man auch Schmiegungsebene nennt, parallel; denn sie ist die Grenzlage, der sich die Ebene zweier unendlich nahen Radienvectoren $O\mu$ nähert, die zwei benachbarten Tangenten der Bahn des Punktes m parallel sind. Folglich *ist die durch die Geschwindigkeit* $\bar{v}$ *und die nach dem Punkte* m *verlegte Beschleunigung* $\bar{v}_1$ *gehende Ebene die Krümmungsebene,* und die Länge $\Theta v = \frac{v^2}{\varrho}$, die sich in dieser Ebene befindet und zu $\bar{v}$ senkrecht ist, muss die Richtung des Krümmungsradius haben. Die Grösse

$$\Theta v = \frac{v^2}{\varrho} = v_1 \sin(v_1 v)$$

heisst *Beschleunigung nach dem Radius der ersten Krümmung.*

Die Grösse der totalen Beschleunigung $\bar{v}_1$ bestimmt sich durch die Formel:

$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}}.$$

15. *Beispiele für die Beschleunigungen.*

1) Bei der gleichförmigen geradlinigen Bewegung behält die Geschwindigkeit $\bar{v}$ ihre Grösse und Richtung bei; daher ist die Beschleunigung erster Ordnung $\bar{v}_1$ während der ganzen Zeit der Bewegung gleich Null; folglich sind auch alle Beschleunigungen höherer Ordnungen gleich Null.

2) Bei der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung (§. 3. Beisp. 1) wird der in der Zeit t durchlaufene Weg s durch die Formel

$$s = \tfrac{1}{2}\, g t^2$$

und die Geschwindigkeit durch die Formel

$$v = gt$$

ausgedrückt. Da die Richtung der Geschwindigkeit sich nicht ändert, so ist die Grösse der Beschleunigung erster Ordnung

$$v_1 = \frac{dv}{dt} = g,$$

und ihre Richtung fällt mit der Richtung des Weges und der Geschwindigkeit zusammen. Also:

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung erster Ordnung nach Grösse und Richtung constant und gleich der in der Einheit der Zeit erlangten Geschwindigkeit. Die Beschleunigungen höherer Ordnungen sind alle gleich Null.

3) Wenn bei einer geradlinigen Bewegung der durchlaufene Weg s durch die Function

$$s = at^n$$

dargestellt wird, wo die Constante $a > 0$ ist, so ist die Geschwindigkeit $v = nat^{n-1}$ und hat die Richtung von s; folglich hat auch die Beschleunigung erster Ordnung $\bar{v}_1$ die Richtung von s und ist $\frac{dv}{dt} = n\,(n-1)\,at^{n-2}$; die Beschleunigung zweiter Ordnung hat dieselbe Richtung und ist gleich

$$\frac{dv_1}{dt} = n\,(n-1)\,(n-2)\,at^{n-3};$$

überhaupt hat v_m, wenn $m < n$, die Richtung von s und ist gleich

$$n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m)\,at^{n-m-1}.$$

Die Beschleunigung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$v_{n-1} = 1.2.3\ldots.n.a$$

ist eine Constante; daher sind die Beschleunigungen höherer Ordnungen v_n, $v_{n+1}, \ldots$ gleich Null.

Da

$$a = \frac{1}{1.2.3\ldots.n}\,v_{n-1},$$

so ist

$$s = \frac{1}{1.2.3\ldots.n}\,v_{n-1}\,t^n;$$

die den Weg darstellende Function ist also durch die Beschleunigung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung allein bestimmt.

4) Wenn bei einer geradlinigen Bewegung der Weg s durch eine Function von der Form

$$s = f(t)$$

dargestellt ist, so haben die Geschwindigkeit und alle Beschleunigungen die Richtung von s oder die entgegengesetzte, und es ist allgemein:

$$v_n = \pm f^{n+1}(t);$$

hierbei ist das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen, je nachdem v_n und s nach derselben oder nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind. Zieht man das Zeichen $\pm$ zu v_n, so kann man setzen

$$v_n = f^{n+1}(t).$$

Beim Anfange der Bewegung, d. h. für $t = 0$, hat man $v_n = f^n(0)$. Kann die Function $f(t)$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von t entwickelt werden, so ist:

$$s = f'(0).\, t + \frac{1}{2} f''(0).\, t^2 + \ldots \frac{1}{1.\,2.\,3.\,.\,.n} f^n(0).\, t^n + \ldots,$$

was man auch schreiben kann:

$$s = vt + \frac{1}{2} v_1 t^2 + \frac{1}{1.\,2.\,3.} v_2 t^3 + \ldots \frac{1}{1.\,2.\,3.\ldots.\,n} v_{n-1} t^n + \ldots$$

wo $v, v_1, v_2, \ldots . v_{n-1}$ die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen im Anfange der Bewegung bezeichnen.

Aus diesem Ausdruck ersieht man, dass überhaupt eine geradlinige Bewegung aus andern gleichgerichteten zusammengesetzt ist, bei denen die in der Zeit t durchlaufenen Wege den Potenzen $t, t^2, t^3 \ldots$ der Zeit proportional sind.

Ist s eine ganze Function von t vom n^{ten} Grade, so sind die Beschleunigungen n^{ter} und höherer Ordnung gleich Null, nicht nur bei $t = 0$, sondern zu jeder Zeit; ist daher $s = at + bt^2$, so sind die Beschleunigungen zweiter und höherer Ordnung gleich Null. Die Anfangsgeschwindigkeit ist a und die Beschleunigung erster Ordnung $2\,b$. Eine solche Bewegung kann man als zusammengesetzt betrachten aus einer geradlinigen von der Geschwindigkeit a und einer gleichförmig beschleunigten von der Beschleunigung $2\,b$. Die Geschwindigkeit zur Zeit t ist ausgedrückt durch die Formel $v = a + 2bt$. Ist $a > 0$ und $b < 0$, so hat die gleichförmige Bewegung von der Geschwindigkeit a dieselbe Richtung wie s, und die gleichförmig beschleunigte von der Beschleunigung $v_1 = 2b$ ist s entgegengesetzt. Für $t = -\frac{a}{2b}$ wird die Geschwindigkeit v zu Null; für $t > -\frac{a}{2b}$ nimmt sie die dem s entgegengesetzte Richtung an, und für $t = -\frac{a}{b}$ erhält man $s = o$ und $v = -a$. Folglich kehrt der Punkt in seine Anfangslage mit einer der anfänglichen gleichen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeit zurück. Eine derartige Bewegung hat ein im luftleeren Raume vertical aufwärts geworfener Körper.

5) Im 2. Beispiel §. 3. (Fig. 2) hat die Geschwindigkeit der Bewegung des Schattens M', der vom Punkte M auf die Gerade CD fällt, wenn M vom Punkte S beleuchtet wird und sich gleichförmig auf AB bewegt, den Ausdruck

$$v = \frac{abc}{(a - \alpha - ct)^2};$$

daraus folgt:

$$v_n = \frac{1.2.3.\ldots.(n+1)\,abc^{n+1}}{(a - \alpha - ct)^{n+2}} = 1.2.3.\ldots.(n+1)\left(\frac{c}{ab}\right)^{n+1} (CM')^{n+2};$$

folglich ist die Beschleunigung n^{ter} Ordnung der Bewegung des Schattens M' proportional der $(n+2)^{ten}$ Potenz des Abstandes dieses Punktes von dem festen Punkte C.

6) Bei der krummlinigen gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit v constant; daher $\frac{dv}{dt} = 0$, d. h. die Projection der Beschleunigung $\overline{v_1}$ auf die Tangente ist gleich Null; es hat also diese Beschleunigung die Richtung des Radius der ersten Krümmung ϱ und ist gleich $\frac{v^2}{\varrho}$. Wenn im vorliegenden Falle die Bahn eine Kreislinie ist, so ist die Grösse ϱ constant und gleich dem Halbmesser der Bahn; folglich ist auch die Beschleunigung $v_1 = \frac{v^2}{\varrho}$ constant. Sie ist *direct proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Radius des Kreises, auf dessen Peripherie sich der Punkt bewegt.*

16. Wenn ein in einer Ebene sich bewegender Punkt durch geradlinige Coordinaten x und y bezüglich der in dieser Ebene liegenden Axen Ox und Oy bestimmt wird, so sind, wie wir oben gesehen haben, $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die Coordinaten des den Hodographen der Geschwindigkeit beschreibenden Punktes μ; folglich sind die zweiten Derivirten $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ die den Axen Ox und Oy parallelen Componenten der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes μ, d. h. die den Axen parallelen Componenten der Beschleunigung der ersten Ordnung v_1.

Ueberhaupt sind $\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$ und $\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}$ die den Coordinatenaxen parallelen Componenten der Beschleunigung der n^{ten} Ordnung v_n.

Beispiele: a) Bei der Bewegung, §. 6. Beispiel 1 sind die Coordinaten des beweglichen Punktes durch die Functionen ausgedrückt:

$$x = at,\ y = \tfrac{1}{2}gt^2;$$

folglich ist in diesem Falle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ \frac{d^2y}{dt^2} = g,$$

d. h. *Die Beschleunigung erster Ordnung ist constant nach Grösse und Richtung und parallel der Axe Oy nach der Seite der positiven y hin gerichtet.*

b) Bei der Bewegung der Planeten um die Sonne (Beisp. 2, §. 6.) sind die Coordinaten des den Hodographen der Geschwindigkeit beschreibenden Punktes μ:

$$x' = -\frac{2c}{p}\sin\varphi, \quad y' = \frac{2c}{p}(\cos\varphi + e);$$

daraus folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2c}{p}\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2c}{p}\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}$$

und nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2c}{r^2};$$

folglich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4c^2}{p}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4c^2}{p}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2}.$$

Da die Coordinatenaxen rechtwinklig sind, so stellen diese Grössen die Projectionen der Beschleunigung erster Ordnung $\overline{v_1}$ auf die Coordinatenaxen dar, d. h.

$$v_1\cos(v_1 x) = -\frac{4c^2}{p}\frac{\cos\varphi}{r^2}, \quad v_1\cos(v_1 y) = -\frac{4c^2}{p}\frac{\sin\varphi}{r^2};$$

folglich ist:

$$v_1 = \frac{4c^2}{p}\frac{1}{r^2},$$

$$\cos(v_1 x) = -\cos\varphi, \quad \cos(v_1 y) = -\sin\varphi.$$

Man sieht hieraus, dass *bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne die Beschleunigung erster Ordnung dem Quadrat des Radiusvectors des Planeten umgekehrt proportional und längs dieses Radiusvectors im Sinne nach der Sonne zu gerichtet ist.* Es ist dies das von Newton entdeckte Bewegungsgesetz.

17. Wenn ein im Raume sich bewegender Punkt durch die geradlinigen, den drei Axen Ox, Oy, Oz parallelen Coordinaten x, y, z bestimmt wird, so sind die Coordinaten des den Hodographen der Geschwindigkeit beschreibenden Punktes μ:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \; y' = \frac{dy}{dt}, \; z' = \frac{dz}{dt};$$

folglich sind die Coordinaten des den Hodographen der Beschleunigung erster Ordnung $\overline{v_1}$ beschreibenden Punktes

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \; \frac{d^2y}{dt^2}, \; \frac{d^2z}{dt^2},$$

und es sind überhaupt die Derivirten

$$\frac{d^nx}{dt^n}, \; \frac{d^ny}{dt^n}, \; \frac{d^nz}{dt^n}$$

die Coordinaten des den Hodographen der Beschleunigung $\bar{v}_{n-1}$ beschreibenden Punktes; zugleich stellen sie die den Coordinatenaxen parallelen Componenten dieser Beschleunigung dar.

Für die Bewegung (§. 9.), wo die Coordinaten des beweglichen Punktes durch die Functionen ausgedrückt waren:

$$x = \alpha \cos(kt) + \alpha' \sin(kt)$$
$$y = \beta \cos(kt) + \beta' \sin(kt)$$
$$z = \gamma \cos(kt) + \gamma' \sin(kt),$$

hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2[\alpha\cos(kt) + \alpha'\sin(kt)] = -k^2x, \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y, \frac{d^2z}{dt^2} = -k^2z;$$

folglich ist:

$$v_1 = k^2r,$$

$$\cos(v_1x) = -\frac{x}{r}, \cos(v_1y) = -\frac{y}{r}, \cos(v_1z) = -\frac{z}{r}.$$

Man sieht daraus, dass *die Beschleunigung erster Ordnung der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte der von ihm beschriebenen Ellipse direct proportional und dem Sinne nach dem Mittelpunkte der Ellipse zugewandt ist.*

Ueberhaupt hat man:

$$\frac{d^{2n+1}x}{dt^{2n+1}} = (-k^2)^n \frac{dx}{dt}, \frac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-k^2)^n x,$$

$$\frac{d^{2n+1}y}{dt^{2n+1}} = (-k^2)^n \frac{dy}{dt}, \frac{d^{1n}y}{dt^{2n}} = (-k^2)^n y,$$

$$\frac{d^{2n+1}z}{dt^{2n+1}} = (-k^2)^n \frac{dz}{dt}, \frac{d^{2n}z}{dt^{2n}} = (-k^2)^n z,$$

folglich ist:

$$\bar{v}_{2n} = \overline{(-1)^n k^{2n} v}, \bar{v}_{2n+1} = \overline{(-1)^n k^{2n} r}.$$

III. Capitel.

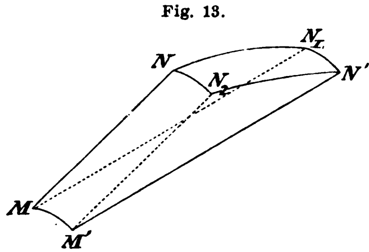
Abhängigkeit der geometrischen Derivirten einer beliebigen geometrischen Function von den Geschwindigkeiten der Endpunkte dieser Function. — Folgerungen und Anwendungen.

18. *Lehrsatz. Wenn nicht nur der Anfangspunkt, sondern auch der Endpunkt der geometrischen Function $\bar{u}$ in Bewegung ist, so ist die geometrische Derivirte erster Ordnung $\bar{u}_1$ die geometrische*

Differenz zwischen der Geschwindigkeit des Endpunktes, und der des Anfangspunktes.

Beweis. Die Strecke MN (Fig. 13) stelle die Function $\overline{u}$ zur Zeit t dar, so dass M der Anfangs- und N der Endpunkt von $\overline{u}$ ist; $M'N'$ sei ihre Lage zur Zeit $t + \tau$, MN_1 eine Strecke, die während der Zeit τ der $M'N'$, und $M'N_2$ eine Strecke, die der MN geometrisch gleich bleibt. Die Punkte M, N, N_1, N_2 beschreiben während der Zeit τ die Linien MM', NN', NN_1 und NN_2; dabei ist die Geschwindigkeit der Bewegung von N zur Zeit t aus der Geschwindigkeit der Bewegung von N_1 und der von N_2 zusammengesetzt. Die erste dieser Geschwindigkeitscomponenten ist die geometrische Derivirte von $\overline{u}$, d. h. $\overline{u}_1$, und die zweite ist der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes M auf MM' gleich*); folglich hat man, wenn man mit $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ die Geschwindigkeiten auf MM' und NN' bezeichnet:

Fig. 13.



$$\overline{\beta} = \overline{u}_1 + \overline{\alpha},$$

woraus folgt

$$\overline{u}_1 = \overline{\beta} - \overline{\alpha},$$

was zu beweisen war.

Folgerung 1. Ist $\overline{\beta} = 0$, so folgt $\overline{u}_1 = -\overline{\alpha}$; also ist *die geometrische Derivirte einer Function, bei der die Geschwindigkeit des Endpunktes gleich Null ist, der Geschwindigkeit des Anfangspunktes gleich und entgegengesetzt.* Da diese Geschwindigkeit die geometrische Derivirte einer dem $\overline{u}$ gleichen und entgegengesetzten Function ist, so *haben zwei gleiche und entgegengesetzte Functionen gleiche und entgegengesetzte geometrische Derivirte, d. h.* $-\overline{u}_1$ *ist die geometrische Derivirte von* $-\overline{u}$.

*) Die Sehnen der Bogen NN_2 und MM' sind während der Zeit τ geometrisch gleich und daher sind auch die auf diesen Sehnen aufgetragenen mittleren Geschwindigkeiten $\frac{NN_2}{\tau}$ und $\frac{MM'}{\tau}$ und die Grenzen, denen sie sich mit der Abnahme von τ nähern, geometrisch gleich.

die Coordinaten des den Hodographen der Beschleunigung $\overline{v}_{n-1}$ beschreibenden Punktes; zugleich stellen sie die den Coordinatenaxen parallelen Componenten dieser Beschleunigung dar.

Für die Bewegung (§. 9.), wo die Coordinaten des beweglichen Punktes durch die Functionen ausgedrückt waren:

$$x = \alpha \cos(kt) + \alpha' \sin(kt)$$
$$y = \beta \cos(kt) + \beta' \sin(kt)$$
$$z = \gamma \cos(kt) + \gamma' \sin(kt),$$

hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 [\alpha \cos(kt) + \alpha' \sin(kt)] = -k^2 x, \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y, \frac{d^2z}{dt^2} = -k^2 z;$$

folglich ist:

$$v_1 = k^2 r,$$

$$\cos(v_1 x) = -\frac{x}{r}, \cos(v_1 y) = -\frac{y}{r}, \cos(v_1 z) = -\frac{z}{r}.$$

Man sieht daraus, dass *die Beschleunigung erster Ordnung der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte der von ihm beschriebenen Ellipse direct proportional und dem Sinne nach dem Mittelpunkte der Ellipse zugewandt ist.*

Ueberhaupt hat man:

$$\frac{d^{2n+1}x}{dt^{2n+1}} = (-k^2)^n \frac{dx}{dt}, \frac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-k^2)^n x,$$

$$\frac{d^{2n+1}y}{dt^{2n+1}} = (-k^2)^n \frac{dy}{dt}, \frac{d^{1n}y}{dt^{2n}} = (-k^2)^n y,$$

$$\frac{d^{2n+1}z}{dt^{2n+1}} = (-k^2)^n \frac{dz}{dt}, \frac{d^{2n}z}{dt^{2n}} = (-k^2)^n z,$$

folglich ist:

$$\overline{v}_{2n} = \overline{(-1)^n k^{2n} v}, \overline{v}_{2n+1} = \overline{(-1)^n k^{2n} r}.$$

III. Capitel.

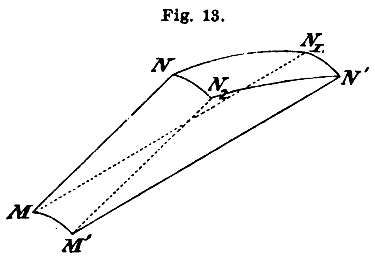
Abhängigkeit der geometrischen Derivirten einer beliebigen geometrischen Function von den Geschwindigkeiten der Endpunkte dieser Function. — Folgerungen und Anwendungen.

18. *Lehrsatz. Wenn nicht nur der Anfangspunkt, sondern auch der Endpunkt der geometrischen Function $\overline{u}$ in Bewegung ist, so ist die geometrische Derivirte erster Ordnung $\overline{u}_1$ die geometrische*

Differenz zwischen der Geschwindigkeit des Endpunktes, und der des Anfangspunktes.

Beweis. Die Strecke MN (Fig. 13) stelle die Function $\overline{u}$ zur Zeit t dar, so dass M der Anfangs- und N der Endpunkt von $\overline{u}$ ist; $M'N'$ sei ihre Lage zur Zeit $t + \tau$, MN_1 eine Strecke, die während der Zeit τ der $M'N'$, und $M'N_2$ eine Strecke, die der MN geometrisch gleich bleibt. Die Punkte M, N, N_1, N_2 beschreiben während der Zeit τ die Linien MM', NN', NN_1 und NN_2; dabei ist die Geschwindigkeit der Bewegung von N zur Zeit t aus der Geschwindigkeit der Bewegung von N_1 und der von N_2 zusammengesetzt. Die erste dieser Geschwindigkeitscomponenten ist die geometrische Derivirte von $\overline{u}$, d. h. $\overline{u}_1$, und die zweite ist der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes M auf MM' gleich*); folglich hat man, wenn man mit $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ die Geschwindigkeiten auf MM' und NN' bezeichnet:

Fig. 13.



$$\overline{\beta} = \overline{u}_1 + \overline{\alpha},$$

woraus folgt

$$\overline{u}_1 = \overline{\beta} - \overline{\alpha},$$

was zu beweisen war.

Folgerung 1. Ist $\overline{\beta} = 0$, so folgt $\overline{u}_1 = -\overline{\alpha}$; also ist *die geometrische Derivirte einer Function, bei der die Geschwindigkeit des Endpunktes gleich Null ist, der Geschwindigkeit des Anfangspunktes gleich und entgegengesetzt.* Da diese Geschwindigkeit die geometrische Derivirte einer dem $\overline{u}$ gleichen und entgegengesetzten Function ist, so *haben zwei gleiche und entgegengesetzte Functionen gleiche und entgegengesetzte geometrische Derivirte, d. h.* $-\overline{u}_1$ *ist die geometrische Derivirte von* $-\overline{u}$.

*) Die Sehnen der Bogen NN_2 und MM' sind während der Zeit τ geometrisch gleich und daher sind auch die auf diesen Sehnen aufgetragenen mittleren Geschwindigkeiten $\frac{NN_2}{\tau}$ und $\frac{MM'}{\tau}$ und die Grenzen, denen sie sich mit der Abnahme von τ nähern, geometrisch gleich.

Folgerung 2. Berührt die Gerade $\bar{u}$ die Bahn MM' des Anfangspunktes, so hat die Geschwindigkeit $\bar{\alpha}$ die Richtung von $\bar{u}$, und die Geschwindigkeit $\bar{\beta}$ muss als die geometrische Summe $\bar{\alpha} + \bar{u}_1$ in der Ebene der Geraden $\bar{u}$ und $\bar{u}_1$ liegen. Die Projection von $\bar{\beta}$ auf eine Senkrechte zur Geraden $\bar{u}$ ist der Projection von $\bar{u}_1$ allein auf diese Senkrechte gleich, weil die Projection von $\bar{\alpha}$ darauf gleich Null ist. Folglich ist:

$$\beta \sin(\beta u) = u_1 \sin(u_1 u);$$

nun ist aber $u_1 \sin(u_1 u)$ die partielle Derivirte der Function $\bar{u}$ nach der Richtung und, wie wir oben gesehen haben, gleich der Winkelderivirten Θ, multiplicirt mit u; also ist

$$\beta \sin(\beta u) = \Theta u. \tag{1}$$

Wenn die Richtung von $\bar{u}$ die von dem Anfangspunkt von MM' beschriebene Bahn nicht nur zur Zeit t, sondern auch zur Zeit $t + \tau$ berührt, (τ unendlich klein vorausgesetzt,) so ist die Ebene der Geraden $\bar{u}$ und $\bar{u}_1$ als Grenze der durch zwei benachbarte Tangenten gehenden Ebene die Ebene der ersten Krümmung der Bahn MM' im Punkte M. Das Winkeldifferential Θdt der Function u ist der Contingenzwinkel der Curve MM' im Punkte M; bezeichnet man also mit ϱ den entsprechenden Radius der ersten Krümmung, so hat man $\Theta = \frac{\alpha}{\varrho}$, $\sin(\beta u) = \pm \cos(\beta \varrho)$, und nach Formel (1) ergiebt sich:

$$\beta \cos(\beta \varrho) = \pm \frac{\alpha u}{\varrho}. \tag{2}$$

Die Formel (1) bezieht sich auch auf den Fall, dass $\bar{\alpha} = 0$, d. h. dass der Anfangspunkt M der Function $\bar{u}$ unbeweglich ist, oder dass er in der unendlich kleinen Zeit τ eine unendlich kleine Strecke MM' höherer Ordnung zurücklegt.

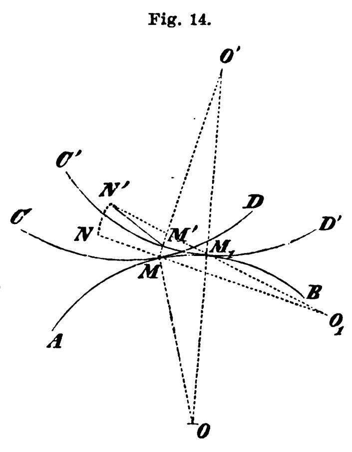
19. Betrachten wir einige Anwendungen der Formel (1).

1. Angenommen, es sei $\alpha = 0$ und die Länge von $\bar{u}$ ändere sich nicht; dann ist $\bar{\beta} = \bar{u}_1$ und $\frac{du}{dt} = \beta \cos(\beta u) = 0$; folglich ist $\bar{\beta}$ senkrecht zu $\bar{u}$, d. h. die Richtung von $\bar{u}$ ist

normal zur Bahn ihres Endpunktes. Also: *wenn éine gerade Strecke von unveränderlicher Länge sich so bewegt, dass ihr Anfangspunkt fest bleibt, oder in einem unendlich kleinen Zeittheilchen eine unendlich kleine Wegstrecke von höherer Ordnung beschreibt, so ist die Richtung dieser Geraden normal zu der Bahn ihres Endpunktes.*

Hieraus ergiebt sich eine einfache Methode zur Construction der Normalen an die Curven, welche man *Rouletten* nennt. Die unveränderliche Figur $CMDN$ (Fig. 14) bewege sich so, dass die Linie CD, die ihr angehört, auf der festen Curve AB ohne zu gleiten hinrollt, wie ein auf dem Wege rollendes Rad; dann beschreibt ein der rollenden Figur angehöriger Punkt N eine Linie, die man im allgemeinen Roulette nennt. Auf Grund des oben bewiesenen Satzes sieht man leicht, dass die vom Berührungspunkte M der Linien CD und AB ausgehende Gerade MN die Normale der von diesem Punkte beschriebenen Roulette ist. Wenn sich nämlich die Figur $CMDN$ in der unendlich kleinen Zeit τ so verschiebt, dass sie die AB im Punkte M_1 berührt, so nimmt die Strecke MN, ohne ihre Länge zu ändern, die Lage $M'N'$ an. Dabei durchläuft M die Strecke MM', die eine unendlich kleine Grösse von höherer Ordnung ist, als MM_1 und τ; denn in dem aus den Sehnen MM', MM_1 und $M'M_1$ zusammengesetzten Dreiecke MM_1M' ist der Winkel MM_1M' unendlich klein, und der Winkel $MM'M_1$ unterscheidet sich wegen der Gleichheit der Bogen MM_1 und $M'M_1$ unendlich wenig von 90^0; infolge dessen ist das Verhältniss $\frac{MM'}{MM_1}$ eine unendlich kleine Grösse.

Fig. 14.



Hieraus folgen als Specialfälle die bekannten Methoden für die Construction der Tangente an die Cykloide und die Epicykloiden.

Die Geschwindigkeit $\bar{\beta}$ der Bewegung des die Roulette beschreibenden Punktes N ist die geometrische Derivirte der Strecke MN, die ihre Länge nicht ändert, und sie reducirt sich daher auf die partielle Derivirte Θu nach der Richtung, wenn Θ die Winkelderivirte bezeichnet, die man folgendermassen finden kann.

Aus der Definition der Winkelderivirten folgt, dass Θ die Grenze ist, der sich das Verhältniss des von den Geraden MN und $M'N'$ gebildeten Winkels zu τ nähert, wenn τ gegen Null convergirt; der Winkel zwischen MN und $M'N'$ ist aber, infolge der Unveränderlichkeit der rollenden Figur, gleich dem Winkel, welchen die Normale zu CD im Punkte M mit der Normale zu $C'D'$ im Punkte M' bildet; nun ist dieser Winkel gleich der Summe der Winkel MOM_1 und $M'O'M_1$, welche diese Normalen mit der gemeinschaftlichen Normale der Curven AB und $C'D'$ im Punkte M_1 einschliessen; folglich ist

$$\Theta = \lim\left(\frac{MOM_1}{\tau} + \frac{M'O'M_1}{\tau}\right)$$

oder

$$\Theta = \lim\left(\frac{MOM_1}{MM_1} \cdot \frac{MM_1}{\tau} + \frac{M'O'M_1}{M'M_1} \cdot \frac{M'M_1}{\tau}\right).$$

Bezeichnet man mit R und R' die Krümmungsradien der Curven AB und $C'D'$ in den Punkten M und M', so hat man

$$\lim \frac{MOM_1}{MM_1} = \frac{1}{R}, \quad \lim \frac{M'O'M_1}{M'M_1} = \frac{1}{R'},$$

und da nach der Natur des Rollens die Bogen MM_1 und $M'M_1$ einander gleich sind, so ist $\frac{MM_1}{\tau} = \frac{M'M_1}{\tau}$. Die Grenze dieses Verhältnisses ist aber die Geschwindigkeit des Punktes M bei seiner Bewegung auf der festen Linie AB. Bezeichnet man sie mit γ, so folgt

$$\Theta = \gamma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \tag{3}$$

Diese Formel geht jedoch in

$$\Theta = \gamma\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \text{ oder } \Theta = \gamma\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$

über, wenn die Punkte O und O', die in der Grenze die Krümmungsmittelpunkte der Curven AB und CD im Punkte

M sind, sich auf derselben Seite von AB befinden. Die erste dieser beiden Formeln bezieht sich auf den Fall $R < R'$, die zweite gilt für $R > R'$. Man kann sich mit der Formel (3) begnügen, wenn man im ersten Falle R', im zweiten R als eine negative Grösse ansieht. Mit Hilfe des Ausdrucks (3) ergiebt sich die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes N auf der Roulette:

$$\beta = u\gamma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \tag{4}$$

Die letzte Formel kann zur Bestimmung des Krümmungsradius ϱ der Roulette dienen. Betrachten wir zu diesem Zweck die Strecke MN als eine geometrische Function, die ihre Länge derart ändert, dass ihr Anfangspunkt M während der Zeit τ die Strecke MM_1 beschreibt und ihr Endpunkt die Strecke NN'. In diesem Falle ist die geometrische Derivirte $\overline{u}_1$ die Differenz der Geschwindigkeiten $\overline{\beta}$ und $\overline{\gamma}$, und wenn man mit Θ' die Winkelderivirte der Function $\overline{MN} = \overline{u}$ bezeichnet, so ist

$$\Theta' u = \beta - \gamma \sin(u\gamma). \tag{5}$$

Da $\overline{u}$ im Punkte N zur Roulette normal ist, so fällt seine Richtung mit der des Krümmungsradius ϱ dieser Curve zusammen, und es ist daher Θ' die Winkelderivirte dieses Radius; folglich ist $\Theta' = \frac{\beta}{\varrho}$. Dadurch geht die Formel (5) über in die folgende:

$$\frac{\beta}{\varrho} u = \beta - \gamma \sin(u\gamma).$$

Hier ist der Winkel $(u\gamma)$ gleich einem Rechten, vermehrt um den Winkel, welchen die Grade MN mit der Normalen zu AB im Punkte M bildet; bezeichnet man daher diesen letzteren durch i, so hat man $\sin(u\gamma) = \cos i$, also

$$\frac{\beta}{\varrho} u = \beta - \gamma \cos i;$$

daraus folgt

$$\frac{\varrho}{\varrho - u} = \frac{\beta}{\gamma \cos i};$$

und wenn man statt β seinen Werth (4) einsetzt, erhält man die Formel:

$$\frac{\varrho}{\varrho - u} = \frac{u}{\cos i}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right), \qquad (6)$$

mit deren Hilfe ϱ bestimmt werden kann.

Für die *Cykloide* ist AB eine Gerade und CD eine Kreislinie, also $R = \infty$, und R' ist der Radius des rollenden Kreises CD. Man sieht leicht, dass in diesem Falle $2R' \cos i = u$ ist; dadurch wird die Formel (6):

$$\frac{\varrho}{\varrho - u} = 2, \text{ also } \varrho = 2u,$$

d. h. *der Krümmungsradius der Cykloide ist doppelt so gross als die Normale MN.*

Jedesmal wenn die rollende Linie CD ein Kreis ist und der Punkt N sich auf dessen Peripherie befindet, hat man $2R' \cos i = u$ und daher

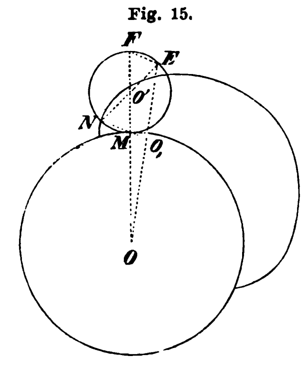
$$\frac{\varrho}{\varrho - u} = \frac{2(R + R')}{R};$$

woraus folgt:

$$\frac{u}{\varrho - u} = \frac{R + 2R'}{R}.$$

Aus dieser Formel folgt die bekannte Methode von Savary zur Construction des Krümmungsradius der Epicykloide. Die Epicykloide möge (Fig. 15) durch die Bewegung des Punktes N der Peripherie des Kreises O' entstehen, welcher auf der Peripherie des Kreises O rollt. Ziehen wir durch N den Durchmesser NE des rollenden Kreises, ferner durch den Punkt E und den Mittelpunkt O des festen Kreises eine Gerade; der Schnittpunkt O_1 der Geraden OE und MN ist der Krümmungsmittelpunkt der Epicykloide. Verlängert man nämlich OO' bis zum Schnittpunkt F mit dem rollenden Kreise und zieht man die Sehne FE, so ist, wegen des Parallelismus von FE und MN

Fig. 15.



$$FE : MO_1 = OF : MO = R + 2R' : R,$$

und da $FE = MN = u$ ist, so folgt

$$u : MO_1 = R + 2R' : R;$$

mithin

$$MO_1 = \varrho - u \text{ und } \varrho = MO_1 + MN = O_1N.$$

2. Hat die Geschwindigkeit $\bar{\alpha}$ des Anfangspunktes der Strecke $\bar{u}$ die Richtung von $\bar{u}$, so ist nach Formel (1)

$$\beta \sin(\beta u) = \Theta u.$$

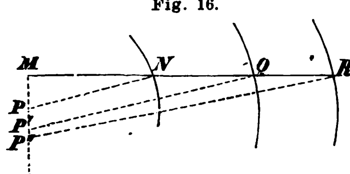
Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung mit $\cot(\beta u)$, so folgt die Formel

$$\beta \cos(\beta u) = \Theta u \cot(\beta u), \tag{7}$$

aus der sich bemerkenswerthe Folgerungen ableiten lassen.

Errichtet man in der Ebene der Geraden $\bar{u}$ und $\bar{\beta}$ (Fig. 16) im Anfangspunkt M der Strecke $\overline{MN} = \bar{u}$ die Senkrechte auf MN und die Normale zur Bahn des Punktes N, so erhält man als Schnittpunkt dieser beiden Geraden den Punkt P und das rechtwinkelige Dreieck NMP, aus welchem folgt

Fig. 16.



$$u \cot(\beta u) = \pm MN \tan(MNP) = \pm MP;$$

folglich ist:

$$\beta \cos(\beta u) = \pm \Theta . MP. \tag{8}$$

Es sei ferner $\bar{\beta}'$ die Geschwindigkeit eines beliebigen auf der Geraden MN angenommenen Punktes Q; dieselbe liegt ebenso wie $\bar{\beta}$ in der Ebene MNP der Geraden $\bar{u}$ und $\bar{u}_1$ und man kann daher auf sie die Formel (8) anwenden; wenn also P' der Schnittpunkt von MP mit der Normale der Bahn des Punktes Q ist, so ist

$$\beta' \cos(\beta' u) = \pm \Theta . MP'.$$

Subtrahirt man hievon die Gleichung (8), so folgt:

$$\beta' \cos(\beta' u) - \beta \cos(\beta u) = \pm \Theta . PP'.$$

Da $\bar{\beta}' - \bar{\beta}$ die geometrische Derivirte der Function $\overline{NQ}$ ist, so ist die linke Seite dieser Gleichung der Projection dieser geometrischen Derivirten auf NQ gleich; folglich ist

$$\frac{dNQ}{dt} = \pm \Theta . PP'. \tag{9}$$

Diese von Mannheim aufgestellte Formel führt zur Lösung vieler bemerkenswerther Probleme, die sich auf die Construction von Tangenten und Krümmungsradien krummer Linien beziehen.

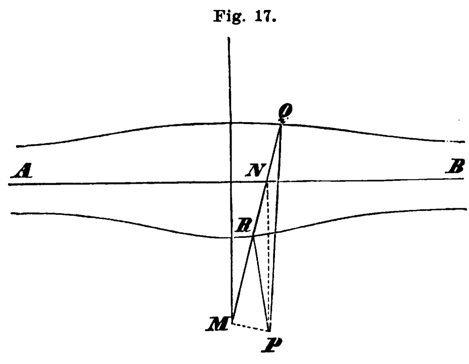
Wenn sich bei der Bewegung von MN die Länge des Abschnitts NQ nicht ändert, so ist $\frac{dNQ}{dt} = 0$, und nach Formel (9) hat man $PP' = 0$; also: *wenn eine Gerade NQ sich bewegt, ohne ihre Länge zu ändern und dabei im Punkte M eine gegebene Curve berührt, oder durch den Punkt M, dessen Geschwindigkeit gleich Null ist, hindurchgeht, so schneiden sich die Normalen der Bahnen der Punkte N und Q, die in der Ebene der Geschwindigkeiten dieser Punkte gelegen sind, in einem Punkte P, welcher auf dem in derselben Ebene auf MN im Punkte M errichteten Perpendikel liegt.*

Aendert sich der Abschnitt QR auch nicht, so geht die in der Ebene MNP durch R gelegte Normale der Bahn des Punktes R auch durch P.

Aus dieser Eigenschaft der Normalen der Bahnen der der Punkte einer unveränderlichen geraden Strecke ergiebt sich eine sehr einfache Methode zur Construction der Normalen an einige Curven.

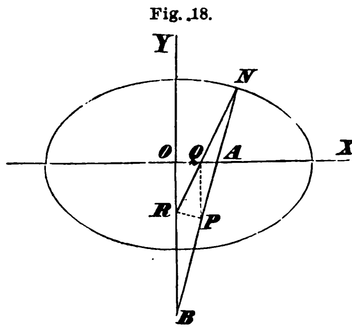
a) *Normale an die Conchoide.* Die Conchoide entsteht bekanntlich durch die Bewegung des Endpunktes Q einer Strecke NQ (Fig. 17) von unveränderlicher Länge, deren Richtung durch einen festen Punkt M hindurchgeht, während ihr Anfangspunkt N eine Gerade AB beschreibt. Zieht man NP senkrecht zu AB bis zum Schnitt mit einem in M auf MQ errichteten Perpendikel, so erhält man den Punkt P, durch den, gemäss dem oben bewiesenen, die Normale des Punktes Q der Conchoide gehen muss; also ist PQ die gesuchte Normale. Der Endpunkt R der der NQ gleichen und entgegengesetzten Strecke NR beschreibt den andern Ast der Conchoide, und die Gerade RP ist die Normale dieses Astes im Punkte R.

Fig. 17.



b) *Normale an die Ellipse* (Fig. 18). Es seien Ox, Oy die Richtungen der grossen und kleinen Axe der Ellipse, a und b die Grössen der entsprechenden Halbaxen; $NR = a$, $NQ = b$ die unveränderlichen Abschnitte einer Geraden, die sich so bewegt, dass R auf der Axe Oy bleibt und Q auf der Axe Ox. Es ist aus der analytischen Geometrie bekannt, dass bei dieser Bewegung der Punkt N die Ellipse beschreibt. Um die Normale an die Ellipse im Punkte N zu construiren, errichte man in R und Q Senkrechte zu den Bahnen Oy und Ox dieser Punkte, verzeichne ihren Durchschnittspunkt P und ziehe die Gerade PN.

Fig. 18.



Die Normale an die Ellipse hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass das Verhältniss $AN:BN$ ihrer Abschnitte constant und gleich dem Verhältniss der Quadrate der Halbaxen $b^2:a^2$ ist. Die ähnlichen Dreiecke ANQ und PNR geben nämlich die Proportion:

$$AN:PN = b:a,$$

und die ähnlichen Dreiecke BRN und PQN liefern die weitere Proportion

$$PN:BN = b:a;$$

durch Combination beider erhält man:

$$AN:BN = b^2:a^2.$$

Aus der Formel (9) ergeben sich noch andere bemerkenswerthe Folgerungen. Vergl. *Mannheim*, Construction de la tangente du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques (Nouv. Annales de Mathématiques, T. XVI, p. 322 und Construction du centre de courbure de l'épicycloïde (Nouv. Ann. de Math., T. XVIII, p. 371), sowie Note de Géométrie infinitésimale (Annali di Matematica publ. da Tortolini, T. II, p. 208). *Bour*: Cours de Mécanique et de machines, Cinématique, p. 52.

20. Benützen wir noch die Formel (2) §. 18. zur Lösung des folgenden Problems:

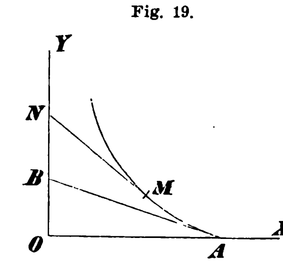
Die Punkte N und M haben jeder eine gleichförmige Bewegung, der erstere auf einer geraden Linie, der zweite auf einer Curve, welche die Gerade MN im Punkte M berührt. Es soll die Gleichung dieser Curve und die Zeit gefunden werden, welche einer gegebenen Lage der Punkte M und N entspricht.

Zunächst bemerken wir, dass die gesuchte Curve mit allen ihren Punkten in einer Ebene liegt, die durch die vom Punkte N beschriebene Gerade hindurchgeht. Denn durch diese Gerade muss die Ebene der

ersten Krümmung der gesuchten Curve für jede Lage des Punktes M hindurchgehen.*)

Es sei (Fig. 19) A die Anfangslage des Punktes M, B die Anfangslage des Punktes N, OA senkrecht zu BN, $OA = m$, $OB = n$, $AB = c$, $\overline{MN} = \overline{u}$, $\overline{\alpha}$ die Geschwindigkeit des Punktes M, $\overline{\beta}$ die des Punktes N, $\frac{\beta}{\alpha} = k$, $AM = s$ endlich x und y die Coordinaten des Punktes M, bezogen auf OA und OB als Axen.

Fig. 19.



Die Bewegung der Strecke $\overline{MN} = \overline{u}$ genügt der für die Formel (2) §. 18. erforderlichen Bedingung, dass nämlich die Geschwindigkeit $\overline{\alpha}$ ihres Anfangspunktes die Richtung von $\overline{u}$ habe. Diese Formel giebt:

$$u = k\varrho \cos(\varrho y) = -k\varrho \cos(ux); \qquad \text{(a)}$$

man sieht leicht, dass

$$u = -\frac{x}{\cos(ux)} = -\frac{x\,ds}{dx}$$

$$\varrho \cos(ux) = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{ds^2}{d^2y},$$

und daher geht die Gleichung (a) über in die folgende:

$$x\frac{ds}{dx} = -k\frac{ds^2}{d^2y};$$

diese liefert, wenn man $\frac{dy}{dx} = y'$ setzt und beachtet, dass $ds = -\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ist, die Differenzialgleichung der gesuchten Curve:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{k\,dx}{x}.$$

Die Integration ergiebt:

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = C x^k,$$

wo C eine Constante ist, die man aus der Bedingung bestimmen kann, dass $y' = -\frac{n}{m}$ werden muss, wenn $x = m$ wird; also

$$-\frac{n}{m} + \sqrt{1+\frac{n^2}{m^2}} = Cm^k \text{ oder } \frac{c-n}{m} = Cm^k;$$

folglich wird

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = \frac{c-n}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^k;$$

*) Die Ebene der ersten Krümmung ist die Grenze der durch zwei unendlich nahe Tangenten gelegten Ebene, und da diese Tangenten die vom Punkte N beschriebene Gerade treffen, so muss ihre Ebene und die Grenze dieser Ebene durch dieselbe Gerade hindurchgehen.

daraus folgt:

$$y = \tfrac{1}{2}\left[\frac{c-n}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^{k} - \frac{c+n}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^{-k}\right], \tag{b}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{c-n}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^{k} + \frac{c+n}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^{-k}\right]. \tag{c}$$

Dabei können drei Fälle eintreten: $k < 1, k > 1, k = 1$. Im ersten und zweiten Falle giebt das Integral des Ausdrucks (b) die Gleichung der Bahn in der Form

$$y = \tfrac{1}{2}\left[\frac{c-n}{1+k}\left(\frac{x}{m}\right)^{1+k} - \frac{c+n}{1-k}\left(\frac{x}{m}\right)^{1-k}\right] + \frac{n+ck}{1-k^2} \tag{d}$$

und im dritten Falle:

$$y = \tfrac{1}{2}\left[\frac{c-n}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^{2} - (c+n)\log\left(\frac{x}{m}\right)\right] - \frac{c-n}{4}.$$

Da

$$\alpha = \frac{sd}{dt} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}.dx}{dt}$$

ist, so wird

$$dt = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+y'^2}.dx,$$

und nach (c)

$$dt = -\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{c-n}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^{k} + \frac{c+n}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^{-k}\right]dx,$$

also im Falle $k < 1$ und $k > 1$:

$$t = \frac{c+kn}{\alpha(1-k^2)} - \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{c-n}{1+k}\left(\frac{x}{m}\right)^{1+k} + \frac{c+n}{1-k}\left(\frac{x}{m}\right)^{1-k}\right] \tag{e}$$

und im Falle $k = 1$:

$$t = \frac{c-n}{4\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{c-n}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^{2} + (c+n)\log\left(\frac{x}{m}\right)\right].$$

Im Falle $k < 1$ kann der Punkt M den Punkt N einholen. Um die Ordinate des Punktes zu erhalten, wo M und N zusammenfallen, so wie die Zeit, wann dies eintritt, muss man in den Formeln (d) und (e) $x = 0$ setzen; dadurch erhält man:

$$y = \frac{n+ck}{1-k^2}, \quad t = \frac{c+kn}{\alpha(1-k^2)}.$$

Im Falle $k > 1$ und $k = 1$ findet man $y = \infty$ und $t = \infty$ für $x = 0$.

Die vorstehende Aufgabe heisst die Aufgabe der *Hasen-* oder *Fluchtlinie.* Diese Curve stellt den Lauf eines Schiffes M dar, welches ein in der Geraden Oy fahrende Schiff N verfolgt. Bouguer gab eine Lösung der Aufgabe in den Mémoires de l'Académie des sciences de Paris für das Jahr 1732. Ebenda findet man auch die Lösung von Maupertuis, der die Aufgabe auch auf den Fall ausgedehnt hat, dass die Bahn des Schiffes N eine krumme Linie ist.

IV. Capitel.

Differentiation geometrischer Summen und geometrischer Producte. — Folgerungen, die sich auf die Projectionen von geometrischen Derivirten und auf Beschleunigungen beziehen.

21. *Lehrsatz 1. Die geometrische Derivirte einer geometrischen Summe* $\overline{s}$ *mehrerer Summanden* $\overline{u}, \overline{u'}, \ldots \overline{u^{(m)}}$ *ist die geometrische Summe der geometrischen Derivirten der einzelnen Summanden.*

Beweis. Bezeichnen wir mit $\overline{s}$ die Schlusslinie eines Polygonalzuges, der aus den Seiten $\overline{u}, \overline{u'}, \overline{u''}, \ldots \overline{u^{(m)}}$ derart zusammengesetzt ist, dass der Endpunkt einer Seite jedesmal in den Anfangspunkt der folgenden fällt; ferner mit $\overline{\alpha}, \overline{\alpha'}, \overline{\alpha''}, .. \overline{\alpha^{(m)}}$ die Geschwindigkeiten der Anfangspunkte der Seiten $\overline{u}, \overline{u'}, \overline{u''}, \ldots \overline{u^{(m)}}$ und mit β die Geschwindigkeit des Endpunktes der letzten Seite $\overline{u^{(m)}}$. Auf Grund des Satzes im §. 18. hat man dann:

$$\overline{u_1} = \overline{\alpha'} - \overline{\alpha}, \ \overline{u_1'} = \overline{\alpha''} - \overline{\alpha'}, \ldots \overline{u_1^{(m)}} = \overline{\beta} - \overline{\alpha^{(m)}},$$

woraus folgt:

$$\overline{u_1} + \overline{u_1'} + \ldots + \overline{u_1^{(m)}} = \overline{\beta} - \overline{\alpha}.$$

Da aber $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ die Geschwindigkeiten des Anfangs- und Endpunktes der Schlusslinie $\overline{s}$ sind, so ist:

$$\overline{\beta} - \overline{\alpha} = \overline{s_1},$$

folglich

$$\overline{s_1} = \overline{u_1} + \overline{u_1'} + \ldots + \overline{u_1^{(m)}}.$$

Folgerung 1. Auf Grund des eben bewiesenen Satzes findet man, dass überhaupt

$$\overline{s_n} = \overline{u_n} + \overline{u'_n} + \ldots + \overline{u_n^{(m)}},$$

d. h. dass *die geometricshe Derivirte beliebig hoher Ordnung von einer geometrischen Summe gleich ist der geometrischen Summe der geometrischen Derivirten derselben Ordnung von den einzelnen Summanden.*

Folgerung 2. Die geometrische Derivirte beliebiger Ordnung von einer geometrischen Differenz $\overline{u} = \overline{v} - \overline{w}$ *ist die geometrische*

Differenz der geometrischen Derivirten derselben Ordnung von dem Minuendus und Subtrahendus, d. h.

$$\overline{u_n} = \overline{v_n} - \overline{w_n}.$$

Folgerung 3. Die geometrische Derivirte n^{ter} Ordnung von einer beliebigen geometrischen Function $\overline{u}$ ist die geometrische Differenz der geometrischen Derivirten $(n-1)^{ter}$ Ordnung der Geschwindigkeiten des Endpunktes und des Anfangspunktes. Bezeichnet man nämlich diese Geschwindigkeiten mit $\overline{\beta}$ und $\overline{\alpha}$, so hat man nach dem Satz in §. 18.

$$\overline{u_1} = \overline{\beta} - \overline{\alpha},$$

woraus sich nach Folgerung 2. ergiebt:

$$\overline{u_n} = \overline{\beta_{n-1}} - \overline{\alpha_{n-1}}.$$

22. Der Punkt m bewege sich in einer Ebene und sei durch die Polarcoordinaten r und φ bestimmt. Die geometrische Derivirte r_1 des Radiusvectors ist nach §. 13. die geometrische Summe der partiellen Derivirten $\frac{dr}{dt}$, welche die Richtung von r hat, und der partiellen Derivirten $r\frac{d\varphi}{dt}$, die zu r senkrecht und nach der Seite hin gerichtet ist, wohin φ wächst, d. h.:

$$\overline{r_1} = \overline{\frac{dr}{dt}} + \overline{r\frac{d\varphi}{dt}};$$

und nach Lehrsatz (1) ist:

$$\overline{r_2} = \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)_1} + \overline{\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)_1}.$$

Die geometrische Derivirte $\left(\frac{dr}{dt}\right)_1$ ist ihrerseits die Summe der partiellen Derivirten $\frac{d^2r}{dt^2}$, die die Richtung von $\frac{dr}{dt}$, d. h. die von r hat, und der partiellen Derivirten $\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$, die zu r senkrecht nach der Seite hin gerichtet ist, nach welcher φ wächst; ebenso ist die geometrische Derivirte $\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)_1$ wieder die Summe der partiellen Derivirten $\frac{d\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$, die zu r senk-

recht, und der partiellen Derivirten $r\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, die dem r entgegengesetzt gerichtet ist. Die partielle Derivirten $\frac{d^2r}{dt^2}$ und $r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ lassen sich nun zu einer einzigen

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

vereinigen, welche die Richtung von r hat, und die partiellen Derivirten

$$\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \text{ und } \frac{d\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$$

ebenso zu der einen

$$\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}=\frac{1}{r}\cdot\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt},$$

die zu r senkrecht und nach der Seite hin gerichtet ist, wohin φ wächst.

Es ist also

$$\overline{r_2}=\overline{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}+\frac{1}{r}\overline{\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}}.$$

Die geometrische Derivirte $\overline{r_1}$ ist die Geschwindigkeit v der Bewegung des Punktes m, und $\overline{r_2}$ ist die Beschleunigung erster Ordnung v_1 dieser Bewegung; folglich sind die Componenten von $\overline{r_2}$ zugleich die Projectionen der Beschleunigung v_1 auf den Radiusvector und auf die dazu senkrechte Richtung, d. h. es ist

$$v_1\cos(v_1r)=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{a}$$

$$v_1\sin(v_1r)=\frac{1}{r}\cdot\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}. \tag{b}$$

Nehmen wir nun an, der Punkt m bewege sich so, dass *der vom Radiusvector r beschriebene Flächenraum der Zeit proportional wächst,* und es sei c der in der Einheit der Zeit beschriebene Flächenraum.

Dann hat man:

$$\tfrac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}=c \tag{c}$$

und nach Formel (b):

$$v_1 \sin(v_1 r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d(2c)}{dt} = 0.$$

Dies zeigt, dass, *wenn der Radiusvector der Zeit proportionale Flächenräume beschreibt, die Beschleunigung erster Ordnung die Richtung des Radiusvectors hat.*

Die Gleichung (c) giebt $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2c}{r^2}$; daher ist:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{2c}{r^2} = -2c \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -2c \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{4c^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2};$$

nach Formel (a), in der jetzt $\cos(v_1 r) = \pm 1$ ist, erhält man also:

$$\pm v_1 = -\frac{4c^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right]. \tag{d}$$

Diese von Binet herrührende Formel kann dazu dienen, mit Hilfe der Gleichung der Bahn die Beschleunigung v_1 als Function des Radiusvectors darzustellen. Ergiebt sich rechter Hand ein positives Resultat, so hat man links das Zeichen $+$ zu nehmen, d. h. es ist $\cos(v_1 r) = +1$ zu setzen; dann stimmt der Siun der Beschleunigung mit dem des Radiusvectors r überein. Erhält man aber rechts ein negatives Resultat, so ist $\cos(v_1 r) = -1$, und v_1 hat den entgegengesetzten Sinn von r. Es sei z. B. die Bahn ein Kegelschnitt:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\varphi}.$$

Dann ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi}{p},$$

und die Formel (d) giebt:

$$-v_1 = -\frac{4c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2};$$

folglich hat *die Beschleunigung* v_1 *entgegengesetzten Sinn, wie der Radiusvector und ist dem Quadrate des Radiusvectors umgekehrt proportional* (wie schon im §. 6, Beisp. 2. gefunden wurde).

23. Das Product aus zwei Strecken $\overline{u}$, $\overline{v}$ und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels, d. h. die Grösse $uv\cos(uv)$, nennt Resal *ein geometrisches Product* und bezeichnet es mit $\overline{uv}$.*) Man kann mit derartigen Producten in ganz analoger Weise rechnen, wie mit den gewöhnlichen Producten.

Lehrsatz 2. Das geometrische Product zweier geometrischen Summen ist gleich der algebraischen Summe aller geometrischen Producte der Glieder der einen Summe in die der andern.

Beweis. Es sei $\overline{s} = \overline{u} + \overline{v}$, und $\overline{a}$ sei eine beliebige Strecke von bekannter Länge und Richtung.
Da

$$s\cos(sa) = u\cos(ua) + v\cos(va),$$

so ist auch

$$sa\cos(sa) = ua\cos(ua) + va\cos(va),$$

d. h.

$$\overline{sa} = \overline{ua} + \overline{va}.$$

Setzt man nun $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$, so folgt auf Grund der eben entwickelten Formel:

$$\overline{ua} = \overline{au} = \overline{bu} + \overline{cu} = \overline{ub} + \overline{uc},$$

$$\overline{va} = \overline{av} = \overline{vb} + \overline{vc},$$

und folglich

$$\overline{(\overline{u} + \overline{v})\,(\overline{b} + \overline{c})} = \overline{ub} + \overline{uc} + \overline{vb} + \overline{vc}.$$

Folgerung. Angenommen, es seien x, y, z die geradlinigen Coordinaten des Punktes M und x', y', z' die des Punktes M' in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz; ferner sei $OM = r$, $OM' = r'$; dann hat man

$$\overline{r} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}, \quad \overline{r'} = \overline{x'} + \overline{y'} + \overline{z'},$$

und auf Grund des Lehrsatzes (2) folgt

$$\overline{rr'} = \overline{xx'} + \overline{yy'} + \overline{zz'} + \overline{yz'} + \overline{zy'} + \overline{zx'} + \overline{xz'} + \overline{xy'} + \overline{yx'},$$

d. h.:

$$rr'\cos(rr') = xx' + yy' + zz' + (yz' + zy')\cos(yz)$$
$$+ (xz' + zx')\cos(zx) + (xy' + yx')\cos(xy),$$

---

*) Die von Resal angewandte Schreibweise ist eigentlich $\overline{u} \times \overline{v}$ oder $\overline{u}\,\overline{v}$. S. Cinématique pure §. 60. p. 64. Anm. d. Uebersetzers.

welche Formel sich auch auf anderem Wege ableiten lässt. Im Falle rechtwinkliger Axen sind die geometrischen Producte $\overline{yz'}$, $\overline{zy'}$, $\overline{zx'}$, $\overline{xz'}$, $\overline{xy'}$, $\overline{yx'}$ gleich Null, weil die Winkel zwischen den Factoren gleich 90°, also ihre Cosinus gleich Null sind.

Lässt man die Punkte M und M' zusammenfallen, so folgt

$$r^2 = \overline{xx} + \overline{yy} + \overline{zz} + 2\overline{yz} + 2\overline{zx} + 2\overline{xy},$$

d. h.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz) + 2zx\cos(zx) + 2xy\cos(xy),$$

welches die bekannte Formel für das Quadrat des Abstandes eines Punktes vom Coordinatenanfang ist.

24. *Lehrsatz 3. Sind $\overline{u}$ und $\overline{v}$ geometrische Functionen der Zeit t, so ist die analytische Derivirte des geometrischen Productes $\overline{uv}$ dargestellt durch die Formel*

$$\frac{d\overline{uv}}{dt} = \overline{u_1 v} + \overline{u v_1},$$

welche der Leibnitz'schen Formel für die Differentiation eines gewöhnlichen Productes ähnlich ist.

Beweis. Es erhalte die Zeit t einen unendlich kleinen Zuwachs τ, wodurch die Functionen $\overline{u}$ und $\overline{v}$ in $\overline{u'}$ und $\overline{v'}$ übergehen mögen. Die geometrischen Differenzen $\overline{u'} - \overline{u}$ und $\overline{v'} - \overline{v}$ sind dann die geometrischen Incremente der Functionen $\overline{u}$ und $\overline{v}$. Bezeichnet man sie mit $\overline{\varDelta u}$ und $\overline{\varDelta v}$, so folgt aus Lehrsatz (2)

$$\overline{u'v'} = \overline{(\overline{u} + \overline{\varDelta u})\,(\overline{v} + \overline{\varDelta v})} = \overline{uv} + \overline{v\varDelta u} + \overline{u\varDelta v} + \overline{\varDelta u \varDelta v},$$

und daher

$$\frac{\overline{u'v'} - \overline{uv}}{\tau} = \overline{v\frac{\varDelta u}{\tau}} + \overline{u\frac{\varDelta v}{\tau}} + \overline{\frac{\varDelta u}{\tau}\varDelta v},$$

wo unter $\frac{\varDelta u}{\tau}$ und $\frac{\varDelta v}{\tau}$ die mittleren Geschwindigkeiten bei der Verschiebung der Endpunkte von Strecken zu verstehen sind, die aus dem festen Ursprung gezogen und den Functionen $\overline{u}$ und $\overline{v}$ geometrisch gleich sind; dabei hat man als Richtungen dieser Geschwindigkeiten die Richtungen von $\overline{\varDelta u}$ und $\overline{\varDelta v}$ zu nehmen. Setzt man $\tau = 0$, so gehen diese Geschwindigkeiten in die

geometrischen Derivirten $\overline{u_1}$ und $\overline{v_1}$ über, und das letzte Glied verschwindet zugleich mit Δv; daher geht die Formel in die obige Form über:

$$\frac{d\overline{uv}}{dt} = \overline{vu_1} + \overline{uv_1}. \tag{a}$$

Folgerung 1. Differentiirt man das Product $\overline{uv}$ mit Anwendung der Formel (a) n mal nacheinander, so findet man die Formel:

$$\frac{d^n\overline{uv}}{dt^n} = \overline{uv_n} + n\overline{u_1v_{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\overline{u_2v_{n-2}} + \ldots.$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\overline{u_mv_{n-m}} + \ldots + \overline{u_nv}, \tag{b}$$

die der allgemeinen Leibnitz'schen analog ist.

Folgerung 2. Stellt man nach Formel (b) die Ausdrücke der Derivirten von

$$\overline{uv_1}, \overline{uv_2}, \ldots \overline{uv_{n-1}}$$

der $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$, ... Ordnung auf und eliminirt dann u_1, u_2, ... u_{n-1}, so folgt:

$$\overline{u_nv} = \frac{d^n\overline{uv}}{dt^n} - n\frac{d^{n-1}\overline{uv_1}}{dt^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}\overline{uv_2}}{dt^{n-2}} - \ldots(-1)^n\overline{uv_n}. \tag{c}$$

Folgerung 3. Wählt man als Factor v eine constante Strecke, die der Einheit gleich und auf einer beliebigen Projectionsaxe x abgetragen ist und bezeichnet man mit x_1, x_2, ... x_n die geometrischen Derivirten dieser Strecke, so erhält man nach Formel (a)

$$u_1 \cos(u_1x) = \frac{d[u \cos(ux)]}{dt} - ux_1 \cos(ux_1), \tag{d}$$

und nach Formel (b) allgemein:

$$u_n \cos(u_nx) = \frac{d^n[u\cos(ux)]}{dt^n} - n\frac{d^{n-1}[ux_1 \cos(ux_1)]}{dt^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}[ux_2 \cos(ux_2)]}{dt^{n-2}} - \ldots(-1)^n ux_n \cos(ux_n). \tag{e}$$

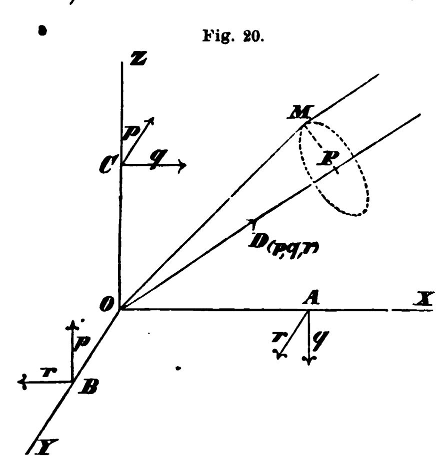
Die Formeln (d) und (e) können dazu dienen, die Projectionen der geometrischen Derivirten u_1, u_2, ... einer beliebigen Function $\overline{u}$ auf eine gegebene bewegliche Axe x zu berechnen durch deren Bewegung sich die geometrischen Derivirten x_1,

$x_2, \ldots . x_n$ einer der Einheit gleichen, auf dieser Axe abgetragenen Strecke bestimmen.

25. Benutzen wir die Formel (d) zur Bestimmung der Projectionen der geometrischen Derivirten der Function $\bar{u}$ auf drei bewegliche rectanguläre Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz (Fig. 20).*)

Es seien x, y, z die Projectionen der Function $\bar{u}$ auf diese Axen, d. h. die Coordinaten des Endpunktes der der Function $\bar{u}$ geometrisch gleichen Strecke $\overline{OM}$. Nehmen wir ferner auf den Axen die drei Strecken OA, OB, OC an, die während der ganzen Zeit der Bewegung der Einheit gleich bleiben, und bezeichnen wir mit $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ihre geometrischen Derivirten, d. h. die Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C. Die Projection der Geschwindigkeit $\bar{a}$ auf die Axe Ox, die von $\bar{b}$ auf Oy und die von $\bar{c}$ auf Oz sind gleich Null. Bezeichnen wir nun mit a_y und a_z die Projectionen von $\bar{a}$ auf die Axen Oy und Oz, mit b_z und b_x die Projectionen von $\bar{b}$ auf die Axen Oz und Ox und mit c_x und c_y die Projectionen von $\bar{c}$ auf die Axen Ox und Oy. Dann hat man nach Formel (d)

Fig. 20.



$$u_1 \cos(u_1 x) = \frac{d\,[u \cos(ux)]}{dt} - ua \cos(ua)$$

und da

$$u \cos(ux) = x, \quad ua \cos(ua) = ya_y + za_z,$$

*) Hier und in der Folge werden wir die Axenrichtungen, auf denen die positiven Coordinaten aufgetragen werden, so annehmen, dass für einen in der Richtung der positiven z-Coordinaten mit den Füssen im Punkte O stehenden Beobachter die Richtung Ox der positiven x zur Linken, die Richtung Oy der positiven y zur Rechten ist.

so ist

$$u_1 \cos(u_1 x) = \frac{dx}{dt} - y a_y - z a_z.$$

Ebenso findet man:

$$u_1 \cos(u_1 y) = \frac{dy}{dt} - x b_x - z b_z,$$

$$u_1 \cos(u_1 z) = \frac{dz}{dt} - x c_x - y c_y.$$

Wendet man diese Formeln auf $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ an, so folgt:

$$a_y = -b_x, \quad a_z = -c_x, \quad b_z = -c_y;$$

es sind also von den sechs Projectionen der Geschwindigkeiten $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ auf die Coordinatenaxen nur drei von einander verschieden. Bezeichnet man b_z mit p, c_x mit q und a_y mit r, so hat man: $c_y = -p$, $a_z = -q$, $b_x = -r$; hiermit nehmen die obigen Formeln die Form an:

$$\begin{aligned} u_1 \cos(u_1 x) &= \frac{dx}{dt} + qz - ry \\ u_1 \cos(u_1 y) &= \frac{dy}{dt} + rx - pz \\ u_1 \cos(u_1 z) &= \frac{dz}{dt} + py - qx. \end{aligned} \tag{1}$$

Ist $p = b_z$ eine positive Grösse, so ist $c_y = -p$ negativ. Hätte in diesem Falle der Punkt B nur die Geschwindigkeit b_z und der Punkt C nur die Geschwindigkeit $-c_y$, so würden sich diese beiden Punkte in der Ebene yOz auf der Peripherie eines Kreises vom Radius OB bewegen, und zwar in einem solchen Sinne, dass ein in der Richtung der Axe Ox mit den Füssen in O sich befindender Beobachter diese Bewegung von links nach rechts vor sich gehen sähe. Im Falle $p < 0$ ist, bewegen sich die Punkte B und C mit der Geschwindigkeit $-p$, und dann sieht der Beobachter die Bewegung von rechts nach links erfolgen. Folglich ist es die Geschwindigkeit $\pm p$ allein, welche die Rotation des rechten Winkels yOz um die unbeweglich bleibende Axe Ox mit der Winkelgeschwindigkeit $\pm p$ bewirkt. Ebenso findet man, dass $\pm q$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des rechten Winkels zOx um die Axe Oy und $\pm r$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des rechten Winkels xOy um die Axe Oz ist. Die

Formeln (1) zeigen, dass man die geometrische Derivirte u_1 als geometrische Summe zweier anderen Geschwindigkeiten u_1' und u_1'' betrachten kann, deren Projectionen auf die Coordinatenaxen durch die Formeln bestimmt sind:

$$\begin{aligned} u_1' \cos(u_1'x) &= \frac{dx}{dt} \\ u_1' \cos(u_1'y) &= \frac{dy}{dt} \\ u_1' \cos(u_1'z) &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u_1'' \cos(u_1''x) &= qz - zy = \begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix} \\ u_1'' \cos(u_1''y) &= rx - pz = \begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix} \\ u_1'' \cos(u_1''z) &= py - qx = \begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Die erste Componente u_1' ist die Geschwindigkeit, welche der Punkt (x,y,z) haben würde, wenn die Coordinatenaxen nach der Zeit t festgeblieben wären und wenn die Coordinaten x, y, z durch dieselben Functionen der Zeit dargestellt wären, durch welche sie bei der Bewegung der Axen wirklich dargestellt werden. Die zweite Componente u_1'' ist die Geschwindigkeit, welche der Punkt M haben würde, wenn die Coordinaten x, y, z nach der Zeit t constant geblieben wären, d. h. wenn der Punkt M unveränderlich mit den Axen Ox, Oy, Oz verbunden wäre und die Axen sich in Folge der Bewegung der drei Punkte A, B, C bewegten. Für jeden anderen mit den Axen Ox, Oy, Oz unveränderlich verbundenen Punkt muss man die Coordinaten x, y, z mit den jenem neuen Punkte zugehörigen vertauschen, während p, q, r unverändert bleiben. Die Formeln (3), welche die Projectionen der Geschwindigkeiten eines mit einem beweglichen rectangulären Axensystem unveränderlich verbundenen Punktsystems auf diese Axen ausdrücken, wurden zuerst von Euler*) gegeben. Die Geschwindigkeit u_1'' heisst die *Rotationsgeschwindigkeit.*

---

*) *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique.* Mémoires de l'Académie de Berlin. 1750.

26. Wenn die Coordinaten x, y, z den Bedingungen genügen:

$$qz - ry = 0,\ rx - pz = 0,\ py - qx = 0, \qquad (4)$$

so ist die Rotationsgeschwindigkeit u_1'' gleich Null. Die Gleichungen (4) stellen aber eine gerade Linie OD dar, die durch den Coordinatenanfang O und durch den Punkt $D\,(p, q, r)$ geht, dessen Coordinaten den Gleichungen (4) genügen. Folglich ist nur für Punkte, die auf dieser Geraden liegen, die Rotationsgeschwindigkeit u_1'' Null.

Die Gleichungen (3) geben:

$$xu_1''\cos(u_1''x) + yu_1''\cos(u_1''y) + zu_1''\cos(u_1''z) = 0$$
$$pu_1''\cos(u_1''x) + qu_1''\cos(u_1''y) + ru_1''\cos(u_1''z) = 0,$$

oder

$$uu_1''\cos(uu_1'') = 0,\ OD.\ u_1''\cos(OD, u_1'') = 0;$$

dies zeigt, dass die Geschwindigkeit u_1'' zu der durch den Punkt M und die Gerade OD gehenden Ebene senkrecht ist; daher tangirt die Richtung von u_1'' einen Kreis, der sein Centrum im Schnittpunkt P der Geraden OD mit der durch M senkrecht zu OD gelegten Ebene hat und der in dieser Ebene mit dem Radius PM beschrieben ist. Setzt man $OD = \omega$, $PM = \varrho$, so ist nach den Formeln (3):

$$u_1''^2 = (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2$$
$$= (p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (px + qy + rz)^2$$
$$= \omega^2 u^2 - [\omega u \cos(u\omega)]^2 = \omega^2 u^2 \sin^2(u\omega),$$

oder

$$u_1''^2 = \omega^2 \varrho^2,$$

woraus folgt

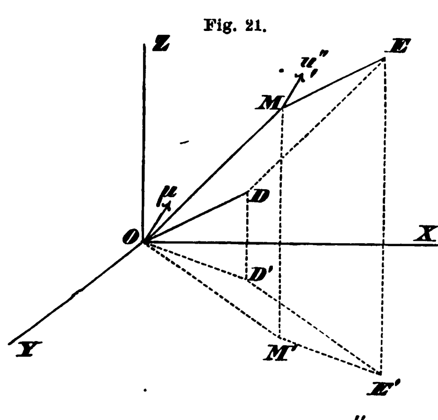
$$\frac{u_1''}{\varrho} = \omega,$$

d. h. *das Verhältniss der Geschwindigkeit u_1'' zu der entsprechenden Entfernung des Punktes M von der Geraden OD ist gleich dem Abstand OD;* folglich ist dieses Verhältniss für alle mit den Coordinatenaxen fest verbundenen Punkte ein und dasselbe. Dasselbe stellt die geometrische Winkelderivirte des Radius PM dar und heisst Rotationswinkelgeschwindigkeit der Ebene MOP um die Gerade OD, oder auch *Rotationswinkelgeschwindigkeit* der Axen Ox, Oy, Oz und aller fest mit ihnen

verbundenen Punkte. Lassen wir die Ebene MOP gleichmässig mit der Geschwindigkeit ω um die fest bleibende Gerade OD rotiren und bringen wir den Punkt M in diejenige Lage, welche er zur Zeit t einnehmen soll, so kommt er in diese Lage mit der Geschwindigkeit u_1''. Aber obwol eine solche Bewegung die wahre Geschwindigkeit u_1'' giebt, so kann sie sich doch von der wirklichen Bewegung des Punktes M unterscheiden; denn die Geschwindigkeit allein genügt nicht zur Bestimmung der Bewegung, und die wirklichen Beschleunigungen bei der Bewegung des Punktes M können verschieden sein von den Beschleunigungen bei seiner Bewegung auf der Peripherie des Kreises vom Radius MP. Bei der wirklichen Bewegung kann die Axe OD sich bewegen, doch so, dass alle ihre Punkte in der unendlich kleinen auf t folgenden Zeit τ unendlich kleine Strecken von höherer Ordnung als τ durchlaufen. Die Gerade OD heisst die *Momentanaxe der Rotation.*

Stellt OD (Fig. 21) einen Beobachter dar, der die Füsse in O und den Kopf in D hat und auf den Punkt M hinsieht, so ist für ihn die Geschwindigkeit u_1'' immer von links nach rechts gerichtet, d. h. die Bewegung des Radius PM stimmt für ihn mit der Bewegung des Stunden- oder Minutenzeigers auf dem Zifferblatte einer Uhr überein. Davon kann man sich folgendermassen überzeugen.

Fig. 21.



Da

$$u_1'' = \omega\varrho$$

ist, so wird die der Geschwindigkeit u_1'' geometrisch gleiche Strecke $O\mu$ in Linieneinheiten durch dieselbe Zahl ausgedrückt, durch welche die Fläche des über den Seiten OD und OM construirten Parallelogramms $MODE$ in quadratischen Einheiten ausgedrückt wird. Die Projection $M'OD'E'$ der Fläche $MODE$ auf die Ebene xOy ist, wie aus der analytischen Geometrie bekannt, gleich $+(py - qx)$ oder

— $(py - qx)$,*) je nachdem der Winkel $M'Ox$ grösser oder kleiner als der Winkel $D'Ox$ ist; folglich ist im ersten Falle die Fläche $M'OD'E'$ gleich $u_1'' \cos(u_1''z)$, und im zweiten gleich $- u_1'' \cos(u_1''z)$. Deshalb muss die Projection der Strecke $O\mu$ auf die Axe Oz, d. h. $u_1'' \cos(u_1''z)$, im ersten Falle positiv und im zweiten negativ sein; d. h. es ist im ersten Falle der Winkel μOz ein spitzer, im zweiten ein stumpfer; in beiden Fällen aber wird der Beobachter OD die Geschwindigkeit u_1'' oder $O\mu$ von links nach rechts gerichtet sehen. Diese Richtung der Rotationsgeschwindigkeit werden wir die *positive*, die ihr entgegengesetzte die *negative* nennen. Nimmt nun der Beobachter die Lage $O\mu$ ein, indem er die Füsse in O hat und auf den Punkt M hinschaut, so wird er den Punkt D zur Linken haben, und die der Strecke $\overline{OM} = \overline{u}$ geometrisch gleiche Strecke DE hat für ihn die Richtung von links nach rechts.**) In dem Abschnitt über die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei der Bewegung eines unveränderlichen Punktsytems werden wir die Eigenschaften der Rotationsgeschwindigkeiten eingehender betrachten. Jetzt wollen wir die Formeln (1) zur Bestimmung der geometrischen Derivirten und der Beschleunigungen überhaupt benutzen.

---

*) Bezeichnet φ den Winkel $M'Ox$ und φ' den Winkel $D'Ox$, diese Winkel von der Axe Ox nach Oy hin gezählt von 0° bis 360°, so hat man für jede Lage der Punkte D und M' die Relationen $x = OM' \cos\varphi$, $y = OM' \sin\varphi$, $p = OD' \cos\varphi'$, $q = OD' \sin\varphi'$, und die Fläche $M'OD'E'$ ist, wenn $\varphi > \varphi'$, dargestellt durch $OM' . OD' \sin(\varphi - \varphi') = py - qx$ und, wenn $\varphi' > \varphi$, durch $OM' . OD' \sin(\varphi' - \varphi) = -(py - qx)$.

**) Hierbei wollen wir eine allgemeine Bemerkung machen, die späterhin nützlich sein wird, dass nämlich die Determinanten zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix},$$

die aus den Coordinaten der Punkte $D(p, q, r)$, $M(x, y, z)$ zusammengesetzt sind, die Projectionen der Strecke $O\mu$ auf die Coordinatenaxen sind, wenn $O\mu$ dem aus OM und OD als Seiten construirten Parallelogramm dem Zahlwerth nach gleich, zu dessen Ebene senkrecht und so gerichtet ist, dass ein Beobachter, der die Füsse in O, den Kopf in μ hat und nach dem Punkte M hinschaut, den Punkt D (dessen Coordinaten in den ersten Horizontalreihen stehen), zu seiner Linken sieht.

27. Ersetzt man die Function $\overline{u}$ durch ihre $(n - 1)^{\text{te}}$ geometrische Derivirte, so muss $\overline{u}_1$ durch die n^{te} geometrische Derivirte ersetzt werden, und man hat dann nach den Formeln (1):

$$\left.\begin{aligned}
u_n \cos(u_n x) &= \frac{d[u_{n-1}\cos(u_{n-1}x)]}{dt} + \begin{vmatrix} q & r \\ u_{n-1}\cos(u_{n-1}y), & u_{n-1}\cos(u_{n-1}z) \end{vmatrix} \\
u_n \cos(u_n y) &= \frac{d[u_{n-1}\cos(u_{n-1}y)]}{dt} + \begin{vmatrix} r & p \\ u_{n-1}\cos(u_{n-1}z), & u_{n-1}\cos(u_{n-1}x) \end{vmatrix} \\
u_n \cos(u_n z) &= \frac{d[u_{n-1}\cos(u_{n-1}z)]}{dt} + \begin{vmatrix} p & q \\ u_{n-1}\cos(u_{n-1}x), & u_{n-1}\cos(u_{n-1}y) \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Nehmen wir an, die Axe Ox sei in der Richtung der geometrischen Function der Zeit $\overline{Ok} = \overline{\alpha}$ genommen; dabei gehe die Ebene xOy durch die geometrische Derivirte $\overline{\alpha}_1$ dieser Function, so dass Oy und $\overline{\alpha}_1$ nach derselben Seite von Ox hin gerichtet sind; dann ist die Geschwindigkeit $\overline{a}$ des Punktes A die Winkelderivirte der Function α. Sie ist parallel und gleichen Sinnes mit der Axe Oy; daher ist ihre Projection $a_z = -q$ gleich Null, die Projection $a_y = r$ aber gleich der Geschwindigkeit selbst. Die Geschwindigkeit $\overline{c}$ des Punktes C reducirt sich auf $\pm p$ und ist der Axe Oy oder dem $\overline{a}$ parallel, und zwar von entgegengesetztem oder gleichem Sinne, je nachdem die Rotation der Punkte B und C um Ox eine positive oder negative ist. Die Momentanaxe OD bleibt während der ganzen Zeit der Bewegung in der Ebene xOz. Die Lage des Punktes D ist durch die Coordinaten $x = \pm c$, $z = a$ bestimmt. Die Grösse der Rotationswinkelgeschwindigkeit ω ist $\sqrt{a^2 + c^2}$.

Im vorliegenden Falle reduciren sich die Formeln (1) auf die folgenden:

$$\begin{aligned}
u_1 \cos(u_1 \alpha) &= \frac{d[u\cos(u\alpha)]}{dt} - au\cos(ua) \\
u_1 \cos(u_1 a) &= \frac{d[u\cos(ua)]}{dt} + au\cos(u\alpha) - cu\cos(uc) \quad (5) \\
u_1 \cos(u_1 c) &= \frac{d[u\cos(uc)]}{dt} + cu\cos(ua).
\end{aligned}$$

Sie gelten nicht nur für eine positive Rotation der Ebene

BOA um OA, sondern auch für eine negative; denn sie ändern sich nicht bei der Aenderung des Zeichens und Sinnes von c.

Die Formeln (5) können zur Bestimmung der successiven geometrischen Derivirten $u_1, u_2, \ldots$ dienen, wenn $\bar{\alpha}$, $\bar{a}$ und $\bar{c}$ bekannt sind.

28. Nehmen wir jetzt für $\bar{\alpha}$ die Geschwindigkeit $\bar{v}$ einer beliebigen Bewegung des Punktes m. In diesem Falle ist die Ebene der Geraden $\bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha}_1$ die Schmiegungsebene (vv_1) oder die Ebene der ersten Krümmung, welche durch die Geschwindigkeit $\bar{v}$ und die Beschleunigung erster Ordnung $\bar{v}_1$ geht. In dieser Ebene befindet sich der Krümmungsradius ϱ. Die Geschwindigkeit $\bar{a}$ ist das Verhältniss des Contingenzwinkels zum Differential der Zeit und ist gleich $\frac{v}{\varrho}$. Ihre Richtung ist die der ersten Hauptnormale, d. h. die Richtung des Krümmungsradius ϱ, wenn man als Anfangspunkt dieser Strecke den Punkt m nimmt. Die Richtung der Geschwindigkeit $\bar{c}$ ist die der zweiten Hauptnormale oder *Binormale* (wie de St. Venant sie nennt); cdt ist der Torsionswinkel. Bezeichnet r den Radius der zweiten Krümmung, so ist $cdt = \frac{vdt}{r}$ und $c = \frac{v}{r}$. Dabei stellen wir r durch eine Strecke dar, die auf der zweiten Hauptnormale nach der Seite hin aufgetragen wird, wohin die Ebene (vv_1) rotirt; dann hat c dieselbe Richtung mit r.

Im vorliegenden Falle nehmen die Formeln (5) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} u_1 \cos(u_1 v) &= \frac{d\,[u \cos(uv)]}{dt} - \frac{v}{\varrho}\, u \cos(u\varrho) \\ u_1 \cos(u_1 \varrho) &= \frac{d\,[u \cos(u\varrho)]}{dt} + \frac{v}{\varrho}\, u \cos(uv) - \frac{v}{r}\, u \cos(ur) \qquad (6) \\ u_1 \cos(u_1 r) &= \frac{d\,[u \cos(ur)]}{dt} + \frac{v}{r}\, u \cos(u\varrho). \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln erhält man die Projectionen der successiven Beschleunigungen $v_1, v_2, \ldots$ auf die drei Richtungen v, ϱ und r, nämlich:

$$v_1 \cos(v_1 v) = \frac{dv}{dt}, \quad v_1 \cos(v_1 \varrho) = \frac{v^2}{\varrho}, \quad v_1 \cos(v_1 r) = 0, \qquad (7)$$

wie schon §. 14. gefunden wurde; ferner:

$$v_2 \cos(v_2 v) = \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{\varrho^2} \quad . \tag{8}$$

$$v_2 \cos(v_2 \varrho) = \frac{1}{v} \frac{d\left(\frac{v^3}{\varrho}\right)}{dt} \tag{9}$$

$$v_2 \cos(v_2 r) = \frac{v^3}{\varrho r} \tag{10)*}$$

u. s. w.

29. Aus Formel (7) nnd (10) lassen sich leicht die bekannten Ausdrücke der Krümmungsradien durch die Coordinaten des beweglichen Punktes ableiten.

Die Formeln (7) geben:

$$\varrho = \frac{v^2}{\sqrt{v_1^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}.$$

Bezeichnet s den zur Zeit t von dem Punkte m zurückgelegten Weg oder irgend einen andern Bogen der Bahn, der in einem festen Punkte derselben beginnt und in dem Punkte, wo m zur Zeit t ist, endigt, so hat man:

$$v = \pm \frac{ds}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \pm \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Ist der Punkt m durch rechtwinklige geradlinige Coordinaten x, y, z bestimmt, so ist:

$$v_1 \cos(v_1 x) = \frac{d^2 x}{dt^2}, \; v_1 \cos(v_1 y) = \frac{d^2 y}{dt^2}, \; v_1 \cos(v_1 z) = \frac{d^2 z}{dt^2} (\text{s. §. 17.}),$$

und

$$v_1^2 = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2;$$

folglich ist:

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2 + (d^2 z)^2 - (d^2 s)^2}}.$$

---

*) Die Formeln (8), (9) und (10) sind auf synthetischem Wege von Resal gefunden worden (Traité de Cinématique pure, pag. 271). Aber der Ausdruck, den er für $v_2 \cos(v_2 v)$ findet, ist nicht richtig; das Vorzeichen des zweiten Gliedes muss dort in das entgegengesetzte verwandelt werden.

Die Determinanten zweiten Grades

$$A = \frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$B = \frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$C = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

sind die auf die Coordinatenaxen bezogenen Projectionen einer zur Ebene der ersten Krümmung (vv_1) senkrechten Strecke, die der Flächenzahl des aus der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung v_1 construirten Parallelogramms gleich ist. Da diese Fläche durch

$$vv_1 \sin(vv_1) = vv_1 \cos(v_1 \varrho) = \frac{v^3}{\varrho}$$

ausgedrückt ist, so ist

$$\frac{v^6}{\varrho^2} = A^2 + B^2 + C^2,$$

woraus man einen anderen Ausdruck für den Radius der ersten Krümmung erhält, nämlich:

$$\varrho = \frac{v^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{ds^3}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}$$

Da

$$\overline{v_1} = \overline{\frac{dv}{dt}} + \overline{\frac{v^2}{\varrho}},$$

so ist

$$v_1 \cos(v_1 x) = \frac{v^2}{\varrho}\cos(\varrho x) + \frac{dv}{dt}\cos(vx);$$

daraus folgt

$$\frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v^3}{\varrho}\cos(\varrho x) + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{dt}$$

und

$$\cos(\varrho x) = \varrho\,\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds};$$

ebenso erhält man:

$$\cos(\varrho y) = \varrho\,\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}$$

$$\cos(\varrho z) = \varrho\,\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

Durch die diesen Cosinus entsprechenden Winkel bestimmt sich die Richtung des Radius der ersten Krümmung ϱ oder der ersten Hauptnormale.

Bezeichnet man mit A' B' C' die Projectionen des Radius der zweiten Krümmung r auf die Coordinatenaxen, so hat man, da r auf v und v_1 senkrecht steht:

$$A' \frac{dx}{dt} + B' \frac{dy}{dt} + C' \frac{dz}{dt} = 0$$

$$A' \frac{d^2x}{dt^2} + B' \frac{d^2y}{dt^2} + C' \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

und da nach Gleichung (10) die Projection der Beschleunigung zweiter Ordnung v_2 auf r gleich $\frac{v^3}{r\varrho}$ ist, so ergiebt sich:

$$A' \frac{d^3x}{dt^3} + B' \frac{d^3y}{dt^3} + C' \frac{d^3z}{dt^3} = \frac{v^3}{\varrho}.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$A' = \frac{v^3 A}{\varrho D}, \quad B' = \frac{v^3 B}{\varrho D}, \quad C' = \frac{v^3 C}{\varrho D}, \tag{a}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt}, & \frac{dy}{dt}, & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2}, & \frac{d^2y}{dt^2}, & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^3x}{dt^3}, & \frac{d^3y}{dt^3}, & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix}$$

$$= A\frac{d^3x}{dt^3} + B\frac{d^3y}{dt^3} + C\frac{d^3z}{dt^3};$$

folglich ist

$$r^2 = \frac{v^6}{\varrho^2 D^2}(A^2 + B^2 + C^2) = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^2}{D^2}$$

und

$$r = \pm \frac{A^2 + B^2 + C^2}{D}$$

d. h.

$$r = \pm \frac{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}{(dyd^2z - dzd^2y)\,d^3x + (dzd^2x - dxd^2z)\,d^3y + (dxd^2y - dyd^2x)\,d^3z}.$$

Hier muss man das Zeichen $+$ nehmen, wenn $D > 0$, und das Zeichen $-$, wenn $D < 0$. Die Formeln (a) zeigen, dass im ersten Falle A', B', C' dieselben Vorzeichen wie A, B, C haben und daher r so gerichtet ist, dass ein in der Richtung

der Geschwindigkeit mit den Füssen im Punkte (x, y, z) stehender und nach dem Centrum der ersten Krümmung hinschauender Beobachter die Richtung r von links nach rechts gerichtet sieht; in demselben Sinne geht die Rotation der Ebene der ersten Krümmung um die Richtung der Geschwindigkeit vor sich. Im Falle aber $D < 0$, haben r und die Rotation der Ebene der ersten Krümmung entgegengesetzten Sinn. Die Formeln (a) geben

$$\cos(rx) = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos(ry) = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos(rz) = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo im Falle $D > 0$ das obere, im Falle $D < 0$ das untere Zeichen zu nehmen ist.

Die durch die Richtungen von v und r gelegte Ebene nennt man rectificirende Ebene (plan rectifiant) (Mémoire sur les lignes courbes non planes, par M. de St. Venant, Journal de l'école polytechnique, 30me cahier). In dieser Ebene liegt die Momentanaxe der Rotation des von der Tangente und den beiden Hauptnormalen gebildeten rectangulären Axensystems. Die Projectionen der auf dieser Axe aufgetragenen Rotationswinkelgeschwindigkeit ω auf die Tangente und die zweite Hauptnormale sind $\pm \frac{v}{r}$ und $\frac{v}{\varrho}$; also ist $\omega^2 = v^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right)$. Die Momentanaxe heisst rectificirende Gerade. Der Winkel H zwischen dieser Geraden und der Richtung der Tangente ist durch die Formel bestimmt: $\tan H = \pm \frac{r}{\varrho}$.

V. Capitel.

Bestimmung der Grösse und Richtung der Sehne, welche den von einem Punkt in gegebener Zeit durchlaufenen Weg spannt. Folgerungen.

30. Es sei M die Lage des beweglichen Punktes zur Zeit t, M' seine Lage zur Zeit $t + \tau$ und $w = MM'$ die Sehne, welche den von dem Punkt in der Zeit τ durchlaufenen Weg

spannt. Man kann die Grösse und Richtung dieser Sehne finden, wenn man die Geschwindigkeit v und alle Beschleunigungen v_1, v_2,... zur Zeit t kennt, und man wird daher die Lage M' des beweglichen Punktes m zur Zeit $t+\tau$ bestimmen können.

Bezeichnen wir mit x die Projection des aus einem festen Ursprung O nach dem Punkte M gezogenen Radiusvectors OM auf eine beliebige Axe Ox. Bei der Bewegung des Punktes m wird sich die Grösse von x im Allgemeinen continuirlich ändern, und zur Zeit $t+\tau$ wird x ein Increment Δx erhalten haben, für welches man nach der Taylor'schen Formel den Ausdruck findet:

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\tau^2 + \dots + \frac{1}{1.2.3..n}\frac{d^nx}{dt^n}\tau^n + \xi, \quad (1)$$

wo ξ das Restglied bezeichnet, das sich auf bekannte Weise ausdrücken lässt, z. B. nach der Formel von Lagrange oder nach der von Cauchy. Da nun $\Delta x = w \cos(wx)$ und für die Derivirten der verschiedenen Ordnungen von x allgemein

$$\frac{d^nx}{dt^n} = v_{n-1}\cos(v_{n-1}x),$$

ist, so hat man:

$$w\cos(wx) = v\tau\cos(vx) + \frac{1}{2}v_1\tau^2\cos(v_1x) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{1.2.3...n}v_{n-1}\tau^n\cos(v_{n-1}x) + \xi.$$

Diese Gleichung muss für jede Richtung der Axe Ox bestehen. Aus ihr ersieht man, dass, wenn man einen Polygonalzug $MAA_1A_2\dots A_{n-2}A_{n-1}$ aus den Seiten

$$MA = v\tau,\ AA_1 = \frac{1}{2}v_1\tau^2,\ A_1A_2 = \frac{1}{1.2.3}v_2\tau^3, \dots.$$
$$A_{n-2}A_{n-1} = \frac{1}{1.2.3\dots n}v_{n-1}\tau^n$$

bildet und wenn man die Richtungen dieser Seiten übereinstimmen lässt mit den Richtungen der Geschwindigkeit v und der Beschleunigungen $v_1, v_2, \dots v_{n-1}$, die Sehne $\overline{w}$ die geometrische Summe der Seiten dieses Polygonalzuges und der Schlussstrecke $A_{n-1}M' = \varphi$ ist, d. h. es ist:

$$\overline{w} = \overline{v\tau} + \overline{\tfrac{1}{2}v_1\tau^2} + \overline{\frac{1}{1.2.3}v_2\tau^3} + \dots + \overline{\frac{1}{1.2..n}v_{n-1}\tau^n} + \overline{\varphi}. \quad (2)$$

Ist x eine endliche continuirliche Function, die sich nach ganzen Potenzen von τ entwickeln lässt, so nähert sich bei wachsender Gliederanzahl der Reihe (1) das Restglied ξ der Null. Folglich nähert sich auch $\varphi = \frac{\xi}{\cos(\varphi x)}$ der Null bei wachsender Seitenzahl des Polygons $MA_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}$; dadurch geht aber die geometrische Summe $\overline{MA_{n-1}}$ dieser Seiten in die Sehne $\overline{w}$ über, so dass sich also die Sehne $\overline{w}$ durch die unendliche geometrische Summe

$$\overline{w} = \overline{v\tau} + \overline{\tfrac{1}{2} v_1 \tau^2} + \ldots \tag{3}$$

ausdrücken lässt*).

Diese Formel zeigt, dass *die Bewegung des Punktes m während der Zeit τ als zusammengesetzt betrachtet werden kann aus einer unendlichen Menge geradliniger Bewegungen in den Richtungen der Geschwindigkeit v und der Beschleunigungen v_1, $v_2, \ldots$; dabei sind die Wege dieser Componentenbewegungen durch die Functionen*

$$v\tau,\ \tfrac{1}{2} v_1 \tau^2,\ \frac{1}{2.3} v_2 \tau^3,\ \ldots\ \frac{1}{1.2\ldots n} v_{n-1} \tau^n, \ldots$$

ausgedrückt.

Die erste Componente ist eine gleichförmige Bewegung längs der Tangente der Bahn im Punkte M mit der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeit v; die zweite ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung erster Ordnung v_1; überhaupt bestimmt sich die n^{te} Bewegungscomponente durch die Beschleunigung v_{n-1} allein, und der dabei zurückgelegte Weg ist der n^{ten} Potenz von τ proportional. Ist τ so klein, dass man das Restglied φ vernachlässigen darf, so stellt die Strecke $\overline{MA_{n-1}}$ annähernd die Sehne MM' nach Grösse und Richtung dar; deshalb ist A_{n-1} annähernd die Lage des Punktes m zur Zeit $t + \tau$.

31. *Berechnung der Länge der Sehne und ihrer Projectionen auf die Tangente und auf die beiden Hauptnormalen.*

---

*) Möbius, Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorems. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, B. 36, S. 91.

Mit Hilfe der Formel (3) lässt sich die Länge der Sehne w berechnen. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots q}\,v_{p-1}\,v_{q-1}\cos(v_{p-1}v_{q-1}) = a_{p,q}\,, \quad (4)$$

so findet man nach der bekannten Formel für das Quadrat einer geometrischen Summe:

$$w^2 = a_{1,1}\tau^2 + 2a_{1,2}\tau^3 + (2a_{1,3} + a_{2,2})\tau^4 + (2a_{1,4} + 2a_{2,3})\tau^5 + \ldots$$
$$\ldots + (2a_{1,2n-1} + 2a_{2,2n-2} + \ldots + a_{n,n})\,\tau^{2n} +$$
$$+ (2a_{1,2n} + 2a_{2,2n-1} + \ldots + 2a_{n,n+1})\,\tau^{2n+1} + \ldots \quad (5)$$

Nimmt man andererseits an, die Sehne w sei in eine Reihe

$$w = b_1\tau + b_2\tau^2 + b_3\tau^3 + \ldots \quad (6)$$

entwickelt, so findet man nach der Multiplicationsregel für Reihen:

$$w^2 = b_1{}^2\tau^2 + 2b_1b_2\tau^3 + (2b_1b_3 + b_2{}^2)\tau^4 + (2b_1b_4 + 2b_2b_3)\tau^5 + \ldots$$
$$\ldots + (2b_1b_{2n-1} + 2b_2b_{2n-2} + \ldots + b^2{}_n)\,\tau^{2n} +$$
$$+ (2b_1b_{2n} + 2b_2b_{2n-1} + \ldots + 2b_nb_{n+1})\,\tau^{2n+1} + \ldots$$

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit (5) ergeben sich die Gleichungen

$$2b_1b_{2n-1} + 2b_2b_{2n-2} + \ldots + b_n{}^2 = 2a_{1,2n-1} + 2a_{2,2n-2} + \ldots + a_{n,n},$$
$$2b_1b_{2n} + 2b_2b_{2n-1} + \ldots + 2b_nb_{n+1} = 2a_{1,2n} + 2a_{2,2n-1} + 2a_{n,n+1},$$

aus denen sich der Reihe nach die Werthe der Coefficienten der Reihe (6) ableiten lassen; es wird nämlich:

$$b_1 = a_{1,1}^{\frac{1}{2}} = v,\; b_2 = \frac{1}{v}\,a_{1,2},\; b_3 = \frac{1}{v}\,a_{1,3} + \frac{1}{2v}\,a_{2,2} - \frac{1}{2v^3}\,a_{1,2}^2, \ldots$$

Die Formeln (b) und (c) des §. 24. geben die Gleichungen

$$p\,!\,q\,!\,\frac{d^n a_{p,q}}{dt^n} = (p+n)!\,q!\,a_{p+n,q}$$
$$+ n\,(p+n-1)!\,(q+1)!\,a_{p+n-1,q+1}$$
$$+ \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,(p+n-2)!(q+2)!a_{p+n-2,q+2} + \ldots$$
$$\ldots + p!\,(q+n)!\,a_{p,q+n}\,,$$

$$(p+n)!\,q!\,a_{p+n,q} = p!\,q!\,\frac{d^n a_{p,q}}{dt^n}$$

$$- np!\,(q+1)!\,\frac{d^{n-1} a_{p,q+1}}{dt^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,p!\,(q+2)!\,\frac{d^{n-2} a_{p,q+2}}{dt^{n-2}} + \ldots$$

$$\ldots (-1)^n p!\,(q+n)!\,a_{p,q+n}{}^{*}),$$

welche die Berechnung der Coefficienten $b_1, b_2, \ldots$ erleichtern.

Man kann die Sehne w als Function der Länge des Bogens $MM' = \Delta s$, welchen sie unterspannt, ausdrücken, wenn man sie nach Potenzen dieses Bogens in eine Reihe entwickelt. Dazu muss man $s = t$, $\tau = \Delta s$ setzen; dann ist nach den Formeln (7), (8), (9), (10) des vorhergehenden Capitels:

$$v = \frac{ds}{dt} = 1, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = 0, \ldots.$$

$$v_1 \cos(v_1 v) = 0, \quad v_1 \cos(v_1 \varrho) = v_1 = \frac{1}{\varrho},$$

$$v_2 \cos(v_2 v) = -\frac{1}{\varrho^2}, \quad v_2 \cos(v_2 \varrho) = v_2 \cos(v_1 v_2) = \frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}, \quad v_2 \cos(v_2 r) = \frac{1}{\varrho r},$$

$$v_2{}^2 = \frac{1}{\varrho^4} + \left[\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}\right]^2 + \frac{1}{\varrho^2 r^2}, \quad v_3 \cos(v_3 v) = -\frac{3}{2}\,\frac{d\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds}, \ldots$$

Daher ist:

$$a_{1,3} = -\frac{1}{6\varrho^2}, \quad a_{2,2} = \frac{1}{4\varrho^2}, \quad a_{1,4} = -\frac{1}{8\varrho}\,\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds},$$

$$a_{2,3} = \frac{1}{12\varrho}\,\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}, \quad a_{3,3} = \frac{1}{36}\left\{\frac{1}{\varrho^4} + \left[\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}\right]^2 + \frac{1}{\varrho^2 r^2}\right\},$$

$$3a_{3,3} + 4a_{2,4} = \frac{d a_{2,3}}{ds} = \frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\varrho}\,\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2} + \left[\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}\right]^2\right\},$$

---

*) Hierin bedeutet $p!$ das Product $1\,.\,2\,.\,3 \ldots p$.

$$a_{2,4}=\frac{1}{48}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2}-\frac{1}{\varrho^4}-\frac{1}{\varrho^2 r^2}\right],$$

$$2a_{2,4}+5a_{1,5}=\frac{da_{1,4}}{ds}=-\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2}+\left[\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}\right]^2\right\},$$

$$a_{1,5}=-\frac{1}{120}\left\{\frac{4}{\varrho}\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2}+3\left[\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}\right]^2-\frac{1}{\varrho^4}-\frac{1}{\varrho^2 r^2}\right\};$$

$$b_1=1,\ b_2=0,\ b_3=-\frac{1}{24\varrho^2},\ b_4=-\frac{1}{48}\frac{d\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds},$$

$$b_5=\frac{1}{720}\left\{\frac{3}{8\varrho^4}+\frac{1}{\varrho^2 r^2}-4\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2}\right\};$$

$$w=\varDelta s-\frac{1}{24\varrho^2}\varDelta s^3-\frac{1}{48}\frac{d\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds}\varDelta s^4+$$

$$+\frac{1}{720}\left\{\frac{3}{8\varrho^4}+\frac{1}{\varrho^2 r^2}-4\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2}\right\}\varDelta s^5+\dots \quad (7)^{*})$$

Die Richtung der Sehne $\overline{w}$ kann vermittelst ihrer Projectionen auf drei zu einander senkrechte Richtungen, nämlich auf die Tangente und die beiden Hauptnormalen bestimmt werden; diese Projectionen sind:

$$w\cos(wv)=v\tau+v_1\cos(v_1v)\frac{\tau^2}{1.2}+v_2\cos(v_2v)\frac{\tau^3}{1.2.3}+\dots$$

$$w\cos(w\varrho)=v\cos(v\varrho)\tau+v_1\cos(v_1\varrho)\frac{\tau^2}{1.2}+v_2\cos(v_2\varrho)\frac{\tau^3}{1.2.3}+\dots$$

$$w\cos(wr)=v\cos(vr)\tau+v_1\cos(v_1r)\frac{\tau^2}{1.2}+v_2\cos(v_2r)\frac{\tau^3}{1.2.3}+\dots$$

Die Coefficienten der Potenzen von τ werden mit Hilfe der Formeln (7), (8), (9), (10) des vorhergehenden Capitels bestimmt. Setzt man $t=s$, $\tau=\varDelta s$, so folgt:

---

*) Die ersten drei Glieder dieser Reihe hat Serret berechnet, s. Lacroix, Traité élémentaire de calcul diff. et int., 7e éd., T. II, page 171.

$$w\cos(wv) = \Delta s - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\Delta s^3}{1.2.3} - \frac{3}{2}\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}\frac{\Delta s^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$$w\cos(w\varrho) = \frac{1}{\varrho}\frac{\Delta s^2}{1.2} + \frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}\frac{\Delta s^3}{1.2.3} + \left[\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2} - \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho r^2}\right]\frac{\Delta s^4}{1.2.3.4} + \ldots, \tag{8}$$

$$w\cos(wr) = \frac{1}{\varrho r}\frac{\Delta s^3}{1.2.3} + \left[\frac{2}{r}\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}\right]\frac{\Delta s^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Die Formel (7) zeigt, dass, wenn der Bogen Δs unendlich klein ist, die Differenz zwischen Bogen und Sehne unendlich klein von dritter Ordnung ist. Aus den Formeln (8) ist ersichtlich: 1) dass die Differenz zwischen der Sehne und ihrer Projection auf die Tangente unendlich klein von der dritten Ordnung, 2) dass die Projection der Sehne auf den Radius der ersten Krümmung unendlich klein von zweiter Ordnung und 3) dass die Projection auf den Radius der zweiten Krümmung unendlich klein von der dritten Ordnung ist.

32. Aus den Formeln (7) und (8) lässt sich eine sehr einfache Formel zur annähernden Rectification jeder beliebigen krummen Linie herleiten.

Nehmen wir an, der Bogen Δs sei so klein, dass man seine fünfte und höheren Potenzen vernachlässigen darf. Dann genügt es, in Formel (7) nur die ersten drei Glieder beizubehalten; bezeichnet man dann mit ϱ' den Radius der ersten Krümmung am Ende des Bogens Δs, so kann man statt $\frac{d\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds}$ substituiren $\frac{\frac{1}{\varrho'^2} - \frac{1}{\varrho^2}}{\Delta s}$; dadurch erhält man:

$$w = \Delta s - \frac{1}{24\varrho^2}\Delta s^3 - \frac{1}{48\varrho'^2}\Delta s^3 + \frac{1}{48\varrho^2}\Delta s^3,$$

oder

$$\Delta s = w + \frac{1}{48}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'^2}\right)\Delta s^3.\text{*)} \tag{9}$$

*) Diesen Näherungswerth des Bogens gab Serret, Cours de calcul diff. et int. 1868. T. I, p. 396.

Es sei a die Projection der Sehne w auf die Tangente im Anfangspunkt des Bogens Δs und a' die Projection von w auf die Tangente im Endpunkt von Δs. Multiplicirt man dann die Formel (7) mit 3 und subtrahirt von dem Producte die erste der Formeln (8), so folgt:

$$3w - a = 2\Delta s + \frac{1}{24\varrho^2}\Delta s^3;$$

daher ist auch

$$3w - a' = 2\Delta s + \frac{1}{24\varrho'^2}\Delta s^3.$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt

$$2\Delta s = 3w - \frac{1}{2}(a + a') - \frac{1}{48}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'^2}\right)\Delta s^3;$$

addirt man hierzu die Formel (9), so ergiebt sich

$$3\Delta s = 4w - \frac{1}{2}(a + a');$$

folglich ist

$$\Delta s = \frac{4}{3}w - \frac{1}{6}(a + a'),$$

d. h. *die Länge des Bogens einer Curve ist annähernd gleich vier Dritteln seiner Sehne vermindert um den sechsten Theil der Summe der Projectionen der Sehne auf die in den Endpunkten des Bogens an denselben gelegten Tangenten.*

Hieraus lässt sich die Huyghens'sche Formel $\frac{8B - A}{3}$ zur Rectification des Kreisbogens ableiten, wenn man beachtet, dass in jenem Ausdruck A die Sehne des ganzen und B die des halben Bogens bedeutet.*)

33. Angenommen, die beiden Curven MA und MB (Fig. 22) haben einen gemeinsamen Punkt M und in diesem Punkte eine Berührung von der Ordnung a, die gleich der ganzen Zahl n oder zwischen den ganzen Zahlen $n - 1$ und n gelegen ist. Betrachtet man diese Curven als die Bahnen zweier Punkte m und m', die zu der-

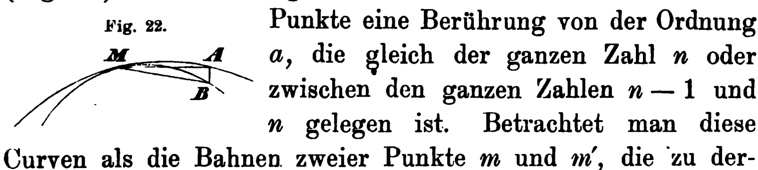


Fig. 22.

*) De circuli magnitudine inventa. Siehe auch *Isaci Newtoni* Opuscula, Lausanae et Genevae, 1754. pag. 320 und *J. Wallis,* A treatise of Algebra, London, 1685. pag. 345.

selben Zeit t durch M hindurchgehen, so lassen sich die Bedingungen ihrer Berührung unabhängig von irgend einem Coordinatensysteme folgendermassen ausdrücken:

Die Geschwindigkeiten und die entsprechenden Beschleunigungen bis zur $(n-1)^{ten}$ Ordnung einschliesslich sind bei diesen beiden Bewegungen zur Zeit t geometrisch gleich.

Beweis. Es seien $v, v_1, v_2, \ldots$ die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen der ersten Bewegung, $u, u_1, u_2, \ldots$ die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen der zweiten Bewegung zur Zeit t; ferner seien MA und MB die von den Punkten m und m' in der unendlich kleinen Zeit τ durchlaufenen Wege. Da wegen der vorausgesetzten Art der Berührung der unendlich kleine Abstand AB von der Ordnung $a+1$ sein muss, so muss die Differenz der Sehnen MA und MB, die immer kleiner als AB ist, eine unendlich kleine Grösse von keiner niedrigeren Ordnung als $a+1$ sein. Nach Formel (2) §. 30. hat man nun:

$$\text{Sehne } \overline{MA} = \overline{v\tau} + \overline{\tfrac{1}{2}v_1\tau^2} + \ldots + \overline{\frac{1}{1.2\ldots n}} \, \overline{v_{n-1}\tau^n} + \overline{\varphi},$$

$$\text{Sehne } \overline{MB} = \overline{u\tau} + \overline{\tfrac{1}{2}u_1\tau^2} + \ldots + \overline{\frac{1}{1.2\ldots n}} \, \overline{u_{n-1}\tau^n} + \overline{\varphi'}.$$

Soll aber die Ordnung der Differenz dieser beiden Grössen nicht niedriger als $a+1$ sein, so ist erforderlich, dass

$$\overline{u} = \overline{v}, \ \overline{u_1} = \overline{v_1}, \ldots \overline{u_{n-1}} = \overline{v_{n-1}}$$

sei.

34. Als Anwendung dieser Methode, die Bedingungen der Berührung darzustellen, wollen wir die Schmiegungskugel einer doppelt gekrümmten Curve in einem ihrer Punkte bestimmen, d. h. diejenige Kugel, auf der man eine Curve ziehen kann, die mit der gegebenen Curve eine Berührung dritter Ordnung hat.

Bezeichnet R denjenigen Radius der gesuchten Kugel, welcher nach dem die sphärische Curve beschreibenden Punkte m' gezogen ist, so hat man infolge der Bedingung, dass die Länge von R constant bleiben soll, die Gleichungen:

$$\frac{d(R^2)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2(R^2)}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3(R^2)}{dt^3} = 0.$$

Betrachtet man nun R^2 als das Product $\overline{RR} = RR \cos(RR)$ und differentiirt dieses letztere geometrisch, so folgt

$$\overline{RR_1} = 0, \quad \overline{RR_2} + \overline{R_1 R_1} = 0, \quad \overline{RR_3} + 3\overline{R_1 R_2} = 0,$$

wo R_1, R_2, R_3 die geometrischen Derivirten des Radius R bedeuten. Nach der Bedingung aber, dass die sphärische Curve mit der gegebenen, vom Punkte m beschriebenen Curve im Punkte M eine Berührung dritter Ordnung haben soll, müssen jene Derivirten der Geschwindigkeit v und den Beschleunigungen v_1 und v_2 geometrisch gleich sein; dadurch gehen die obigen drei Gleichungen in die folgenden über:

$$Rv \cos(Rv) = 0, \quad Rv_1 \cos(Rv_1) + v^2 = 0,$$
$$Rv_2 \cos(Rv_2) + 3vv_1 \cos(vv_1) = 0. \qquad (1)$$

Setzt man die Geschwindigkeit $v = 1$, so hat man nach den Formeln (7), (8), (9), (10) des §. 28:

$$v_1 \cos(v_1 v) = \frac{dv}{dt} = 0, \quad v_1 \cos(v_1 \varrho) = v_1 = \frac{1}{\varrho},$$
$$v_2 \cos(v_2 \varrho) = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}, \quad v_2 \cos(v_2 r) = \frac{1}{\varrho r};$$

daher ist

$$v_1 \cos(Rv_1) = \frac{1}{\varrho} \cos(R\varrho),$$

und die beiden ersten der Gleichungen (1) geben:

$$\cos(Rv) = 0, \quad R\frac{1}{\varrho}\cos(R\varrho) + 1 = 0.$$

Die erste von diesen Gleichungen zeigt, dass R in der Normalebene liegt, die zweite giebt die Projection von R auf den Radius der ersten Krümmung

$$R \cos(R\varrho) = -\varrho \qquad (2)$$

und zeigt, dass diese Projection *dem Radius der ersten Krümmung entgegengesetzt gleich ist.*

Die dritte der Gleichungen (1) lässt sich schreiben

$$Rv_2 \cos(v_2 v) \cos(Rv) + Rv_2 \cos(v_2 \varrho) \cos(R\varrho)$$
$$+ Rv_2 \cos(v_2 r) \cos(Rr) = 0$$

und geht nun infolge der vorhergehenden Gleichungen über in

$$\frac{d\varrho}{ds} + \frac{1}{r} R \cos(Rr) = 0.$$

Hieraus erhält man die Projection von R auf den Radius der zweiten Krümmung

$$R\cos(Rr) = -r\frac{d\varrho}{ds}. \tag{3}$$

Durch die beiden Projectionen (2) und (3) ist aber die Richtung des Radius R der Schmiegungskugel und seine Grösse

$$R = \sqrt{\varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2}$$

bestimmt.

Die Gleichung (2) zeigt, dass das Centrum des Kreises der ersten Krümmung die Projection des Centrums der Schmiegungskugel auf die Ebene dieses Kreises ist. Der Kreis der ersten Krümmung ist daher der Durchschnitt der Schmiegungskugel mit der Ebene der ersten Krümmung.

35. Ist O der Mittelpunkt der ersten Krümmung, so nennt man die in diesem Punkte auf der Ebene der ersten Krümmung errichtete Senkrechte OC die *Pollinie* (Krümmungsaxe), weil jeder ihrer Punkte ein Pol des Kreises der ersten Krümmung ist, d. h. ein Punkt, der von allen Punkten der Peripherie dieses Kreises gleich weit absteht. Bei der Bewegung des Punktes m auf der gegebenen Curve erzeugt die Pollinie eine abwickelbare Fläche, die man *Polfläche* (Enveloppe der Normalebenen) nennt. Die dabei vom Mittelpunkte der ersten Krümmung O auf jener Fläche beschriebene Curve heisst *Linie der Mittelpunkte der ersten Krümmung;* die Normalebene MOC der gegebenen Curve berührt die Polfläche längs der ganzen Pollinie. Der Berührungspunkt der Pollinie mit der Gratlinie der Polfläche ist der Mittelpunkt der Schmiegungskugel.

Diese Eigenschaften der Curven lassen sich bekanntlich durch die Methode des Unendlichkleinen sehr einfach beweisen. Ich will zeigen, dass sie ebenso leicht aus den Formeln der §§. 28. und 34. abzuleiten sind.

Zunächst sei bemerkt, dass die Bedingung, welche erforderlich ist, wenn eine Gerade durch ihre Bewegung eine abwickelbare Fläche erzeugen soll, darin besteht, dass die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte in einer und derselben Ebene liegen; hierzu genügt aber, dass die Geschwindigkeiten $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ zweier ihrer Punkte, des Anfangs- und Endpunktes

irgend einer auf ihr angenommenen Strecke $\bar{u}$, in einer und derselben Ebene liegen. Setzt man $u = OC$ und ist $\bar{\alpha}$ die Geschwindigkeit des Punktes O und $\bar{\beta}$ die des Punktes C, so ist leicht zu beweisen, dass $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ zu der Geschwindigkeit $\bar{v}$ des Punktes M senkrecht gerichtet sind und daher in der Ebene MOC liegen. Da nämlich $\bar{v}$ und $\bar{\alpha}$ die Geschwindigkeiten des Anfangs- und Endpunktes des Radius der ersten Krümmung $MO = \varrho$ sind, so ist die geometrische Differenz dieser Geschwindigkeiten die geometrische Derivirte jenes Radius, d. h. $\bar{\varrho}_1 = \bar{\alpha} - \bar{v}$. Daher hat man:

$$\alpha \cos(\alpha v) = \varrho_1 \cos(\varrho_1 v) + v,$$

$$\alpha \cos(\alpha \varrho) = \varrho_1 \cos(\varrho \varrho_1), \quad \alpha \cos(\alpha r) = \varrho_1 \cos(\varrho_1 r);$$

aber nach den Formeln (6) §. 28. ist:

$$\varrho_1 \cos(\varrho_1 v) = -v, \quad \varrho_1 \cos(\varrho_1 \varrho) = \frac{d\varrho}{dt}, \quad \varrho_1 \cos(\varrho_1 r) = \frac{v}{r}\varrho;$$

folglich wird

$$\alpha \cos(\alpha v) = 0, \quad \alpha \cos(\alpha \varrho) = \frac{d\varrho}{dt}, \quad \alpha \cos(\alpha r) + \frac{v}{r}\varrho. \quad (1)$$

Hieraus ergiebt sich

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \frac{v^2\varrho^2}{r^2}} = \frac{v}{r}R \quad (2)$$

und $\cos(\alpha v) = 0$, womit bewiesen ist, dass α auf v senkrecht steht. Man trage nun auf der Geraden OC vom Punkte O aus eine Strecke auf, die dem Radius der zweiten Krümmung r gleich und von gleichem Sinne mit ihm ist, und es sei $\bar{\beta}$ die Geschwindigkeit des Endpunktes von r; dann ist die geometrische Derivirte dieser Strecke $\bar{r}_1 = \bar{\beta} - \bar{\alpha}$; also:

$$\beta \cos(\beta v) = r_1 \cos(r_1 v), \quad \beta \cos(\beta \varrho) = r_1 \cos(r_1 \varrho) + \alpha \cos(\alpha \varrho),$$

$$\beta \cos(\beta r) = r_1 \cos(r_1 r) + \alpha \cos(\alpha r).$$

Die Formeln (6) §. 28. liefern aber

$$r_1 \cos(r_1 v) = 0, \quad r_1 \cos(r_1 \varrho) = -v, \quad r_1 \cos(r_1 r) = \frac{dr}{dt};$$

folglich wird:

$$\beta \cos(\beta v) = 0, \quad \beta \cos(\beta \varrho) = -v + \frac{d\varrho}{dt}, \quad \beta \cos(\beta r) = \frac{dr}{dt} + \frac{v}{r}\varrho.$$

Man sieht hieraus, dass die Geschwindigkeit $\bar{\beta}$ nicht gleich

Null ist und dass sie auf der Richtung von $\overline{v}$ senkrecht steht. Es sind also beide Geschwindigkeiten $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ senkrecht zu $\overline{v}$, und sie liegen daher in der Ebene MOC; folglich erzeugt die Gerade OC eine abwickelbare Fläche.

Um auf dieser Geraden den der Gratlinie angehörigen Punkt C zu finden, muss man eine solche Strecke $OC = u$ suchen, bei der die Geschwindigkeit $\overline{\beta}$ des Endpunktes die Richtung von $\overline{u}$ hat.

Da $\overline{u_1} = \overline{\beta} - \overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ zu ϱ senkrecht sein muss, so ist

$$u_1 \cos(u_1 \varrho) = -\alpha \cos(\alpha \varrho),$$

oder

$$\pm \Theta \,.\, u = \alpha \cos(\alpha \varrho),$$

wo Θ die Winkelderivirte von $\overline{u}$ bedeutet. Dieselbe ist aber die Winkelderivirte des Radius der zweiten Krümmung $\overline{r}$; denn $\overline{u}$ ist parallel zu $\overline{r}$; also ist $\Theta = \frac{v}{r}$. Nun ist nach Formel (1) $\alpha \cos(\alpha \varrho) = \frac{d\varrho}{dt}$; folglich ist, vorausgesetzt, dass ϱ mit t zugleich wächst*):

$$\frac{v}{r} u = \frac{d\varrho}{dt};$$

hieraus folgt:

$$u = \frac{r}{v} \frac{d\varrho}{dt} = r \frac{d\varrho}{ds}. \tag{3}$$

Dies ist die Projection des Radius R der Schmiegungskugel auf die Pollinie, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen; also befindet sich der Anfangspunkt des Radius R, d. h. der Mittelpunkt der Schmiegungskugel, im Endpunkte von $\overline{u}$, d. h. auf der Gratlinie der Polfläche. Die Bedingung $\overline{u_1} = \overline{\beta} - \overline{\alpha}$ giebt noch:

$$\beta \cos(\beta r) = \frac{du}{dt} + \alpha \cos(\alpha r),$$

oder

$$\pm \beta = \frac{d\left(r \frac{d\varrho}{ds}\right)}{dt} + \frac{v}{r} \varrho.$$

---

*) Zur Vermeidung des doppelten Vorzeichens im Resultate wollen wir voraussetzen, dass ϱ zugleich mit t und mit dem vom Punkte m durchlaufenen Wege s wächst, was offenbar erlaubt ist, da die Bewegung dieses Punktes auf der gegebenen Curve willkürlich ist.

Die Grösse βdt ist das Differential des Weges σ, den der Punkt C in der Zeit t auf der Gratlinie zurücklegt; also ist

$$d\sigma = \pm \left[\frac{\varrho}{r}\, ds + d\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right)\right].$$

Da $\overline{R}_1 = \overline{v} - \overline{\beta}$, so ist:

$$\frac{dR}{dt} = -\beta\cos(R\beta) = \mp\beta\cos(Rr).$$

Man sieht hieraus, dass, wenn $\beta = 0$, $\frac{dR}{dt} = 0$ und $R = \text{Const.}$ ist. In diesem Falle geht die Gratlinie der Polfläche in einen Punkt über und die gegebene Curve ist eine sphärische. Doch genügt die eine Bedingung, dass $R = \text{Const.}$, nicht, damit die Curve eine sphärische ist; denn dann ist zwar $\beta\cos(Rr) = 0$, aber es kann der Fall eintreten, dass β nicht für jede Zeit t gleich Null ist, d. h. dass der Mittelpunkt der Schmiegungskugel keine constante Lage hat. In diesem Falle ist $\cos(Rr) = 0$ und dies erfordert, dass $r\frac{d\varrho}{ds} = 0$ ist. Dann befindet sich der Mittelpunkt der Schmiegungskugel im Mittelpunkt der ersten Krümmung O. Da r überhaupt nicht gleich Null sein kann (dies kann nur für singuläre Punkte der Fall sein), so ist $\frac{d\varrho}{ds} = 0$, d. h. der Radius der ersten Krümmung hat constante Länge; dabei ist, wie aus Gleichung (1) ersichtlich, $\alpha\cos(\alpha\varrho) = 0$, d. h. die Pollinie berührt die Linie der Mittelpunkte; folglich ist diese Linie die Gratlinie der Polfläche.

Wenn zugleich mit $\frac{d\varrho}{ds} = 0$ auch $r = \infty$ ist für jedes s, so ist die Curve ein Kreis vom Radius ϱ; dann ist $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ und daher ist die Gerade OC unbeweglich. Dabei nimmt der Ausdruck $R^2 = \varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$ eine unbestimmte Form an und der Radius R der Schmiegungskugel kann jeden beliebigen Werth haben. Ist jedoch bei $r = \infty$ die Derivirte $\frac{d\varrho}{ds}$ nicht gleich Null, so ist die Polfläche cylinderisch und der Radius der Schmiegungskugel unendlich gross.

VI. Capitel.

Geometrische Differentiation nach verschiedenen Variablen. — Geometrische Variationen. — Die geodätische Linie. — Die Brachistochrone.

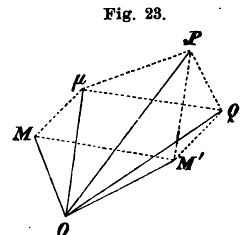
Wenn die Gerade $\overline{u}$ von zwei von einander unabhängigen Variablen t und x derart abhängt, dass Grösse und Richtung von $\overline{u}$ sich zugleich mit t bei constantem x ändern können und ebenfalls zugleich mit x bei constantem t, so ist $\overline{u}$ eine geometrische Function der beiden Variablen t und x. Von einer solchen Function lassen sich geometrische Derivirte verschiedener Ordnungen bilden und zwar entweder nur nach t, oder nur nach x, oder nach beiden Variablen.

Wir wollen nun mit $D_x^m D_t^n \overline{u}$ die geometrische Derivirte m^{ter} Ordnung nach x von der geometrischen Derivirten n^{ter} Ordnung nach t der gegebenen Function $\overline{u}$ bezeichnen. Wenn die Function $\overline{u}$ für jeden Werth von t und x nur einen einzigen bestimmten geometrischen Werth hat, d. h. wenn die Function, wie man sagt, einwerthig (monodrom) ist, so ändert die geometrische Derivirte ihren Werth nicht, wenn man die Reihenfolge der Differentiationen nach t und x ändert, d. h. es ist:

$$D_t D_x \overline{u} = D_x D_t \overline{u}.$$

Zum Beweise wollen wir annehmen, dass die Function $\overline{OM} = \overline{u}$ (Fig. 23) beim Uebergange von t in $t + \tau$ das geometrische Increment $\overline{MM'} = \overline{\Delta_t u}$ erhält und beim Uebergange von x in $x + \alpha$ das Increment $\overline{M\mu} = \overline{\Delta_x u}$. Die Strecke $\overline{OM'} = \overline{u} + \overline{\Delta_t u}$ geht, wenn x zu $x + \alpha$ wird, über in

Fig. 23.



$$\overline{OP} = \overline{u} + \overline{\Delta_t u} + \overline{\Delta_x u} + \overline{\Delta_x \Delta_t u},$$

und infolge der Einwerthigkeit der Function $\overline{u}$ erhält $O\mu$ denselben Werth, wenn t in $t + \tau$ übergeht; folglich ist:

$$\overline{u} + \overline{\Delta_t u} + \overline{\Delta_x u} + \overline{\Delta_x \Delta_t u} = \overline{u} + \overline{\Delta_x u} + \overline{\Delta_t u} + \overline{\Delta_t \Delta_x u}.$$

Dazu ist aber erforderlich, dass:

$$\overline{\Delta_t \Delta_x u} = \overline{\Delta_x \Delta_t u}. \qquad (1)$$

Zieht man $\overline{\mu Q} = \overline{MM'}$ und $\overline{M'Q} = \overline{M\mu}$, so folgt:

$$\overline{QP} = \overline{\Delta_x \Delta_t u} = \overline{\Delta_t \Delta_x u}.$$

Auf Grund von §. 30. kann man das Increment $\overline{\Delta_t u}$ als geometrische Summe darstellen:

$$\overline{\Delta_t u} = \tau \overline{D_t u} + \overline{\xi \tau^2},$$

wo $\overline{\xi \tau^2}$ die geometrische Summe aller Glieder bezeichnet, die höhere Derivirte von $\bar{u}$ nach t enthalten. Geht x in $x + \alpha$ über, so erhält die geometrische Derivirte $D_t \bar{u}$ das Increment

$$\overline{\alpha D_x D_t u} + \overline{\eta \alpha^2},$$

und $\overline{\xi \tau^2}$ erhält das Increment

$$(\overline{\alpha D_x \xi} + \overline{\omega \alpha^2})\tau^2,$$

wo $\overline{\eta \alpha^2}$ alle Glieder mit Derivirten höherer Ordnung von $D_t \bar{u}$ nach x enthält, und $\overline{\omega \alpha^2}$ alle Glieder mit Derivirten höherer Ordnung von ξ nach x; folglich ist:

$$\overline{\Delta_x \Delta_t u} = \tau \alpha \overline{D_x D_t u} + \bar{\varepsilon},$$

wo $\bar{\varepsilon}$ eine geometrische Summe von Gliedern von der Form $\overline{a \alpha^m \tau^n}$ ist, wenn $m + n > 2$.

Ebenso findet man

$$\overline{\Delta_t \Delta_x u} = \alpha \tau \overline{D_t D_x u} + \bar{\varepsilon}',$$

wo $\bar{\varepsilon}'$ dieselbe Form wie $\bar{\varepsilon}$ hat; folglich liefert die Gleichung (1)

$$\tau \alpha \overline{D_x D_t u} + \bar{\varepsilon} = \alpha \tau \overline{D_t D_x u} + \bar{\varepsilon}';$$

daraus folgt, wenn man mit $\alpha \tau$ dividirt und $\alpha = 0$, $\tau = 0$ setzt:

$$\overline{D_t D_x u} = \overline{D_x D_t u}.$$

In dieser Gleichung liegt aber der Beweis des obigen Satzes. Aus ihr ergiebt sich als Folgerung, dass allgemein

$$\overline{D_t^m D_x^n u} = \overline{D_x^n D_t^m u}.$$

Das totale Increment der Function $\bar{u}$, das von dem gleich-

zeitigen Uebergang des x in $x + \alpha$ und des t in $t + \tau$ herrührt, ist

$$\overline{MP} = \overline{\varDelta_x u} + \overline{\varDelta_t u} + \overline{\varDelta_x \varDelta_t u} =$$

$$= \overline{\alpha D_x u} + \overline{\tau D_t u} + \tfrac{1}{2}[\overline{\alpha^2 D_x{}^2 u} + \overline{2\alpha\tau D_x D_t u} + \overline{\tau^2 D_t{}^2 u}] + \ldots ;$$

dasselbe entspricht dem nach der Taylor'schen Formel in eine Reihe entwickelten Increment einer analytischen Function von zwei Variablen. Bei unendlich kleinem α ist die Strecke $\alpha D_x \overline{u}$ das partielle geometrische Differential der Function $\overline{u}$ nach x, und bei unendlich kleinem τ ist $\tau D_t \overline{u}$ das partielle Differential von $\overline{u}$ nach t; ihre Summe

$$\overline{du} = \overline{\alpha D_x u} + \overline{\tau D_t u}$$

ist das totale geometrische Differential von $\overline{u}$. Ueberhaupt kann man totales geometrisches Differential der n^{ten} Ordnung die Strecke

$$\overline{d^n u} = \overline{\alpha^n D_x^n u} + \overline{n\alpha^{n-1}\tau D_x^{n-1} D_t u} + \ldots + \overline{\tau^n D_t^n u}$$

nennen. Mit einem Worte, alles was von der Differentiation der analytischen Functionen mehrerer Variablen gilt, lässt sich auch auf die geometrische Differentiation der geometrischen Functionen von mehreren Variablen ausdehnen. Man kann das Increment $\overline{MM'} = \overline{\varDelta_t u}$ als eine mit τ zugleich verschwindende geometrische Function des Increments τ der Variablen t betrachten. Die Derivirten $D_t\overline{u}$, $D_t^2\overline{u} \ldots$ sind dasselbe wie

$$D_\tau \overline{\varDelta_t u},\quad D_\tau^2 \overline{\varDelta_t u} \ldots.,$$

das heisst, sie sind die geometrischen Derivirten von $\overline{MM'}$ nach τ, und $\tau D_t \overline{u}$ ist das geometrische Differential von $\overline{MM'}$ nach τ für $\tau = 0$.

Da dieses Differential aus dem Ausdruck

$$\overline{MM'} = \overline{\tau D_t u} + \overline{\xi\tau^2}$$

durch Vernachlässigung der von höherer Ordnung unendlich kleinen Grösse $\overline{\xi\tau^2}$ hervorgeht, so kann man, bei den Beweisen der verschiedenen Sätze nach der Methode des Unendlichkleinen der grösseren Anschaulichkeit halber $\overline{MM'}$ für

$\tau D_t \overline{u} = \tau D_t \overline{MM'}$ setzen, wobei in den Rechnungen die geometrische Differenz dieser Grössen vernachlässigt wird. Ebenso kann man bei unendlich kleinem α die Strecke $\overline{M\mu}$ für $\alpha D_x \overline{u}$ oder $\alpha D_\alpha \overline{M\mu}$ nehmen, indem man in den Rechnungen die geometrische Differenz dieser Grössen vernachlässigt. Die geometrische Derivirte zweiter Ordnung $\alpha D_t D_x \overline{u} = D_t \alpha D_\alpha \overline{M\mu}$ kann man mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung als die geometrische Derivirte $D_t \overline{M\mu}$ annehmen, welche die geometrische Differenz der Geschwindigkeiten der Punkte μ und M ist. Ebenso kann man $\tau D_x D_t \overline{u}$ als die geometrische Derivirte $D_x \overline{MM'}$ ansehen, welche die geometrische Differenz der Geschwindigkeiten der Punkte M' und M ist, wenn die Variable x als die Zeit betrachtet wird.

37. Wählt man für $\overline{M\mu}$ eine beliebige geometrische Function ε von zwei Variablen t und α (α und ε als unendlich klein vorausgesetzt), und lässt man ihren Anfangspunkt M (Fig. 24) sich auf einer gegebenen Trajectorie AB bewegen, so beschreibt der Endpunkt μ dabei eine gewisse Trajectorie $A'B'$, die sich von AB unendlich wenig unterscheidet, so dass für $\alpha = 0$ die Linie $A'B'$ in allen Punkten mit AB zusammenfällt; daher kann man $A'B'$ als eine Verschiebung der Linie AB betrachten, die durch Verschiebung jedes ihrer Punkte M um eine gewisse beliebige unendlich kleine Strecke $\overline{\varepsilon} = \overline{M\mu}$ entstanden ist. Wir wollen $\overline{\varepsilon}$ *die Variationsverschiebung des Punktes* M nennen, und die Linie $A'B'$ die *Variationsverschiebung der Linie* AB.

Fig. 24.

Die geometrische Differenz der Geschwindigkeiten der Bewegungen von μ und M ist die geometrische Derivirte erster Ordnung der Verschiebung $\overline{M\mu}$ bezüglich t und wie im vorigen Paragraphen gesagt wurde, kann dieselbe als das geometrische Differential der Geschwindigkeit des Punktes M bezüglich α angesehen werden. Ebenso ist die geometrische Differenz der Beschleunigungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bei der Bewegung der Punkte μ und M die geometrische Derivirte der n^{ten} Ordnung bezüglich t von der Verschiebung $\overline{M\mu}$ und kann als das geometrische Differential bezüglich α von der Beschleunigung

der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung bei der Bewegung des Punktes M angesehen werden. Wenn man also die geometrische Differentiation nach α durch das Zeichen $\overline{\delta}$ andeutet, so hat man:

$$\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\delta v}, \quad \overline{\varepsilon}_2 = \overline{\delta v_1}, \ldots . \overline{\varepsilon}_n = \overline{\delta v_{n-1}}.$$

Das geometrische Differential nach α wollen wir *geometrische Variation* nennen. Es ist also *die geometrische Derivirte* n^{ter} *Ordnung nach der Zeit* t *von der Variationsverschiebung* ε *gleich der geometrischen Variation der Beschleunigung* $(n - 1)^{ter}$ *Ordnung bei der Bewegung des Punktes* M. Die Grössen:

$$\delta v = \varepsilon_1 \cos(\varepsilon_1 v), \quad \delta v_1 = \varepsilon_2 \cos(\varepsilon_2 v_1), \ldots \delta v_{n-1} = \varepsilon_n \cos(\varepsilon_n v_{n-1})$$

sind die analytischen Variationen der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen der Bewegung des Punktes M. Aus den Ausführungen des vorhergehenden Paragraphen geht hervor, dass

$$\overline{\delta^m \varepsilon_n} = \overline{(\delta^m \varepsilon)_n} = \overline{\delta^{m+1} v_{n-1}};$$

d. h. *die geometrische Derivirte* n^{ter} *Ordnung nach der Zeit von der geometrischen Variation* m^{ter} *Ordnung der Verschiebung* $\varepsilon = M\mu$ *ist die geometrische Variation* $(m + 1)^{ter}$ *Ordnung von der Beschleunigung* $(n - 1)^{ter}$ *Ordnung bei der Bewegung des Punktes* M. Hier bleibt die Zeit t bei der Verschiebung von M nach μ constant, d. h. sie erleidet keine Variation. Man kann aber auch eine Variationsverschiebung $\xi = M\nu$ (Fig. 24) betrachten, bei der die Variable x constant bleibt, während t sich ändert. Zwischen den Variationsverschiebungen $\overline{\xi}$ und $\overline{\varepsilon}$ existirt eine gewisse Abhängigkeit, die in folgendem besteht. Wenn der Punkt μ in der Zeit t' nach ν kommt und der Punkt M in derselben Zeit, auf der Linie AB fortschreitend, nach M' gelangt, so ist die Verschiebung $M\nu$ die geometrische Summe der Verschiebungen $M\mu$ und MM'. Die Zeit t' ist eine Function der Variablen α und x und wird für $\alpha = 0$ zu t; vernachlässigt man daher unendlich kleine Grössen von höherer Ordnung als α, so muss man $t' - t = \delta t$ und $MM' = v\delta t$ setzen; folglich ist:

$$\overline{\xi} = \overline{\varepsilon} + \overline{v\delta t}.$$

Ausser den hier dargelegten Analogien zwischen den geometrischen und analytischen Derivirten und Variationen giebt

es noch andere, die ich für überflüssig halte anzuführen. Zur weiteren Erläuterung der letzten Paragraphen sollen hier zwei Aufgaben aus der Variationsrechnung gelöst werden.

38. *Die geodätische Linie.* Stellen wir uns die Aufgabe, die Eigenschaften der kürzesten unter allen Linien zu finden, die man auf einer gegebenen Fläche (S) zwischen zwei Punkten A und B ziehen kann. Nehmen wir an, der Punkt m bewege sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit $v = 1$ von A nach B, so wird er die kürzeste Linie in der kürzesten Zeit durchlaufen; denn die Zeit t ist dann dem durchlaufenen Wege s gleich. Es sei AMB (Fig. 25) die kürzeste Linie und $A\mu B$ ihre Variationsverschiebung, so dass $M\mu$ die Verschiebung eines ihrer Punkte bei constantem t ist.

Fig. 25.

Dabei wollen wir annehmen, dass $A\mu B$ keine singulären Punkte besitzt und dass $M\mu$ im Punkte A gleich Null ist. Bezeichnen wir nun mit s die ganze Länge AMB und tragen wir auf der Linie $A\mu B$ die Länge $A\mu B' = s$ auf. Der übrige Theil BB' dieser Linie ist das Variationsincrement der Länge s und gleich

$$\delta s + \tfrac{1}{2}\delta^2 s + \frac{1}{2\,.\,3}\delta^3 s + \ldots$$

Wegen der Bedingung, dass die Länge s ein Minimum sein soll, muss ihre erste Variation δs gleich Null sein, und es ist daher BB' eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung bezüglich der Veränderlichen α, von der die Verschiebnng ε abhängt. Und da man BB' als Variationsverschiebung des Punktes B ansehen kann und δs das geometrische Differential von s nach α ist, so ist ε im Punkte B gleich δs und folglich gleich Null. Nach der Formel für die Differentiation eines geometrischen Productes hat man:

$$\frac{d\cdot\overline{v\varepsilon}}{dt} = \overline{v_1\varepsilon} + \overline{\varepsilon_1 v},$$

wo $\overline{\varepsilon_1} = \overline{\delta v}$ und $\varepsilon_1 \cos(\varepsilon_1 v) = \delta v$ ist. Da sowohl die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes μ, als auch die des Punktes M gleich 1 ist, so verändert die Geschwindigkeit v durch die Verschiebung $M\mu$ ihre Grösse nicht; folglich ist $\delta v = 0$ und $\overline{\varepsilon_1 v} = v\delta v = 0$; daher wird

$$\frac{d\cdot\overline{v\varepsilon}}{dt} = \overline{v_1\varepsilon} \text{ oder } \frac{d\cdot\overline{v\varepsilon}}{ds} = \overline{v_1\varepsilon}, \tag{1}$$

wenn man $s = t$ setzt. Nimmt man hiervon das Integral von 0 bis s, so folgt

$$\Big|_0^s \overline{v\varepsilon} = \int_0^s v_1\varepsilon \cos(v_1\varepsilon)\, ds,$$

wo $\Big|_0^s \overline{v\varepsilon}$ die Differenz der Werthe des geometrischen Productes $v\varepsilon \cos(v\varepsilon)$ in den Punkten B und A bedeutet. Dieselbe ist gleich Null, weil für diese Punkte $\varepsilon = 0$ ist; folglich hat man:

$$\int_0^s v_1\varepsilon \cos(v_1\varepsilon)\, ds = 0 \tag{2}$$

Dies erfordert aber, dass

$$v_1\varepsilon \cos(v_1\varepsilon) = 0 \tag{3}$$

sei für jeden Punkt M der Linie AB. Wäre nämlich diese Bedingung nicht erfüllt, so wären nicht alle Elemente des Integrals (2) gleich Null, und in diesem Falle könnte man ε oder die Linie $A\mu B$ so wählen, dass alle diese Elemente dasselbe Zeichen hätten; dann könnte aber die Gleichung (2) nicht bestehen. Die Gleichung (3) zeigt, dass v_1 auf ε senkrecht stehen muss; v_1 ist aber auch senkrecht zur Tangente der Linie AMB im Punkte M, weil die Componente von v_1 auf dieser Tangente, d. h. $\frac{dv}{dt}$, als Derivirte der constanten Grösse $v = 1$, gleich Null ist; folglich ist v_1 senkrecht auf zwei Geraden, welche die Fläche (S), auf der die Linie AB liegt, im Punkte M berühren; daher ist v_1 normal zu dieser Fläche.

Die Richtung von v_1 ist zugleich die Richtung des Radius ϱ der ersten Krümmung der Curve AMB im Punkte M; also *hat die kürzeste Linie AMB die Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte der Radius ϱ der ersten Krümmung zu der Fläche, auf der diese Linie liegt, normal ist.* Man nennt überhaupt jede Linie, die diese Eigenschaft hat, eine *geodätische Linie;*

die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten auf einer Fläche ist also die geodätische.

Doch ist nicht jede geodätische Linie die kürzeste zwischen zweien ihrer Punkte. Es kann vorkommen, dass die geodätische Linie länger ist als die benachbarten, durch zwei ihrer Punkte A und B gelegten anderen Linien, oder dass sie zwar kürzer ist als einige, aber länger als andere und einigen gleich. Wenn nämlich der Radius ϱ der ersten Krümmung in jedem Punkte M der Linie AMB zu der Fläche (S) normal ist und wenn diese Linie die Bahn eines mit der Geschwindigkeit $v = 1$ fortschreitenden Punktes ist, so ist die Beschleunigung v_1 normal zur Fläche (S) und daher senkrecht zu jeder Variationsverschiebung ε; folglich ist $v_1 \cos(v_1 \varepsilon) = 0$; dadurch erhält man aus Gleichung (1) $\frac{d\,\overline{v\varepsilon}}{ds} = 0$ und $\Big|_0^s \overline{v\varepsilon} = 0$; setzt man also $\varepsilon = 0$ im Punkte A, so ist im Punkte B gleichfalls $\varepsilon = 0$; in diesem Falle ist aber die Differenz

$$BB' = A\mu B - AMB = \delta s + \tfrac{1}{2}\delta^2 s + \dots$$

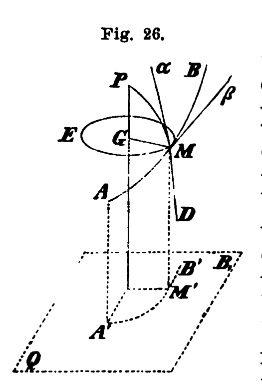
eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung bezüglich α; dazu ist erforderlich, dass $\delta s = 0$ sei, und dann hängt das Zeichen von BB' von dem Zeichen der ersten nicht verschwindenden unter den Variationen $\delta^2 s$, $\delta^3 s, \dots$ ab. Ist diese Variation von gerader Ordnung, so hat BB' das Zeichen $+$ oder $-$ für alle Variationsverschiebungen $A\mu B$; ist dagegen die erste nicht zu Null werdende von den Variationen $\delta^2 s$, $\delta^3 s, \dots$ von ungerader Ordnung, so ist BB' für einige Variationsverschiebungen positiv, für andere negativ und kann für einige Verschiebungen zu Null werden. Die geodätische Linie AB auf der Kugelfläche ist ein Bogen eines grössten Kreises und wird nur dann zur kürzesten Linie, wenn $AB < 180^0$ ist.*)

---

*) Jacobi hat gezeigt, dass es für die Länge der geodätischen Linie eine Grenze geben kann, über welche hinaus dieselbe die Eigenschaft eines Minimums verliert, nämlich wenn alle von demselben Punkte ausgehenden geodätischen Linien eine Enveloppe haben: dann bewahrt die geodätische Linie nur bis zum Berührungspunkte mit dieser Enveloppe

39. Auf Grund der Eigenschaft, das der Radius der ersten Krümmung der geodätischen Linie zu der Fläche, auf der sie gezogen ist, normal ist, kann man ihre Gleichung finden; wir werden später eine allgemeine Methode dafür zeigen; jetzt wollen wir uns darauf beschränken, die geodätische Linie auf einer Rotationsfläche zu bestimmen. Es sei (Fig. 26) PO die Rotationsaxe der Fläche, DM der durch einen beliebigen Punkt M der geodätischen Linie AB hindurchgehende Meridian, ME der durch denselben Punkt gehende Parallelkreis, CM der Radius dieses Kreises, QR eine beliebige zur Axe OP senkrechte Ebene, O ihr Durchschnitt mit dieser Axe, A', M' und $A'B'$ die Projectionen der Punkte A, M und der geodätischen Linie AB auf diese Ebene; endlich sei $OM' = r$ und $A'OM' = \varphi$. Die Normale im Punkte M der Rotationsfläche liegt bekanntlich in der Meridianebene DM; daher befindet sich auch der Radius der ersten Krümmung der geodätischen Linie in dieser Ebene; folglich fällt seine Projection in den Radiusvector $M'O$. Die Projection der Beschleunigung v_1 (bei der Bewegung des Punktes M auf der geodätischen Linie mit der Geschwindigkeit $v = 1$) fällt auch mit $M'O$ zusammen und repräsentirt die Beschleunigung erster Ordnung bei der Bewegung des Punktes M' auf der Curve $A'B'$.*) In §. 22. haben wir gesehen, dass, wenn die Be-

Fig. 26.



die Eigenschaft des Minimums und verliert dieselbe weiterhin. Eine solche Grenze kann nur auf einer convexconvexen Fläche, wie z. B. auf dem Ellipsoid, in jedem Punkte existiren. Die abwickelbaren und die concavconvexen Flächen haben keine solche Grenze. Vorlesungen über Dynamik S. 46. Journal von Crelle. T. 17. Mécanique analytique. Paris 1855. T. 2. Note VI.

*) Die geometrische Differenz der Beschleunigungen erster Ordnung der Punkte M und M' ist die geometrische Derivirte zweiter Ordnung des projicirenden Perpendikels $M'M$. Und da sich die Richtung dieses Perpendikels nicht ändert, so haben alle seine geometrischen Derivirten die Richtung der Geraden $M'M$, und daher sind ihre Projectionen auf die Ebene QR gleich Null; folglich ist die geometrische Differenz der

schleunigung erster Ordnung die Richtung des von einem festen Punkte nach einem beweglichen gezogenen Radiusvectors hat, die von diesem Radiusvector beschriebene Fläche der Zeit der Bewegung proportional ist; folglich ist die Sectorenfläche $A'OM'$ der Zeit t oder (da $t = s$ ist) der Strecke $AM = s$ proportional. Bezeichnet man mit c das constante Verhältniss der Sectorenfläche zu dem entsprechenden Bogen, so ist:

$$\tfrac{1}{2} r^2 d\varphi = c ds. \tag{1}$$

Wählt man ferner zur Bestimmung der Lage des Punktes M auf der Rotationsfläche die Polarcoordinaten r, φ und das projicirende Perpendikel $M'M = z$, so hat man aus der Gleichung der Fläche

$$z = f(r).$$

Das Bogendifferential ds der geodätischen Linie lässt sich zerlegen in das Differential $r d\varphi$ des Bogens des Parallelkreises ME und in das Differential des Bogens des Meridians $\sqrt{dr^2 + dz^2} = \sqrt{1 + [f'(r)]^2} . dr$, und da diese Componenten auf einander senkrecht sind, so ist

$$ds = \sqrt{r^2 d\varphi^2 + \{1 + [f'(r)]^2\} dr^2};$$

folglich geht die Gleichung (1) über in:

$$r^4 d\varphi^2 = 4c^2 (r^2 d\varphi^2 + \{1 + [f'(r)]^2\} dr^2);$$

daraus ergiebt sich

$$d\varphi = \pm \frac{2c\sqrt{1 + [f'(r)]^2} . dr}{r\sqrt{r^2 - 4c^2}}$$

und

$$\varphi = \pm 2c \int_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{1 + [f'(r)]^2} . dr}{r\sqrt{r^2 - 4c^2}}, \tag{2}$$

wo $r_0 = OA'$ ist und wo man das Zeichen $+$ oder $-$ nehmen muss, je nachdem φ bei wachsendem r wächst oder abnimmt.

Dies ist die Gleichung des Cylinders, der die geodätische Linie auf die Ebene QR projicirt; in Verbindung mit der

---

Projectionen der Beschleunigungen der Punkte M und M' auf die Ebene QR gleich Null, d. h. die Projection der Beschleunigung v_1 ist gleich der Beschleunigung des Punktes M'.

Gleichung der Rotationsfläche $z = f(r)$ stellt die Gleichung (2) die geodätische Linie selbst dar. Die Länge AM der geodätischen Linie ist durch das Integral ausgedrückt:

$$s = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{r \sqrt{1 + [f'(r)]^2} \, . \, dr}{\sqrt{r^2 - 4c^2}} \, . \tag{3}$$

Der Winkel α, welchen die Tangente der geodätischen Linie AB im Punkte M mit der Tangente des Meridians PD in demselben Punkte bildet, nennt man das *Azimuth der geodätischen Linie im Punkte M.* Da

$$r d\varphi = \sin \alpha \, . \, ds,$$

so hat man nach Gleichung (1)

$$\sin \alpha = \frac{2c}{r},$$

d. h. *das Azimuth ist dem Radius des entsprechenden Parallelkreises umgekehrt proportional.* Diese Eigenschaft der geodätischen Linie hat Clairaut*) gefunden. Wir empfehlen die Formeln (2) und (3) auf den geraden Kegel, das Rotationsellipsoid und die Ringfläche anzuwenden.

40. Die geodätische Linie auf einer abwickelbaren Fläche verwandelt sich in eine Gerade, wenn man die Fläche in eine Ebene ausbreitet; denn jede auf einer solchen Fläche gezogene Curve ändert bei der Abwickelung ihre Länge nicht, und es ist daher diejenige Curve, die sich bei der Abwickelung in eine Gerade verwandelt, die kürzeste Linie zwischen irgend zwei Punkten der Fläche.

Wir haben im §. 29. gesehen, dass das rechtwinklige Axensystem, welches von der Tangente und den beiden Hauptnormalen in einem beliebigen Punkte M der gegebenen Curve gebildet wird, eine Momentanaxe der Rotation hat, die man die *rectificirende Gerade* nennt und welche in der durch die Tangente und die zweite Hauptnormale gehenden Ebene liegt. Bei der Bewegung des Punktes M auf der gegebenen Curve erzeugt die rectificirende Gerade eine geradlinige Fläche; dieselbe ist immer abwickelbar; denn die Geschwindigkeit v des Punktes

*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1733.

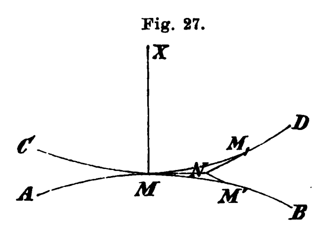
M und die Geschwindigkeit des Endpunktes einer der Rotationswinkelgeschwindigkeit $\omega = v\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ gleichen und auf der rectificirenden Geraden von M aus abgetragenen Strecke liegen in derselben Ebene. Dies lässt sich leicht auf folgende Art beweisen. Die geometrische Differenz dieser Geschwindigkeiten ist die geometrische Derivirte ω_1 der Strecke ω, und nach der zweiten Formel unter (6) §. 28. ist die Projection von ω_1 auf ϱ gleich Null; folglich liegt ω_1 in der Ebene der Geraden $\bar{v}$ und $\bar{r}$. Daher liegt die Geschwindigkeit des Endpunktes von ω, weil sie aus ω_1 und einer Geschwindigkeit gleich $\bar{v}$ zusammengesetzt ist, in derselben Ebene, wie die Geschwindigkeit $\bar{v}$ und die Gerade $\bar{\omega}$. Die rectificirende Gerade erzeugt also eine abwickelbare Fläche; diese Fläche umhüllt alle Lagen derjenigen Ebene, in welcher die Tangente und die zweite Hauptnormale liegen und die man die *rectificirende Ebene* nennt. Die gegebene Curve ist eine geodätische Linie auf dieser Fläche; denn ihr Radius der ersten Krümmung ϱ bleibt normal zu der Fläche. *Es verwandelt sich also jede Curve bei der Abwickelung der Enveloppe ihrer rectificirenden Ebene in eine gerade Linie.* Betrachtet man die Curve als ein aus unendlich kleinen Seiten bestehendes Polygon, so kann man sagen, dass durch eine Rotation um die rectificirende Gerade ω zwei Seiten dieses Polygons in eine gerade Linie ausgestreckt werden; durch successive Rotationen um die Geraden ω wird also die ganze Curve rectificirt. Daher kommt denn auch der Name jener Geraden ω.

41. Die geodätische Linie auf einer krummen Fläche bietet in vielen Beziehungen Analogien mit der geraden Linie in der Ebene dar; und die eine andere Curve auf derselben Fläche berührenden geodätischen Linien haben Aehnlichkeit mit den geradlinigen Tangenten an eine ebene Curve. Diese Aehnlichkeit führt auf den Begriff der geodätischen Krümmung der gegebenen Curve.

Es sei (Fig. 27) AB eine nicht geodätische, CD eine geodätische Curve, welche die erstere im Punkte M berührt. Der Winkel, den die Tangenten dieser Curven in den dem

Punkte M unendlich nahen Punkten M' und M_1 mit einander einschliessen, entspricht dem Contingenzwinkel einer ebenen Curve, d. h. er würde der Contingenzwinkel sein, wenn AB eine ebene Curve und CD eine Gerade wären. Dieser Winkel heisst der *geodätische Contingenzwinkel*; in seinem Ausdruck vernachlässigt man unendlich kleine Grössen höherer Ordnung.*)

Fig. 27.



Das Verhältniss des geodätischen Contingenzwinkels zum Bogendifferential der Curve AB heisst die *geodätische Krümmung* und das reciproke Verhältniss der *Radius der geodätischen Krümmung*. Es ist leicht, einen Ausdruck für diese Krümmung zu finden.

Man ziehe zu diesem Zwecke im Punkte M eine beliebige Tangente Mx an die Fläche (S), auf der die Curven AB und CD liegen; es sei dann mit x eine der Einheit gleiche, auf dieser Geraden Mx abgetragene Strecke, mit x_1 die geometrische Derivirte von x und mit φ der Winkel bezeichnet, welchen die Richtung von x mit der Tangente der Curve AB im Punkte M oder mit der Richtung der Geschwindigkeit v einer beliebigen Bewegung des Punktes M auf AB bildet. Nach der Formel (d) §. 24. für die Differentiation der Projectionen hat man

$$v_1 \cos(v_1 x) = \frac{d\,[v \cos(vx)]}{dt} - x_1 v \cos(v x_1)$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho x) = - \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} - x_1 \sin\varphi, \tag{a}$$

wenn man $v = 1$ setzt und mit ϱ den Radius der ersten Krümmung der Curve AB bezeichnet. Bedeutet ferner ϱ' den Radius der ersten Krümmung der geodätischen Curve CD

---

*) Wenn man die Curven AB und CD als Polygone von unendlich kleinen Seiten betrachtet, so kann man sagen, dass beide Curven eine gemeinsame Seite MN haben und dass die auf diese folgenden Seiten NM' und NM_1 divergiren und den unendlich kleinen Winkel $M'NM$ bilden, den man als geodätischen Contingenzwinkel ansehen kann.

und $d'\varphi$ den entsprechenden Werth von $d\varphi$, so erhält man aus derselben Formel

$$\frac{1}{\varrho'} \cos(\varrho' x) = -\sin\varphi \frac{d'\varphi}{ds} - x_1 \sin\varphi;$$

bei der geodätischen Linie ist aber die Richtung von ϱ' immer normal zur Fläche (S), also senkrecht auf x; daher ist:

$$0 = -\sin\varphi \frac{d'\varphi}{ds} - x_1 \sin\varphi.$$

Dabei hat x_1 denselben Werth sowohl für die Curve AB als auch für CD.*)

Subtrahirt man diese Gleichung von der Gleichung (a), so folgt:

$$\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho x) = \frac{d'\varphi - d\varphi}{ds} \sin\varphi.$$

Nimmt man nun für x die zu der gemeinsamen Tangente der Curven AB und CD im Punkte M senkrechte Richtung; so ist $\sin\varphi = 1$ und

$$\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho x) = \frac{d'\varphi - d\varphi}{ds}.$$

Hier ist $\pm (d'\varphi - d\varphi)$ offenbar dasselbe, was wir den geodätischen Contingenzwinkel nannten und $\pm \frac{d'\varphi - d\varphi}{ds}$ ist also die geodätische Krümmung. Das reciproke Verhältniss ist der Radius der geodätischen Krümmung, den wir mit g bezeichnen wollen. Trägt man die Länge g vom Punkte M aus in der Richtung von x oder in der entgegengesetzten auf,

---

*) Davon kann man sich folgendermassen überzeugen. Angenommen, Mx berühre eine gewisse Curve, die sich auf der Fläche (S) bewegt und zur Zeit $t + dt$ die Curven AB und CD in den Punkten M und M_1 schneidet. Ferner sei Mx' eine Parallele zu der Richtung, welche Mx annimmt, wenn M nach M' gelangt, und Mx'' eine Parallele zu der Richtung, die Mx beim Uebergange des Punktes M in M_1 annimmt. Die Winkel xMx' und xMx'' sind von derselben, der Winkel $x'Mx''$ aber von höherer Ordnung unendlich klein; denn der letztere ist gleich dem Winkel der in den Punkten M' und M_1 an den Bogen $M'M_1$ gelegten Tangenten; jener Bogen $M'M_1$ aber ist unendlich klein von der zweiten Ordnung; folglich ist die Differenz der Winkel xMx' und xMx'' ebenfalls von höherer Ordnung und ihre Verhältnisse zu dt haben daher dieselbe Grenze x_1.

je nachdem $d'\varphi - d\varphi$ positiv oder negativ ist, so hat man jedenfalls

$$\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho g) = \frac{1}{g},$$

folglich

$$g \cos(\varrho g) = \varrho,$$

d. h. *der Radius der ersten Krümmung jeder beliebigen auf einer gegebenen Fläche (S) verzeichneten Curve ist die Projection des Radius der geodätischen Krümmung auf die erste Hauptnormale, wenn man dessen Länge auf der in die Tangentenebene der Fläche (S) fallenden Normale der Curve aufträgt.*

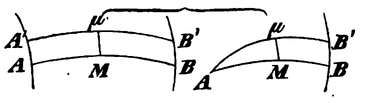
Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich g bestimmen, wenn ϱ bekannt ist. Zu diesem Zwecke errichtet man im Mittelpunkte der ersten Krümmung ein Perpendikel auf der Ebene der ersten Krümmung und bestimmt dessen Schnittpunkt mit der Tangentenebene der Fläche (S) im Punkte M. Diesen Schnittpunkt kann man den Mittelpunkt der geodätischen Krümmung nennen und sein Abstand vom Punkte M ist der Radius der geodätischen Krümmung.

Aehnlich, wie für die Gerade der Krümmungradius unendlich gross ist, wird für die geodätische Linie der Radius der geodätischen Krümmung g unendlich; denn es wird $d'\varphi - d\varphi = 0$.

42. Wir wollen nun noch eine höchst wichtige, von Gauss gefundene Eigenschaft der geodätischen Linien beweisen. *Legt man* nämlich *durch die Punkte einer beliebigen auf einer Fläche (S) liegenden Curve (C) normal zu dieser geodätische Linien, oder zieht man von einem beliebigen auf der Fläche (S) gelegenen Punkte A nach den Punkten der Curve (C) geodätische Linien und macht man dieselben sämmtlich gleich lang, so liegen ihre Endpunkte auf der orthogonalen Trajectorie des Systems der geodätischen Linien.*

Zum Beweise dieses Satzes wollen wir annehmen, AB und $A'B'$ (Fig. 28) seien zwei unendlich nahe, gleich lange geodätische Linien, die durch die Punkte A und A' der Curve (C) normal zu dieser gezogen sind und betrachten sie als

Fig. 28.



Bahnen der Punkte M und μ, die sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = 1$ fortbewegen. Man kann dann $M\mu = \varepsilon$ als Variationsverschiebung des Punktes M ansehen und die Formel (1) §. 38. auf diesen Punkt anwenden; dieselbe giebt:

$$\frac{d \cdot \overline{v\varepsilon}}{dt} = 0 \text{ oder } \frac{d\,[\varepsilon \cos(\varepsilon v)]}{dt} = 0.$$

Dies erfordert, dass $\varepsilon \cos(\varepsilon v)$ einer constanten Grösse gleich sei. Diese Constante ist aber gleich Null; denn im Punkte A hat man $\varepsilon \cos(\varepsilon v) = AA' \cos(A'AM)$. Ist nun das System der geodätischen Linien zu einer Curve (C) normal, so ist der Winkel $A'AM$ ein Rechter; gehen dagegen die geodätischen Linien von einem festen Punkte A aus, so ist $AA' = 0$. Man hat also für jedes t oder $s = AM$ die Relation $\cos(\varepsilon v) = 0$, d. h. die Richtung von ε ist normal zu AB im Punkte M und folglich auch im Punkte B; daher ist die durch alle Punkte B hindurchgehende Curve in diesen Punkten normal zu den geodätischen Linien AB.

In dem Abschnitt über die krummlinigen Coordinaten auf einer gegebenen Fläche werden wir auf die geodätische Linie zurückkommen und eine Anwendung des eben bewiesenen Satzes zeigen.

43. *Die Brachistochrone.* Als zweite Anwendung der Variationsrechnung wollen wir die folgende Aufgabe lösen.

Es sei $M(xy)$ ein auf ein rechtwinkliges Axensystem Ox, Oy bezogener Punkt, der sich in der Ebene dieser Axen derart bewegt, dass für jede seiner Trajectorien die Geschwindigkeit v der Bewegung eine gegebene Function $F(x)$ der Abscisse ist. Es frägt sich, *auf welcher Curve der Punkt sich von A nach B bewegen muss, um den Weg AB in der kürzesten Zeit zu beschreiben.* Die Curve, welche diese Eigenschaft hat, heisst *Brachistochrone.*

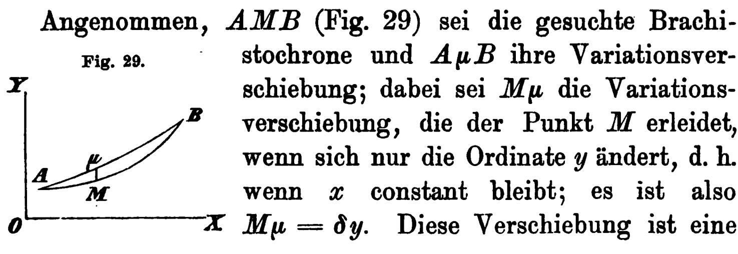


Fig. 29.

Angenommen, AMB (Fig. 29) sei die gesuchte Brachistochrone und $A\mu B$ ihre Variationsverschiebung; dabei sei $M\mu$ die Variationsverschiebung, die der Punkt M erleidet, wenn sich nur die Ordinate y ändert, d. h. wenn x constant bleibt; es ist also $M\mu = \delta y$. Diese Verschiebung ist eine

geometrische Function der Variablen x, und diese Function behält ihre zu Oy parallele Richtung bei; daher ist ihre geometrische Derivirte nach x gleich $\frac{d\delta y}{dx}$; sie ist aber nach §. 37. geometrisch gleich der geometrischen Variation der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dx}$, mit der sich der Punkt M auf AB bewegt, wenn die Zeit der Bewegung gleich x ist; folglich ist die Projection von $\frac{d\delta y}{dx}$ auf das auf der Tangente der Curve AMB in M aufgetragene Element ds gleich $\delta\frac{ds}{dx}$. Da der Cosinus des Winkels dieser Tangente mit der Axe Oy gleich $\frac{dy}{ds}$ ist, so hat man

$$\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{ds}=\delta\frac{ds}{dx}.$$

Die Zeit t ist eine gewisse Function von x, und daher ist $\frac{ds}{dx}=v\cdot\frac{dt}{dx}$, wo nach der Bedingung des Problems $v=F(x)$ ist; also hat man

$$\delta\frac{ds}{dx}=\delta\left[F(x)\frac{dt}{dx}\right]=F(x)\cdot\delta\frac{dt}{dx}=F(x)\frac{d\delta t}{dx}$$

und

$$\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{ds}=F(x)\cdot\frac{d\delta t}{dx};$$

daraus folgt

$$\frac{d\delta t}{dx}\cdot dx=$$

$$\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\delta y}{dx}dx=d\left[\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\cdot\delta y\right]-d\left(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\right)\cdot\delta y.$$

Nimmt man das Integral dieses Ausdrucks zwischen den Grenzen a und b, welches die Werthe von x in den Punkten A und B sind, so ergiebt sich

$$\delta t=\Big|_a^b\left(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\delta y\right)-\int_a^b d\left(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\right)\cdot\delta y, \qquad (1)$$

wo $\Big|_b^a$ die Differenz der Werthe bezeichnet, welche die Function $\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\delta y$ durch Substitution von b und a für x annimmt.

Diese Werthe sind aber gleich 0; denn für $x = a$ und $x = b$ wird $\delta y = 0$. Man hat demnach:

$$\delta t = -\int_a^b d\left(\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds}\right) \delta y. \tag{2}$$

Wegen der Bedingung, dass für die Bahn AMB die Zeit t ein Minimum ist, muss $\delta t = 0$ sein und folglich ist:

$$\int_a^b d\left(\frac{1}{F(x)} \frac{dy}{ds}\right) \cdot \delta y = 0. \tag{3}$$

Dies erfordert, dass

$$d\left(\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds}\right) = 0 \tag{4}$$

für jeden Werth von x zwischen a und b.*) Durch Integration dieser Gleichung ergiebt sich

$$\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds} = c, \tag{5}$$

wo c eine Constante ist. Die Gleichung (5) drückt eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Brachistochrone aus, dass nämlich *das Verhältniss der Geschwindigkeit der Bewegung zum Cosinus des von ihr mit der Axe Oy gebildeten Winkels constant ist.* Die Gleichung lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \, . \, F(x);$$

daraus ergiebt sich

$$y' = \frac{cF(x)}{\sqrt{1 - c^2 \, [F(x)]^2}}$$

und hiermit erhält man als Gleichung der *Brachistochrone*

---

*) Wenn nämlich $d\left(\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds}\right)$ nicht für jeden Werth von x zwischen a und b gleich Null wäre, so könnte die Gleichung (3) nicht bei jeder Variation δy bestehen; denn man kann dann eine Curve $A\mu B$ so ziehen, dass δy für jedes x dasselbe Zeichen wie $d\left(\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds}\right)$ hat; dadurch werden die Elemente des Integrals sämmtlich positiv und sein Werth kann daher nicht gleich Null sein.

$$y = c \int_a^x \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1 - c^2\,[F(x)]^2}} + a', \tag{6}$$

worin a' die Ordinate des Punktes A ist.

Nehmen wir nun an, dass bei allen Bewegungen des Punktes auf verschiedenen Curven zwischen A und B die Beschleunigung erster Ordnung v_1, wenn man sie in eine zur Bahn senkrechte und eine der Axe Ox parallele Componente zerlegt, für diese letztere den constanten Werth g liefert.*) In diesem Falle ist die Projection der Beschleunigung auf die Tangente:

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{dx}{ds};$$

daraus ergiebt sich $v\,dv = g\,dx$ und $v^2 = 2g\,(x - a) + v_0^2$, wo v_0 die Geschwindigkeit im Punkte A ist. Angenommen, diese Geschwindigkeit sei gleich Null; dann ist $v^2 = 2g\,(x - a)$ und $F(x) = \sqrt{2g\,(x - a)}$. Nach Formel (6) ergiebt sich daher als Gleichung der Brachistochrone in diesem Falle

$$y = c \int_a^x \frac{\sqrt{2g\,(x - a)}}{\sqrt{1 - 2c^2 g\,(x - a)}}\,dx + a',$$

wo a' die Ordinate des Punktes A ist, oder

$$y = \int_a^x \frac{(x - a)\,dx}{\sqrt{2r\,(x - a) - (x - a)^2}} + a',$$

wo $2r = \frac{1}{2c^2 g}$ ist. Führt man die Integration aus, so findet man:

$$y = r \arccos\left(\frac{r - x + a}{r}\right) - \sqrt{r^2 - (r - x + a)^2} + a'. \tag{7}$$

Dies ist die Gleichung einer Cykloide. Um dies besser sehen zu können, verlegen wir den Coordinatenanfang nach A, bezeichnen die neuen Coordinaten mit ξ und η und setzen

---

*) Diese Eigenschaft hat die Bewegung eines Punktes auf einer Curve infolge der Wirkung der Schwere, wenn keine Reibung stattfindet.

$\arccos\left(\frac{r-x+a}{r}\right) = \omega$; dann erhält man statt Gleichung (6) die zwei Gleichungen:

$$\xi = r(1-\cos\omega), \quad \eta = r(\omega - \sin\omega),$$

welche, wie bekannt, eine Cykloide darstellen, die durch das Rollen eines Kreises vom Radius r auf der Axe $A\eta$ erzeugt wird und im Punkte A beginnt. Der Radius r bestimmt sich aus der Bedingung, dass die Cykloide durch einen gegebenen Punkt B hindurchgehen soll. Bezeichnet man mit b und b' die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf die ursprünglichen Axen, so erhält man die transcendente Gleichung

$$b' = r\arccos\left(\frac{r-b+a}{r}\right) - \sqrt{r^2-(r-b+a)^2} + a'$$

zur Berechnung von r.

Die Zeit t, in der der Punkt den Weg AB durchläuft, bestimmt sich durch die Formel:

$$t = \int_a^b \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{F(x)} = \int_a^b \frac{dx}{F(x)\cdot\sqrt{1-c^2[F(x)]^2}};$$

für den vorliegenden speciellen Fall ist $F(x) = \sqrt{2g(x-a)}$, also

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\arccos\left(\frac{r-b+a}{r}\right).$$

Diese Zeit ist immer ein Minimum, weil die Variation zweiter Ordnung $\delta^2 t$, wie leicht zu sehen, immer positiv ist. Aus Formel (1) folgt nämlich

$$\delta^2 t = \delta\Big|_a^b \left(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\right)\delta y - \int_a^b \delta\left[d\left(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\right)\delta y\right],$$

wo der vom Integralzeichen freie Theil gleich Null ist; denn $\delta y = 0$ und $\delta^2 y = 0$ für $x = a$ und $x = b$ in Folge der Unveränderlichkeit der Lage der Punkte A und B. Der unter dem Integralzeichen befindliche Ausdruck lässt sich auf den folgenden reduciren

$$\delta d\left(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\right)\delta y + d\left(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\right)\delta^2 y,$$

wo das zweite Glied in Folge der Gleichung (4) verschwindet und das erste unter der Form dargestellt werden kann
$d\delta\left(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta y$, was gleich $d\left(\frac{\delta y'}{F(x)\,(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y$ ist;
folglich wird:

$$\delta^2 t = -\int_a^b d\left(\frac{\delta y'}{F(x)\,(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y.$$

Integrirt man durch Theile und beachtet, dass der auf die Grenzen des Integrals bezügliche Theil verschwindet, so folgt endlich:

$$\delta^2 t = \int_a^b \frac{(\delta y')^2}{F(x)\,(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int_a^b \frac{dt}{dx}\left(\frac{\delta y'}{1+y'^2}\right)^2 dx.$$

Alle Elemente dieses Integrals sind positiv, und daher ist $\delta^2 t > 0$, folglich hat t ein Minimum.*)

VII. Capitel.

Function eines Punktes. — Niveau. — Allgemeine Coordinatenmethode. — Differentialparameter erster Ordnung. — Die wichtigsten Coordinatensysteme.

44. Wenn eine Grösse V von dem in einem gewissen Raume (A) angenommenen Punkte m derart abhängt, dass sie für jede Lage von m in jenem Raume einen oder mehrere bestimmte Werthe hat, die sich nur durch die Bewegung des Punktes m ändern können, so heisst sie eine Function des Punktes m, was wir allgemein durch $V = f(m)$ bezeichnen wollen.

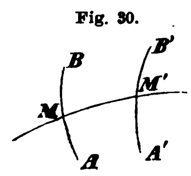
Lehrsatz. Wenn V für jede Lage des Punktes m in einem Raume von drei Dimensionen (A) nur einen einzigen reellen Werth hat, der weder zu Null wird, noch auch ein Maximum oder Minimum bezüglich der den Nachbarpunkten von m entsprechenden Werthe ist, so geht durch jeden Punkt M

*) Der Beweis dieses Satzes ist bei **Moigno**, Leçons de calcul diff. et int., T. 4: Calcul des variations, pag. 230 zu finden.

des Raumes (A) eine Fläche von der Eigenschaft, dass V für jeden ihrer Punkte denselben Werth hat.

Beweis. Gesetzt, V habe im Punkte M (Fig. 30) den Werth c. Da c kein absolutes Maximum oder Minimum ist, so kann man in der Nähe von M zwei Punkte A und B so wählen, dass einer der beiden Werthe $f(A)$ und $f(B)$ kleiner, der andere grösser als c ist und dass bei der Bewegung des Punktes m von A nach B auf einer gewissen durch M gehenden Linie AB die Function V entweder fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt. Es sei $f(A) < c < f(B)$. Verschiebt man nun die Linie AB nach $A'B'$ um so wenig, dass die Differenz zwischen $f(A')$ und $f(A)$ kleiner als $c - f(A)$ und die Differenz zwischen $f(B')$ und $f(B)$ kleiner als $f(B) - c$ ist, so hat man $f(A') < c < f(B')$; bei der Bewegung des Punktes m von A' nach B' geht daher die Function $f(m)$ von einem Werthe, der kleiner als c ist, in einen Werth, der grösser als c ist, über und muss daher in einem gewissen Punkte M' der Linie $A'B'$ einen dem c gleichen Werth haben. Wenn sich also AB continuirlich bewegt, so giebt es in jeder seiner Lagen auf ihm einen Punkt, in dem $V = c$ ist. Daraus ist ersichtlich, dass, während AB durch seine Bewegung eine Fläche erzeugt, der Punkt M dabei auf dieser Fläche eine Linie verzeichnet, die die Eigenschaft hat, dass in allen ihren Punkten $V = c$ ist. Bei der Bewegung dieser Fläche erzeugt aber die vom Punkte M beschriebene Linie eine Fläche, die die Eigenschaft hat, dass in jedem ihrer Punkte $V = c$ ist.

Fig. 30.



Die Fläche, welche alle Punkte enthält, für die die Function V einen und denselben Werth hat, nennt man die *Niveaufläche* oder das *Niveau*. Wir werden die einem gegebenen Werthe von V entsprechende Niveaufläche mit (V) bezeichnen.

Als Beispiele von Punktfunctionen können dienen: 1) eine gerade Strecke mA, die vom Punkte m parallel mit einer gegebenen Geraden l gezogen wird; 2) der Abstand des Punktes m von einem gegebenen Punkte O; 3) der Winkel mOx, den die Gerade Om mit einer gegebenen Geraden Ox bildet; 4) der Flächenwinkel, den die Ebene mOx mit einer gegebenen

durch die Gerade Ox gehenden Ebene P bildet. Im ersten Falle ist das Niveau eine der Ebene P parallele Ebene; im zweiten eine Kugelfläche vom Mittelpunkte O und vom Radius Om; im dritten eine Kegelfläche, die durch Rotation des Winkels mOx um Ox als Axe entsteht; im vierten endlich die Ebene mOx.

45. Die veränderliche Grösse V kann Function eines Punktes m sein, der der Bedingung unterworfen ist, auf einer gegebenen Fläche (S) zu bleiben. Wenn hierbei V nur je *einen* endlichen Werth für jede Lage des Punktes m auf der ganzen Ausdehnung der Fläche (S) oder auch nur in einem gewissen Theile derselben hat, so kann man durch jeden Punkt M der Fläche, resp. des betreffenden Theiles derselben eine Linie von der Eigenschaft ziehen, dass V für jeden ihrer Punkte denselben Werth hat. Eine Linie aber von der Eigenschaft, dass für jeden ihrer Punkte V einen und denselben Werth hat, nennt man eine *Niveaulinie auf der Fläche* (S). Wir werden sie mit (V) bezeichnen.

Wenn V Function eines Punktes m in einem Raume von drei Dimensionen ist, durch welchen die Fläche (S) geht, so ist der Schnitt der Niveaufläche (V) mit der Fläche (S) eine Niveaulinie (V) auf (S). Als Beispiele von Punktfunctionen in der Ebene können dienen: 1) die geradlinigen Coordinaten x und y des Punktes in der Ebene; 2) seine Polarcoordinaten, d. h. der Radiusvector r und der Winkel φ, den er mit einer gegebenen Axe bildet. Im ersten Falle sind die Niveaulinien den Coordinatenaxen parallele Gerade, im zweiten ist die Niveaufläche des Radiusvectors ein mit dem Radius r aus dem Pole als Mittelpunkt beschriebener Kreis, während die Niveaulinie des Winkels φ die Gerade ist, auf der der Radiusvector aufgetragen ist.

Auch die geographische Länge und Breite eines Punktes auf einer Kugelfläche, welche die Erdkugel darstellt, sind Functionen dieses Punktes. Das Niveau der ersteren Function ist der Meridian des Punktes, das der zweiten sein Parallelkreis.

46. Eine Function $f(V, V', V''...)$ von mehreren Functionen $V, V', V''...$ eines und desselben Punktes m ist gleichfalls eine Function dieses Punktes. Wenn $f(V)$ eine Function von nur einer Punktfunction V ist, so ist das Niveau der letzteren

auch das Niveau von $f(V)$; denn bei constantem V bleibt auch $f(V)$ constant.

Wenn der Punkt m bei seiner Bewegung auf einem und demselben Niveau bleibt, so bleibt die Function V constant; sie ändert sich dagegen, sowie der Punkt m das Niveau verlässt. Dabei erhält V ein gewisses Increment ΔV; dasselbe ist positiv, wenn der Punkt m sich nach der einen, und negativ, wenn er sich nach der anderen Seite hin bewegt. Daher gehören die Ungleichungen $\Delta V > 0$ und $\Delta V < 0$ zwei durch das Niveau getrennten Räumen an und können zur Unterscheidung der Punkte des einen Raumes von denen des anderen dienen. Bewegt sich der Punkt m auf einer beliebigen das Niveau dieses Punktes durchschneidenden Bahn, so wird V zu einer Function der Zeit t der Bewegung und zugleich zu einer Function des von dem Punkte in dieser Zeit durchlaufenen Weges s.

47. Vermittelst dieser Begriffe von Punktfunctionen kann man zu dem allgemeinsten Begriffe von den Coordinaten eines Punktes m gelangen.

Es seien q_1, q_2, q_3 drei reelle eindeutige Functionen des Punktes m im Raume. Jede von ihnen hat ein durch m hindurchgehendes Niveau. Wenn diese drei Niveaux nicht durch dieselbe Linie hindurchgehen und nicht zusammenfallen, so bestimmen sie durch ihren Schnitt den Punkt m, und man kann daher q_1, q_2, q_3 als Coordinaten des Punktes m ansehen. Die Niveaux (q_1), (q_2), (q_3) werden wir *Coordinatenflächen*, ihre Schnittcurven aber *Coordinatenlinien* nennen. Dabei soll im Folgenden mit $(q_2 q_3)$ die Schnittlinie der Flächen (q_2) und (q_3), mit $(q_3 q_1)$ die Schnittlinie von (q_3) und (q_1) und mit $(q_1 q_2)$ die Schnittlinie von (q_1) und (q_2) bezeichnet werden.

Wenn bei jeder Lage des Punktes m die Tangenten der Coordinatenlinien auf einander senkrecht stehen, so heissen die Coordinaten *orthogonal* oder rechtwinklig; hierher gehören die geradlinigen rechtwinkligen und die Polarcoordinaten. Später werden wir noch andere orthogonale Coordinatensysteme kennen lernen. Die Tangenten der Coordinatenlinien im Punkte m wollen wir die *Coordinatenaxen* nennen.

Wenn q_1 und q_2 Functionen des Punktes m auf einer ge-

wissen Fläche (S) sind und die Niveaulinien dieser Functionen sich schneiden, so kann man q_1 und q_2 als Coordinaten des Punktes m ansehen. Die Niveaulinien (q_1) und (q_2) der Coordinaten werden wir *Coordinatenlinien* nennen. Die Coordinaten sind orthogonal, wenn die Tangenten der Coordinatenlinien im Punkte m für jede Lage dieses Punktes auf einander senkrecht stehen.

48. Drei Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ der Coordinaten q_1, q_2, q_3 können ebenfalls als Coordinaten eines Punktes angesehen werden, wenn sie von einander unabhängig sind, d. h. wenn zwischen ihnen keine Gleichung von der Form

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0 \tag{a}$$

besteht, welche die Coordinaten q_1, q_2, q_3 nicht explicit enthält und durch Substitution der Ausdrücke von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zu einer Identität bezüglich q_1, q_2, q_3 wird. Existirt aber eine solche Gleichung (a), so schneiden sich im allgemeinen die Niveauflächen (φ_1), (φ_2), (φ_3) in jeder ihrer Lagen in einer gewissen Linie. Denn wenn φ_2 und φ_3 constant sind, so wird dann infolge der Gleichung (a) auch φ_1 constant; folglich liegen alle Punkte der Linie ($\varphi_2\varphi_3$) auf der Fläche (φ_1). In diesem Falle ist die Lage des Punktes durch den Schnitt der Flächen (φ_1), (φ_2), (φ_3) nicht vollständig bestimmt und man kann daher die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nicht zu Coordinaten des Punktes wählen. Die Bedingung, die zur Existenz der Gleichung (a) nothwendig und hinreichend ist, besteht darin, dass die Functionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden muss (wie aus der Theorie der Determinanten bekannt ist).

Mithin können die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nur dann als Coordinaten eines Punktes gewählt werden, wenn D nicht identisch gleich Null ist. Die Functionen

$$\varphi_1 = q_2 + q_3, \quad \varphi_2 = q_3 + q_1, \quad \varphi_3 = q_1 + q_2$$

können z. B. als Coordinaten genommen werden; denn für sie ist $D = 2$. Dagegen geben die Functionen

$$\varphi_1 = bq_3 - cq_2, \quad \varphi_2 = cq_1 - aq_3, \quad \varphi_3 = aq_2 - bq_1,$$

wo a, b, c constante Grössen bedeuten, identisch $D = 0$; sie sind durch die Gleichung $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 = 0$ verbunden und können daher nicht als Coordinaten gewählt werden.

Es kann aber auch vorkommen, dass, obwohl die Determinante D nicht identisch verschwindet und also keine Gleichung (a) besteht, die Fläche (φ_1) dennoch bei einer gewissen speciellen Lage der Linie $(\varphi_2\varphi_3)$ durch diese letztere hindurchgeht. Ist z. B. $\varphi_1 = \alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3$, wo α und β beliebige explicite Functionen der Variablen q_1, q_2, q_3 sind, so geht die Determinante D über in den Ausdruck

$$\varphi_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial q_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} + \varphi_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} & \frac{\partial \beta}{\partial q_2} & \frac{\partial \beta}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} \end{vmatrix},$$

welcher nicht identisch verschwindet; derselbe wird aber zu Null in dem speciellen Falle, wenn $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ ist. Für die den beiden letzten Gleichungen genügenden Werthe von q_1, q_2, q_3 wird aber auch die Function φ_1 zu Null; folglich schneiden sich die drei Flächen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ in einer Linie.

In den vorhergehenden Capiteln haben wir geradlinige, polare und sphärische (§. 3, Beispiel 3) Coordinaten angewendet. Doch erweisen sich diese Coordinaten oft als unbequem, da sie häufig zu langen Rechnungen führen; zur Vermeidung dessen hat man andere Arten von Coordinaten in Anwendung gebracht. Wir werden im Folgenden einige derselben betrachten.

49. Wenn ein beweglicher Punkt m durch drei Coordinaten q_1, q_2, q_3 bestimmt ist, so ist mindestens eine von denselben eine Function der Zeit t der Bewegung. Wenn nur die Coordinate q_1 eine Function von t ist, so ist die Coordinatenlinie (q_2q_3) die Bahn des beweglichen Punktes. Wenn dagegen zwei Coordinaten q_1 und q_2 Functionen der Zeit sind

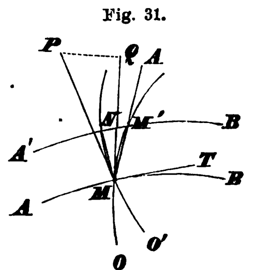
und die dritte q_3 constant bleibt, so beschreibt der Punkt m eine Linie auf der festen Coordinatenfläche (q_3). Es sei $q_1 = f_1(t)$, $q_2 = f_2(t)$. Eliminirt man aus diesen Gleichungen t, so erhält man eine Gleichung $F(q_1, q_2) = 0$, welche zugleich mit der Gleichung $q_3 =$ Const. die Bahn des Punktes m darstellt. In dem Falle endlich, wenn alle drei Coordinaten Functionen der Zeit sind, durchschneidet die Bahn alle drei Coordinatenflächen; ist dann $q_1 = f_1(t)$, $q_2 = f_2(t)$, $q_3 = f_3(t)$, so erhält man hieraus durch Elimination von t drei Gleichungen von der Form

$$\varphi_1(q_2, q_3) = 0, \quad \varphi_2(q_3, q_1) = 0, \quad \varphi_3(q_1, q_2) = 0, \qquad \text{(a)}$$

welche drei Flächen angehören, die sich in der Trajectorie des Punktes m durchschneiden. Zwei von diesen Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung dieser Linie. Man kann (wenn dies erforderlich ist) diese Gleichungen durch zwei andere Gleichungen ersetzen, die zwei neuen in der Bahn des Punktes m sich schneidenden Flächen angehören.

50. Die Betrachtung der Punktfunctionen führt zur Betrachtung einer besonderen Art von Derivirten dieser Functionen, die von der Lage des Punktes m und von der ihm ertheilten Verschiebung abhängig sind. Es sei V eine reelle, eindeutige und continuirliche Function des Punktes m, die beim Uebergange des Punktes m von M nach M' (Fig. 31) das positive Increment ΔV erhält. Wenn die Verschiebung MM', d. h. der geradlinige oder krummlinige, vom Punkte m durchlaufene Weg unendlich klein ist, so ist infolge der Continuität von V auch ΔV unendlich klein und zwar im allgemeinen von derselben Ordnung wie MM'; daher ist das Verhältniss $\frac{\Delta V}{MM'}$ im allgemeinen eine endliche Grösse. Stellt man dieses Verhältniss durch die auf der Richtung der Sehne MM' aufgetragene Strecke MA dar und lässt man MM' gegen die Null convergiren, so nähert sich die Strecke MA einer gewissen Grenze MQ, welche die Richtung der Tangente von MM' im Punkte M hat. Man kann die Verschiebung MM'

Fig. 31.



ansehen als das Increment $\varDelta s$ des Bogens $OM = s$ irgend einer geraden oder krummen Linie und das den Punkten dieser Linie entsprechende V als eine Function der Länge s; daher ist $MQ = \lim \frac{\varDelta V}{\varDelta s} = \frac{dV}{ds}$. Die Richtung von MQ aber ist die nach der Seite, wo $\varDelta V > 0$, gezogene Tangente an die Linie OM' im Punkte M. Die Grösse von MQ hängt nicht von der Gestalt der Linie OM' ab; denn wenn man diese Linie mit einer anderen vertauscht, die dieselbe Gerade MQ zur Tangente hat und auch auf dem Niveau $(V + \varDelta V)$ endigt, so bleibt $\varDelta V$ unverändert, die Verschiebung MM' aber ändert sich um eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung; dadurch erleidet das Verhältniss $\frac{\varDelta V}{MM'}$ eine unendlich kleine Aenderung; folglich ändert sich seine Grenze MQ nicht. Diese Grenze hängt ebenso wie die Derivirte $\frac{dV}{ds}$ auch davon nicht ab, ob die Incremente $\varDelta V$ und $\varDelta s$ beide positiv oder beide negativ sind.

Wir werden $MQ = \frac{dV}{ds}$ die Derivirte der Function $V = f(m)$ bezüglich der Differentialverschiebung ds nennen, indem wir die Tangente der Linie s im Punkte M als Richtung dieser Verschiebung annehmen.

Die Derivirte der Punktfunction $V = f(m)$ bezüglich einer zu der Niveaufläche des Punktes m normalen Verschiebung heisst der *Differentialparameter erster Ordnung der Function* V.*) Zunächst wollen wir sie der Kürze halber einfach *Parameter* nennen.

Es sei $O'MN$ eine zur Niveaufläche AB im Punkte M normale Linie und n die Länge eines im Punkte O' beginnenden und im Punkte M endigenden Bogens dieser Linie; dann stellt man den *Parameter* der Function V in diesem Punkte durch die Strecke $MP = \frac{dV}{dn}$ dar, die auf der Normale dieser Fläche nach der Seite hin aufgetragen wird, wo $\varDelta V > 0$.

---

*) Diese Benennung gab Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes, pag. 6.

51. *Lehrsatz. Die Derivirte* $MQ = \frac{dV}{ds}$ *der Function* V *nach irgend einer Verschiebung* ds *ist gleich der Projection des Differentialparameters auf die Richtung dieser Verschiebung.*

Beweis. Nimmt man an, dass die Punkte N und M' auf einem und demselben Niveau $(V + \varDelta V)$ liegen, so hat man

$$\frac{\varDelta V}{MM'} = \frac{\varDelta V}{MN} \cdot \frac{MN}{MM'} = \frac{\varDelta V}{MN} \cdot \frac{\sin(NM'M)}{\sin(MNM')}. \tag{a}$$

Nähert sich $\varDelta V$ der Null, so nähert sich der Winkel $NM'M$ dem Winkel QMT, den die Richtung von MQ mit der Tangentenebene der Niveaufläche (V) im Punkte M bildet, und der Winkel MNM' nähert sich 90^0; die Gleichung (a) giebt daher in der Grenze

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn} \cos(QMP),$$

d. h.

$$MQ = MP \cdot \cos(QMP),$$

w. z. b. w.

Auf Grund dieses Satzes können alle Derivirten nach den verschiedenen Verschiebungen des Punktes m durch Strecken dargestellt werden, die vom Punkte M aus in den Richtungen dieser Verschiebungen bis an die Oberfläche einer Kugel, die den Parameter MP zum Durchmesser hat, gezogen werden. Diese Kugel kann man als den *Hodographen* der Derivirten $\frac{dV}{ds}$ ansehen.

Bezeichnet P diesen Parameter nach Grösse und Richtung, so hat man:

$$\frac{dV}{ds} = P \cos(P, ds). \tag{b}$$

Diese Formel, die für den Fall abgeleitet ist, dass die Verschiebung ds bezüglich der Niveaufläche (V) nach der Seite hin gerichtet ist, wo $\varDelta V > 0$, ist auch dann noch giltig, wenn ds nach der Seite gerichtet ist, wo $\varDelta V < 0$. Zum Beweise wollen wir annehmen, der Bogen s habe seinen Anfang in dem Raume $\varDelta V > 0$ und endige im Punkte M; dann entspricht einem positiven Increment $\varDelta s$ dieses Bogens ein negatives Increment $\varDelta V$; daher ist $\frac{dV}{ds}$ eine negative Grösse,

und $\frac{-dV}{ds} = \frac{d(-V)}{ds}$ ist positiv und repräsentirt die Derivirte der Function $-V$ nach der Verschiebung ds. Die Function $-V$ hat offenbar dieselbe Niveaufläche wie die Function $+V$, denn $-V$ ist constant, wenn $+V$ constant ist; ferner ist der Raum $\varDelta(-V) > 0$ derselbe, wie der Raum $\varDelta V < 0$, und daher ist der Parameter der Function $-V$ dem Parameter P der Function V direct entgegengesetzt gerichtet. Bezeichnet man diesen Parameter mit P', so hat man

$$P' = \frac{d(-V)}{dn'} = -\frac{dV}{dn'},$$

wo dn' das Differential des Bogens n' ist, der zu der Niveaufläche (V) im Punkte M normal ist und in dem Raume $\varDelta V > 0$ anfängt. Da nun $dn' = -dn$, so folgt

$$-\frac{dV}{dn'} = \frac{dV}{dn} = P;$$

folglich sind die Parameter der Functionen V und $-V$ gleich und entgegengesetzt. Für die Derivirte von $-V$ nach der Verschiebung ds hat man

$$\frac{d(-V)}{ds} = P' \cos(P', ds) = -P \cos(P, ds),$$

oder endlich:

$$\frac{dV}{ds} = P \cos(P, ds).$$

Somit ist die Formel (b) auch im Falle eines stumpfen Winkels (P, ds) richtig.

52. Untersuchen wir jetzt, wie die Differentialparameter der zusammengesetzten Functionen, d. h. der Functionen von Functionen sich bestimmen lassen.

Es sei $V = f(q)$, wo q eine Function des Punktes m ist. Die beiden Functionen V und q haben, wie schon im §. 46. bemerkt wurde, eine gemeinsame Niveaufläche; daher haben ihre Differentialparameter, die wir mit P und h bezeichnen wollen, die Richtung einer und derselben im Punkte M zu der gemeinsamen Niveaufläche normalen Geraden; dabei haben P und h denselben Sinn, wenn V und q bei der Verschiebung des Punktes m zugleich wachsen, d. h. wenn $f'(q) > 0$, und entgegengesetzten Sinn, wenn beim Wachsen der einen Function die andere abnimmt, d. h. wenn $f'(q) < 0$.

Bezeichnet man mit dn die Verschiebung in der Richtung von P, so hat man

$$P = \frac{dV}{dn} = f'(q)\frac{dq}{dn},$$

und da $\pm \frac{dq}{dn}$ gleich h ist, so wird

$$P = \pm f'(q)\, h,$$

wo man $+$ nehmen muss, wenn die Parameter P und h denselben Sinn haben und $-$ im entgegengesetzten Falle.

Nehmen wir jetzt an, dass $V = f(q_1, q_2, q_3 \ldots)$ eine Function von mehreren Functionen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ eines und desselben Punktes m ist. Bezeichnen wir mit P den Differentialparameter der Function V und mit $h_1, h_2, h_3, \ldots$ respective die Differentialparameter der Functionen $q_1, q_2, q_3, \ldots$

Für die Derivirte der Function V nach irgend einer Verschiebung ds hat man dann

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dq_1}{ds} + \frac{\partial V}{\partial q_2}\frac{dq_2}{ds} + \frac{\partial V}{\partial q_3}\frac{dq_3}{ds} + \ldots;$$

dieser Ausdruck geht mit Hilfe der Formel (b) in den folgenden über:

$$P\cos(P, ds) =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial q_1} h_1 \cos(h_1, ds) + \frac{\partial V}{\partial q_2} h_2 \cos(h_2, ds) + \frac{\partial V}{\partial q_3} h_3 \cos(h_3, ds) + \ldots$$

Hierin ist allgemein die Grösse $\frac{\partial V}{\partial q_i}\, h_i$, mit $+$ oder $-$ genommen, nichts anderes als der Differentialparameter der Variablen V, welche als Function der einen unabhängigen Variablen q_i angesehen wird. Diesen Parameter kann man den *partiellen Differentialparameter* der Function V nach q_i nennen. Bezeichnet man denselben mit P_i und beachtet, dass P_i und h_i denselben oder entgegengesetzten Sinn haben, je nachdem $\frac{\partial V}{\partial q_i} > 0$ oder < 0, so hat man jedenfalls

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} h_i \cos(h_i ds) = P_i \cos(P_i ds);$$

folglich ist:

$$P\cos(Pds) = P_1\cos(P_1 ds) + P_2\cos(P_2 ds) + \ldots + P_i\cos(P_i ds) + \ldots$$

Diese Formel gilt für jede Richtung der Verschiebung

ds, und es ist mithin P die geometrische Summe der Grössen P_1, P_2, $P_3 \ldots$, d. h.

$$\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots.$$

Also *ist der Differentialparameter einer Function V von mehreren Punktfunctionen q_1, q_2, $q_3, \ldots$, die geometrische Summe der partiellen Differentialparameter dieser Function nach jeder dieser Variablen q_1, q_2, $q_3, \ldots$ einzeln genommen.*

Hieraus ergiebt sich die Regel für die Bestimmung des Differentialparameters jeder gegebenen Function von mehreren anderen Functionen, deren Parameter schon bekannt sind. Kennt man die Parameter h_1, h_2, $h_3, \ldots$ der Functionen q_1, q_2, $q_3, \ldots$ und die partiellen Derivirten der Function V nach jeder der Variablen q_1, q_2, $q_3, \ldots$, so kann man die Grösse der partiellen Differentialparameter:

$$P_1 = \pm \frac{\partial V}{\partial q_1} h_1, \quad P_2 = \pm \frac{\partial V}{\partial q_2} h_2, \quad P_3 = \pm \frac{\partial V}{\partial q_3} h_3, \ldots$$

bestimmen; man trägt sie respective auf den Parametern h_1, h_2, $h_3, \ldots$ derart auf, dass P_i und h_i denselben Sinn haben, wenn $\frac{\partial V}{\partial q_i} > 0$, und entgegengesetzten Sinn, wenn $\frac{\partial V}{\partial q_i} < 0$. Darauf bestimmt man nach der bekannten Regel die geometrische Summe

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots,$$

die dann der totale Parameter P der Function V ist.

53. Die Function V des einer gegebenen Fläche (S) angehörigen Punktes m hat einen Differentialparameter p, welcher der Derivirten $\frac{dV}{dn}$ nach der zur Niveaulinie (V) normalen Verschiebung auf der Fläche (S) gleich ist und den wir durch eine Strecke MP darstellen wollen, die in der Tangentenebene der Fläche (S) im Punkte M zu (V) normal und nach der Seite hin gerichtet ist, wo $\Delta V > 0$. Die Derivirte $\frac{dV}{ds}$ nach einer beliebigen Verschiebung des Punktes M auf der Fläche (S) bestimmt sich nach der Formel

$$\frac{dV}{ds} = p \cos(pds),$$

was sich ganz ebenso beweisen lässt, wie für die Function

eines Punktes im Raume. Der Hodograph aller Derivirten $\frac{dV}{ds}$ ist ein Kreis, der in der Tangentenebene der Fläche (S) über einem Durchmesser gleich p beschrieben ist. Die Regel für die Bestimmung des Differentialparameters einer zusammengesetzten Punktfunction auf der Fläche (S) ist dieselbe, wie die Regel für eine Punktfunction im Raume, nur mit der Beschränkung, dass die zu addirenden partiellen Parameter in einer und derselben die Fläche (S) im Punkte M berührenden Ebene liegen müssen.

Ist die Niveaulinie (V) auf der Fläche (S) der Schnitt dieser Fläche mit der Niveaufläche einer als Punktfunction im Raume angesehenen Function V, so ist der Differentialparameter p die Projection des zu V als einer Punktfunction im Raume gehörenden Differentialparameters P auf die Tangentenebene der Fläche (S) im Punkte M, d. h. $p = P \cos(Pp)$.

Man kann p den Parameter der Function V bezüglich der Fläche (S) nennen.

54. *Beispiele für die Bestimmung von Differentialparametern.*

1) Der Parameter P einer geraden Strecke x, die aus dem Punkte M parallel der Geraden Ox bis zum Durchschnitt mit der Ebene yOz gezogen ist, ist zu letzterer senkrecht nach der Seite gerichtet, wohin x wächst, und ist gleich $\frac{1}{\cos(Px)}$; denn die Niveaufläche ist der Ebene yOz parallel, und die zu dieser Fläche normale Verschiebung dn ist die Projection von dx auf P, d. h.:

$$dn = dx \cos(Px);$$

folglich ist:

$$P = \frac{dx}{dn} = \frac{1}{\cos(Px)} = \sec(Px).$$

Die Richtungen von P und x fallen zusammen, wenn Ox zu yOz senkrecht ist; dann ist $\cos(Px) = 1$ und $P = 1$.

Gesetzt, der Punkt m sei durch geradlinige Coordinaten x, y, z bezüglich der Ebenen yOz, zOx, xOy bestimmt und bezeichnen wir mit h_1, h_2, h_3 die Differentialparameter der Coordinaten.

Diese Parameter sind den Ebenen yOz, zOx, xOy resp. parallel und im Sinne der positiven Coordinaten x, y, z ge-

richtet. Ihre Werthe sind resp. gleich $\sec(h_1 x)$, $\sec(h_2 y)$, $\sec(h_3 z)$. Im Falle rechtwinkliger Coordinaten sind sie gleich 1.

2) Für eine Function $V = f(x, y, z)$ von drei geradlinigen rechtwinkligen Coordinaten sind die partiellen Parameter

$$P_1 = \pm \frac{\partial f}{\partial x}, \ P_2 = \pm \frac{\partial f}{\partial y}, \ P_3 = \pm \frac{\partial f}{\partial z};$$

daher ist der Werth des totalen Parameters P dieser Function:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Lamé nimmt diesen Ausdruck geradezu als Definition des Differentialparameters (Leçons sur les coordonnées curvilignes, pag. 6). Die Projectionen von P auf die Coordinatenaxen sind

$$P\cos(Px) = \frac{\partial f}{\partial x}, \ P\cos(Py) = \frac{\partial f}{\partial y}, \ P\cos(Pz) = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \text{(a)}$$

d. h. sie sind die partiellen Derivirten der Function $f(x, y, z)$ nach den Coordinaten. Durch diese Projectionen ist die Richtung von P bestimmt.

Wenn $f(x, y, z)$ in Bezug auf x, y, z eine homogene Function vom n^{ten} Gerade ist, so hat man nach einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen

$$nV = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z;$$

daraus ergiebt sich, wenn man die Formeln (a) beachtet:

$$nV = P\,[x\cos(Px) + y\cos(Py) + z\cos(Pz)].$$

Die Grösse in der Klammer, mit + oder — genommen, ist die Entfernung des Coordinatenursprungs von der Ebene, die im Punkte (x, y, z) das durch diesen Punkt gehende Niveau (V) berührt; bezeichnet man also diese Entfernung mit δ, so hat man:

$$nV = \pm P\delta, \text{ und folglich } P = \pm \frac{nV}{\delta}. \quad \text{(b)}$$

Man sieht hieraus, dass *der Werth des Parameters einer homogenen Function der geradlinigen rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes umgekehrt proportional ist der Länge eines vom Coordinatenursprung auf diejenige Ebene gefällten Perpendikels, welche in dem betreffenden Punkte die Niveaufläche, auf der dieser Punkt liegt, berührt.*

Es sei z. B.

$$V = ax + by + cz,$$

wo a, b, c Constante sind, so ist

$$P\cos(Px) = a, \quad P\cos(Py) = b, \quad P\cos(Pz) = c$$

und

$$P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

In diesem Falle ist das Niveau (V) eine Ebene; der Parameter P ist auf ihr senkrecht und hat constanten Werth. Da $P = \pm \frac{V}{\delta}$, so ist

$$V = \pm\, \delta \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

d. h. die Function V ist der Entfernung des Niveaus vom Coordinatenursprung proportional.

Betrachten wir ferner die Function

$$V = \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3},$$

wo a_1, a_2, a_3 constante Grössen sind. Das Niveau ist eine der drei Flächen zweiter Ordnung, die ihren Mittelpunkt im Coordinatenursprung haben.

Da

$$P\cos(Px) = \frac{2x}{a_1}, \quad P\cos(Py) = \frac{2y}{a_2}, \quad P\cos(Pz) = \frac{2z}{a_3},$$

so ist:

$$P = 2\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Formel (b) giebt:

$$\delta = \pm\, V\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Im Falle $V = 1$ sind die Grössen a_1, a_2, a_3 die Quadrate der reellen oder imaginären Halbaxen der Fläche

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1;$$

dann ist:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2}}}. \tag{c}$$

3) Bestimmen wir nun die Parameter der Polarcoordinaten des Punktes m, und zwar des Radiusvectors r, der vom Pole O nach dem Punkte m führt, des Winkels φ, den die Richtung

von r mit der Polaraxe Ox bildet und des Flächenwinkels ψ, den die Ebene des Winkels φ mit einer festen durch die Axe Ox gehenden Ebene bildet. Das Niveau der Coordinate r ist eine Kugel vom Centrum O und vom Radius r; daher hat der Parameter dieser Coordinate dieselbe Richtung, wie sie selbst, und zwar nach der Seite, wohin sie wächst. Sein Werth ist 1, denn $P = \frac{dr}{dr} = 1$. Das Niveau des Winkels φ ist eine konische Fläche, die durch Rotation des Radiusvectors r um Ox entsteht; die Normale dieser Fläche im Punkte m ist die in diesem Punkte in der Ebene mOx auf r errichtete Senkrechte. Als zur Niveaufläche normale Verschiebung dn kann man das Differential des Bogens $r\varphi$ wählen, d. h. $dn = rd\varphi$; der Parameter des Winkels φ ist daher $\frac{d\varphi}{rd\varphi} = \frac{1}{r}$. Das Niveau des Winkels ψ ist die Ebene des Winkels φ; sein Parameter ist senkrecht zu dieser Ebene nach der Seite hin gerichtet, wohin ψ wächst; als Normalverschiebung dn kann man das Differential des Kreisbogens nehmen, den der Punkt m bei seiner Drehung um die Axe Ox beschreibt; der Radius dieses Kreises ist $r \sin\varphi$; folglich ist $dn = r \sin\varphi \,.\, d\psi$; daher hat der Parameter den Werth $\frac{d\psi}{dn} = \frac{1}{r \sin\varphi}$. Bezeichnet man also mit h_1, h_2, h_3 die Parameter der drei Polarcoordinaten r, φ, ψ, so ist:

$$h_1 = 1,\ h_2 = \frac{1}{r},\ h_3 = \frac{1}{r \sin\varphi}.$$

Sie stehen senkrecht auf einander.

Der erste h_1 hat dieselbe Richtung, wie der Radiusvector r; der zweite h_2 liegt in der Ebene mOx, ist zu r senkrecht und nach der Seite hin gerichtet, wohin φ wächst; h_3 endlich ist zur Ebene mOx senkrecht und nach der Seite gerichtet, wohin ψ wächst.

Für eine zusammengesetzte Function $V = f(r, \varphi, \psi)$ sind die partiellen Parameter

$$P_1 = \pm \frac{\partial f}{\partial r},\ P_2 = \pm \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r},\ P_3 = \pm \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{1}{r \sin\varphi},$$

und die Grösse und Richtung des totalen Parameters P bestimmt sich durch die Formeln:

$$P^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)^2,$$

$$P\cos(P\alpha) = \frac{\partial f}{\partial r},\ P\cos(P\beta) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{r},\ P\cos(P\gamma) = \frac{\partial f}{\partial \psi}\cdot\frac{1}{r\sin\varphi}.$$

4) Ist der Punkt m in der Ebene durch zwei Polarcoordinaten $Om = r$, $mOx = \varphi$ bestimmt, so ist der Parameter der ersteren $h_1 = 1$ und hat die Richtung von r; der Parameter der zweiten ist $h_2 = \frac{1}{r}$ und ist zu r senkrecht nach der Seite $\Delta\varphi > 0$ gerichtet.

Für die Function

$$V = f(r, \varphi)$$

eines Punktes in einer Ebene bestimmt sich der Parameter p durch die Formeln:

$$p^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2,\ p\cos(pr) = \frac{\partial f}{\partial r},\ p\sin(pr) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Es sei z. B. $V = r - a\varphi$, wo a eine Constante ist. Die Niveaulinie

$$r - a\varphi = V$$

ist offenbar eine archimedische Spirale, die auf demjenigen Radiusvector beginnt, der mit der Axe Ox den Winkel $-\frac{V}{a}$ bildet. Wenn man daher die archimedische Spirale $r - a\varphi = 0$ construirt und sie um O um den Winkel $-\frac{V}{a}$ dreht, so erhält man die Niveaulinie (V). Zur Bestimmung des Parameters p hat man:

$$p\cos(pr) = 1,\ p\sin(pr) = -\frac{a}{r},$$

$$p = \sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2}} = \sec(pr),$$

d. h. die Grösse des Parameters ist gleich der Secante des Winkels, den die Normale der archimedischen Spirale mit dem Radiusvector bildet. Daraus folgt die bekannte Construction der Normale und Tangente an die archimedische Spirale (S. §. 10, Beisp. 1).

Die Construction der Differentialparameter kann die von Roberval zur Construction der Tangenten gegebene, auf die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten begründete Methode vollkommen ersetzen.

Wir empfehlen noch die Differentialparameter der Functionen

$$V = \log r - a\varphi, \quad V = r - \frac{a}{\cos\varphi}$$

zu construiren, deren Niveaulinien die logarithmische Spirale und die Conchoide sind.

5) Betrachten wir die Function

$$V = f(r, r', r'', \ldots),^{*})$$

wo r, r', r'',... Radienvectoren sind, die aus mehreren festen Punkten F, F', F'',... nach demselben Punkte m gezogen sind. Der Parameter jedes Radiusvectors ist, wie wir im vorigen Beispiele gesehen haben, gleich 1 und hat die Richtung des Radiusvectors; daher sind die Werthe der partiellen Parameter der Function V resp. gleich

$$\pm \frac{\partial f}{\partial r}, \pm \frac{\partial f}{\partial r'}, \pm \frac{\partial f}{\partial r''}, \ldots,$$

und ihr Sinn stimmt mit dem Sinne der betreffenden Radienvectoren r, r', r'',... überein oder nicht, je nachdem die entsprechenden partiellen Derivirten $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r'}, \frac{\partial f}{\partial r''}, \ldots$ das Zeichen $+$ oder $-$ haben.

Es sei z. B.

$$V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} + \frac{\mu''}{r''} + \ldots,$$

wo μ, μ', μ'',... constante positive oder negative Grössen bedeuten mögen. Die Werthe der partiellen Parameter werden dann:

$$\pm \frac{\mu}{r^2}, \pm \frac{\mu'}{r'^2}, \pm \frac{\mu''}{r''^2}, \ldots;$$

sie sind den Quadraten der entsprechenden Radienvectoren umgekehrt und den Grössen μ, μ', μ'',... direct proportional. Je nachdem diese Grössen das Vorzeichen $+$ oder $-$ haben, sind die partiellen Parameter dem Sinne nach den entsprechenden Radienvectoren entgegengesetzt oder von demselben Sinne.

6) Zieht man in einer gegebenen Ebene aus zwei festen Polen F, F' nach einem beliebigen Punkte M der Ebene die Radienvectoren r und r', so sind dieselben die sogenannten

---

*) Poinsot, Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes. Éléments de statique, 10. éd., p. 278.

bipolaren Coordinaten des Punktes M. Die Parameter dieser Coordinaten sind gleich 1 und längs den entsprechenden Coordinaten gerichtet.

Nehmen wir nun an, die Coordinaten $r = FM$ und $r' = F'M$ seien resp. gleich den bipolaren Coordinaten $A\mu$ und $B\mu$, die aus zwei anderen Polen A und B nach einem Punkte μ gezogen sind. Infolge dessen besteht dann zwischen den Punkten M und μ eine Abhängigkeit, durch welche sich die Lage des einen Punktes bestimmt, wenn die des anderen Punktes bekannt ist. Beschreibt der Punkt μ eine Linie, deren Gleichung $f(r, r') = 0$ ist, so beschreibt M im allgemeinen eine andere Linie, die eine Gleichung von derselben Form bezüglich der Coordinaten FM und $F'M$ hat. Die Normale der vom Punkte μ beschriebenen Linie hat die Richtung der geometrischen Summe der auf $A\mu$ und $B\mu$ von μ aus aufgetragenen partiellen Derivirten $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial f}{\partial r'}$, während die Normale der vom Punkte M beschriebenen Linie die Richtung der geometrischen Summe derselben auf FM und $F'M$ aufgetragenen Componenten hat. Diese Componenten $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial f}{\partial r'}$ können auch durch irgend zwei andere, ihnen proportionale, auf denselben Richtungen aufgetragene Strecken ersetzt werden. Auf Grund dieser Eigenschaft der Normalen der von den Punkten M und μ beschriebenen Linien ist es leicht die eine Normale zu construiren, wenn die andere bekannt ist.

Gesetzt z. B., der Punkt μ beschreibe eine gerade Linie PQ; dann lässt sich leicht beweisen, dass der Punkt M eine Linie zweiter Ordnung beschreibt.*) Man errichte auf der Geraden PQ eine Senkrechte μR von beliebiger Länge und ziehe RD parallel $A\mu$ bis zum Durchschnitt D mit $B\mu$ und RC parallel $B\mu$ bis zum Durchschnitt C mit $A\mu$. Ferner trage man auf FM und $F'M$ die Abschnitte $MC' = \mu C$ und $MD' = \mu D$ in der Weise auf, dass MC' dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie FM hat, je nachdem μC dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie $A\mu$ hat, und MD' dieselbe oder entgegengesetzte Richtung wie $F'M$, je nachdem μD

*) Jacobi, Crelle's Journal, T. 12 und 73.

dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie $B\mu$ hat. Endlich construire man über MC' und MD' das Parallelogramm $MC'R'D'$. Die Diagonale MR' desselben ist dann die Normale der vom Punkte M beschriebenen Linie zweiter Ordnung.

In dem speciellen Falle, wenn die Gerade PQ durch die Punkte A und B hindurchgeht, hat man als Gleichungen der vom Punkte M beschriebenen Linie in bipolaren Coordinaten eine der drei folgenden:

$$r + r' = AB, \quad r - r' = AB, \quad r' - r = AB.$$

Die erste ist die Gleichung einer Ellipse, die beiden anderen die einer Hyperbel, deren Brennpunkte die Punkte F und F' sind. Man hat in diesem Falle:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \pm 1, \quad \frac{\partial f}{\partial r'} = \pm 1;$$

daher sind die Abschnitte MC' und MD' einander gleich und die Normale MR' halbirt den Winkel der Radienvectoren r und r'.

Die Lage eines Punktes M im Raume kann durch die drei Entfernungen $r = MA$, $r' = MB$, $r'' = MC$ von drei festen nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C bestimmt werden. Diese drei Radienvectoren bilden ein *tripolares* Coordinatensystem.

Es seien $A'\mu$, $B'\mu$, $C'\mu$ die aus den Polen A', B', C' gezogenen tripolaren Coordinaten des Punktes μ und es sei $AM = A'\mu$, $BM = B'\mu$, $CM = C'\mu$. Wenn unter dieser Bedingung der Punkt μ sich auf einer gewissen Fläche bewegt, deren Gleichung in den tripolaren Coordinaten $A'\mu$, $B'\mu$, $C'\mu$ die Form $f(r, r', r'') = 0$ hat, so bewegt sich M auf einer Fläche, die dieselbe Gleichung für die Coordinaten AM, BM, CM hat.

Die Richtung der Normale der ersteren Fläche ist die Richtung der geometrischen Summe der auf $A'\mu$, $B'\mu$, $C'\mu$ aufgetragenen partiellen Derivirten $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial r'}$, $\frac{\partial f}{\partial r''}$, und die Richtung der Normale der zweiten Fläche ist die der geometrischen Summe derselben auf AM, BM, CM aufgetragenen Componenten; kennt man daher die Richtung der einen dieser Normalen, so kann man die der anderen leicht bestimmen.

Jacobi*) hat gezeigt, dass, wenn der Punkt μ sich auf einer Ebene (P) bewegt, der Punkt M eine Fläche zweiter Ordnung beschreibt, für welche die Ebene ABC eine Hauptdiametralebene ist. Um die Normale dieser Fläche zweiter Ordnung zu construiren, errichtet man auf der Ebene (P) ein Perpendikel μR und zerlegt es in drei Componenten μC, μD, μE nach den Richtungen $A'\mu$, $B'\mu$, $C'\mu$; dann trägt man auf AM, BM, CM die diesen Componenten entsprechend gleichen Strecken MC', MD' und ME' auf und bestimmt ihre geometrische Summe; die Richtung dieser Summe ist die Normale der Fläche zweiter Ordnung, welche alle Lagen des Punktes M enthält.

In dem speciellen Falle, wenn die Punkte A', B', C' in der Ebene (P) liegen, ist die geometrische Summe $\overline{\mu C} + \overline{\mu D} + \overline{\mu E}$ gleich Null, und es ist daher einer der Summanden der geometrischen Summe der beiden anderen entgegengesetzt gleich.**)

55. Von dem schiefwinkligen System der bipolaren Coordinaten in der Ebene gelangt man leicht zu dem rechtwinkligen System der sogenannten *elliptischen* Coordinaten.

Setzt man $FM = r$ und $F'M = r'$, so stellt die halbe Summe $\lambda = \frac{1}{2}(r + r')$ die grosse Halbaxe einer Ellipse dar, die durch den Punkt M geht und deren Brennpunkte F und F' sind, während die halbe Differenz $\mu = \frac{1}{2}(r - r')$, mit $+$ oder $-$ genommen, je nachdem $r > r'$ oder $r < r'$, die reelle Halbaxe einer ebenfalls durch den Punkt M gehenden und mit der Ellipse confocalen Hyperbel repräsentirt.

Aus gegebenen Werthen von λ und μ lässt sich die Lage des Punktes M bestimmen, und man kann daher λ und μ als Coordinaten jenes Punktes betrachten. Derartige Coordinaten nennt man *elliptische*. Suchen wir nun ihre Differentialparameter zu bestimmen.

---

*) Crelle's Journal, T. 12 und 73.

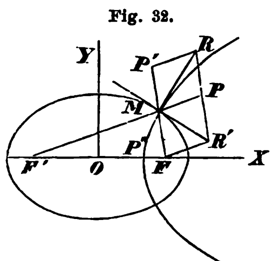
**) Die Construction der Normale an eine Fläche zweiter Ordnung in diesem Specialfalle hat Joachimsthal gegeben. Aus dieser Construction ergiebt sich die Eigenschaft, dass die Normale einer Fläche zweiter Ordnung die Axe eines geraden, durch die Focallinie gehenden Kegels ist. (S. Crelle's Journal, T. 12 und 73.)

Auf Grund des vorigen Paragraphen finden wir als partielle Parameter der Function

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(r + r')$$

die Strecken MP und MP' (Fig. 32), die gleich $\tfrac{1}{2}$ sind und die Richtungen der Radienvectoren r und r' haben, während die Diagonale MR des über diesen Strecken construirten Rhombus der Parameter h_1 der Coordinate λ ist.

Fig. 32.



Die partiellen Parameter der Function

$$\mu = \tfrac{1}{2}(r - r')$$

sind: die Strecke $MP = \tfrac{1}{2}$, von demselben Sinne, wie r und die Strecke $MP'' = \tfrac{1}{2}$, vom entgegengesetzten Sinne wie r'; die Diagonale MR' des über ihnen construirten Rhombus ist der Parameter h_2 der Coordinate μ.

Die Ellipse λ und die Hyperbel μ sind Coordinatenlinien. Die Richtungen der Parameter h_1 und h_2 sind normal zu diesen Linien; dabei ist nach der bekannten Eigenschaft der von der Tangente mit den Radienvectoren gebildeten Winkel die den Winkel FMF' halbirende Richtung h_1 Tangente an die Hyperbel (μ), und die den Supplementwinkel halbirende Richtung h_2 ist Tangente an die Ellipse (λ). Nun stellen diese Richtungen die Richtungen der Coordinatenaxen dar, und da sie auf einander senkrecht stehen, so ist das vorliegende Coordinatensystem der λ und μ ein *orthogonales*.

Es ist nicht schwer die Parameter h_1 und h_2 als Functionen der Coordinaten λ und μ auszudrücken. Es sei $c = \tfrac{1}{2}FF'$ und $\sphericalangle\, PMR = \alpha$. Aus den Dreiecken MPR und MPR' folgt:

$$h_1 = \cos\alpha,\quad h_2 = \sin\alpha.$$

Nach bekannten Formeln der Trigonometrie hat man, wenn p den halben Perimeter des Dreieckes FMF' bezeichnet:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{p\,(p - 2c)}{rr'}},\quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{(p - r)\,(p - r')}{rr'}};$$

nun ist aber:

$$p = \frac{r + r'}{2} + c = \lambda + c,\quad rr' = \lambda^2 - \mu^2;$$

folglich wird:

$$h_1 = \sqrt{\frac{h^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}}.$$

Wenn wir mit x und y die geradlinigen Coordinaten des Punktes M bezüglich der Axen der Ellipse Ox, Oy, die zugleich auch Axen der Hyperbel sind, bezeichnen, so ist die Gleichung der ersteren Curve in diesen Coordinaten:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \tag{a}$$

und die der anderen:

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1; \tag{b}$$

hieraus lassen sich leicht die Formeln

$$x = \frac{\lambda \mu}{c}, \quad y = \pm \frac{1}{c} \sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}$$

ableiten, die zur Transformation der rechtwinklig-geradlinigen Coordinaten x und y in die elliptischen λ und μ dienen. Um umgekehrt von den elliptischen Coordinaten zu rechtwinkligen überzugehen, muss man die Gleichungen (a) und (b) nach λ und μ auflösen. Man sieht leicht, dass λ^2 und μ^2 die Wurzeln z einer Gleichung

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z - c^2} = 1$$

oder

$$z^2 - (x^2 + y^2 + c^2) z + x^2 c^2 = 0$$

sind.

Zur Erlangung grösserer Symmetrie in den Formeln für die elliptischen Coordinaten ersetzt man die Halbaxen λ und μ durch andere Grössen, nämlich

$$\lambda_1 = \lambda^2 - a_1, \quad \lambda_2 = \mu^2 - c^2 - a_2,$$

wo a_1 und a_2 irgend welche positive Grössen sind, die den Bedingungen $a_1 > a_2$, $a_1 - a_2 = c^2$ genügen. Man hat dann statt der Gleichungen (a) und (b) die folgenden:

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda_1} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda_1} = 1, \quad \frac{x^2}{a_1 + \lambda_2} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda_2} = 1.$$

Man sieht leicht, dass die Parameter der neuen Coordinaten λ_1 und λ_2 die Werthe

$$h_1 = 2\sqrt{\frac{(\lambda_1 + a_1)(\lambda_1 + a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad h_2 = 2\sqrt{\frac{(\lambda_2 + a_1)(\lambda_2 + a_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

haben; ihre Richtungen fallen mit denen der Parameter MR und MR' zusammen. Die Formeln zur Transformation der Coordinaten x und y in λ_1 und λ_2 nehmen die Gestalt an:

$$x = \pm \sqrt{\frac{(\lambda_1 + a_1)(\lambda_2 + a_1)}{a_1 - a_2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{(\lambda_1 + a_2)(\lambda_2 + a_2)}{a_2 - a_1}}.$$

Die Coordinaten λ_1 und λ_2 nennt man gleichfalls elliptische Coordinaten.

Elliptische Coordinaten im Raume.

56. Es seien x, y, z die geradlinigen, rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz und a_1, a_2, a_3 willkürliche positive Grössen, unter denen a_1 die grösste und a_3 die kleinste ist. Denken wir uns nun ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt O ist und dessen Axen die Richtungen der Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz haben; die Werthe der entsprechenden Halbaxen seien $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$. Die Gleichung dieses Ellipsoids ist:

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1. \tag{1}$$

Vergrössern wir die Quadrate seiner Halbaxen um eine und dieselbe Grösse λ, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda} = 1, \tag{2}$$

die einer anderen mit dem Ellipsoid (1) concentrischen und coaxialen Fläche zweiter Ordnung angehört. Die Durchschnitte beider Flächen mit den Hauptdiametralebenen yz, zx, xy haben gemeinschaftliche Brennpunkte; denn die Quadrate der Excentricitäten dieser Schnitte

$$a_1 - a_2, \quad a_1 - a_3, \quad a_2 - a_3$$

sind für beide Flächen dieselben; deshalb nennt man die Fläche (2) confocal mit der Fläche (1). Lässt man λ variiren, so erhält man eine Reihe von Flächen, die mit (1) und untereinander confocal sind.

Wenn $a_3 + \lambda > 0$, d. h. $\lambda > -a_3$, so ist auch $a_2 + \lambda > 0$, $a_1 + \lambda > 0$; in diesem Falle stellt die Gleichung (2) ein Ellipsoid dar. Für $a_3 + \lambda < 0$ und $a_2 + \lambda > 0$, d. h. wenn $-a_2 < \lambda < -a_3$ wird $a_1 + \lambda > 0$, und dann ist (2) die

Gleichung eines einmanteligen Hyperboloids, das die Axe Oz umgiebt. Für $a_2 + \lambda < 0$ und $a_1 + \lambda > 0$, d. h. für $-a_1 < \lambda < -a_2$ wird $a_3 + \lambda < 0$ und die Gleichung (2) stellt ein zweimanteliges Hyperboloid dar, das die x-Axe umgiebt. Wenn $a_1 + \lambda < 0$, so ist auch $a_2 + \lambda < 0$, $a_3 + \lambda < 0$; die Gleichung (2) repräsentirt dann einen imaginären Ort. Ausserdem kann die Gleichung (2) die geometrischen Oerter darstellen, die bei dem Uebergang der genannten Flächen in einander entstehen, und zwar wenn $a_3 + \lambda = 0$ oder $a_2 + \lambda = 0$ oder $a_1 + \lambda = 0$; dann reducirt sich Gleichung (2), wie leicht ersichtlich, auf eine der drei Gleichungen:

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Im ersten Falle erhält man die Ebene xOy, die den Uebergang des Ellipsoides in das einmantelige Hyperboloid bildet; im zweiten die Ebene zOx, die den Uebergang des einmanteligen Hyperboloids in das zweimantelige bildet; im dritten endlich die Ebene yOz, die den Uebergang vom zweimanteligen Hyperboloide zu dem imaginären Orte darstellt.

Im allgemeinen kann man durch jeden Punkt $M(x, y, z)$ des Raumes drei ungleichnamige Flächen zweiter Ordnung von der Form (2) legen. In speciellen Fällen aber muss man eine oder zwei dieser Flächen durch Coordinatenebenen ersetzen. Um sich davon zu überzeugen, soll gezeigt werden, dass die Gleichung (2) für jedes beliebige gegebene Werthsystem von x, y, z drei reelle Wurzeln hat, d. h. dass λ drei reelle Werthe hat, die drei ungleichnamige Flächen bestimmen.

Befreit man die Gleichung (2) von den Nennern, so ergiebt sich die Gleichung dritten Grades:

$$\begin{aligned}(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + a_3) - x^2(\lambda + a_2)(\lambda + a_3) \\ - y^2(\lambda + a_1)(\lambda + a_3) - z^2(\lambda + a_1)(\lambda + a_2) = 0. \quad (3)\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Grenzen der Wurzeln dieser Gleichung bestimmen.

Zunächst wollen wir annehmen, dass keine der Coordinaten x, y, z gleich Null ist, d. h. dass der Punkt (x, y, z) in keiner der Coordinatenebenen liegt.

Setzt man auf der linken Seite der Gleichung (3)

$$\lambda = +\infty, \quad \lambda = -a_3, \quad \lambda = -a_2, \quad \lambda = -a_1,$$

so ergeben sich die Resultate:

$$\begin{gathered} +\infty \\ -z^2(a_1-a_3)(a_2-a_3)<0 \\ y^2(a_1-a_2)(a_2-a_3)>0 \\ -x^2(a_1-a_2)(a_1-a_3)<0, \end{gathered}$$

welche zeigen, dass die Gleichung (3) drei reelle Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 hat, die folgendermassen zwischen den substituirten Grössen gelegen sind:

$$+\infty > \lambda_1 > -a_3 > \lambda_2 > -a_2 > \lambda_3 > -a_1.$$

Die erste Wurzel λ_1 ist positiv, wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1$$

und negativ, wenn er innerhalb desselben liegt. Die Grössen λ_1, λ_2, λ_3 bestimmen drei Flächen, die sich im Punkte (x, y, z) durchschneiden, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a_1+\lambda_1} + \frac{y^2}{a_2+\lambda_1} + \frac{z^2}{a_3+\lambda_1} &= 1 \\ \frac{x^2}{a_1+\lambda_2} + \frac{y^2}{a_2+\lambda_2} + \frac{z^2}{a_3+\lambda_2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a_1+\lambda_3} + \frac{y^2}{a_2+\lambda_3} + \frac{z^2}{a_3+\lambda_3} &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Da nun

$$\begin{gathered} a_1+\lambda_1>0,\ a_2+\lambda_1>0,\ a_3+\lambda_1>0, \\ a_1+\lambda_2>0,\ a_2+\lambda_2>0,\ a_3+\lambda_2<0, \\ a_1+\lambda_3>0,\ a_2+\lambda_3<0,\ a_3+\lambda_3<0, \end{gathered}$$

so ist die erste Fläche ein Ellipsoid, die zweite ein einmanteliges, die z-Axe umgebendes Hyperboloid und die dritte ein zweimanteliges, die x-Axe umhüllendes Hyperboloid. Die Grössen λ_1, λ_2, λ_3 nennt man die *elliptischen Coordinaten* des Punktes (x, y, z).

Für den Punkt $(x, y, 0)$ in der Ebene xOy zerfällt die Gleichung (3) in die zwei Gleichungen:

$$\lambda + a_3 = 0,\ (\lambda + a_1)(\lambda + a_2) - x^2(a_2 + \lambda) - y^2(a_1 + \lambda) = 0.$$

Die erste giebt die Wurzel $\lambda_1 = -a_3$ und die zweite die Wurzeln λ_2 und λ_3 zwischen den Grenzen

$$+\infty > \lambda_2 > -a_2 > \lambda_3 > -a_1;$$

dabei unterliegt die Wurzel λ_2 nicht mehr der Bedingung $\lambda_2 < -a_3$, wie dies für Punkte ausserhalb der Coordinatenebenen der Fall war. Die Wurzel $\lambda_1 = -a_3$ giebt die Ebene xOy, und λ_2 und λ_3 liefern die confocalen Flächen:

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_2}+\frac{z^2}{a_3+\lambda_2}=1, \quad \frac{x^2}{a_1+\lambda_3}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_3}+\frac{z^2}{a_3+\lambda_3}=1.$$

Die erstere ist ein Ellipsoid, wenn $a_3+\lambda_2>0$ und ein einmanteliges, die z-Axe umhüllendes Hyperboloid, wenn $a_3+\lambda_2<0$; die zweite ist immer ein zweimanteliges, die x-Axe umhüllendes Hyperboloid. Man sieht daraus, dass die Ebene xOy ein einmanteliges Hyperboloid vertritt, wenn $a_3+\lambda_2>0$ und ein Ellipsoid, wenn $a_3+\lambda_2<0$. Die Wurzeln λ_2 und λ_3 sind die elliptischen Coordinaten in der Ebene xOy (s. §. 55) und bestimmen die Coordinatenlinien

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_2}=1, \quad \frac{x^2}{a_1+\lambda_3}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_3}=1,$$

nämlich eine Ellipse und eine Hyperbel von denselben Brennpunkten.

Für einen Punkt $(x, 0, 0)$ auf der x-Axe zerfällt Gleichung (3) in die drei:

$$\lambda+a_3=0, \quad \lambda+a_2=0, \quad (\lambda+a_1)-x^2=0,$$

welche die drei Wurzeln liefern:

$$\lambda_1=-a_3, \quad \lambda_2=-a_2, \quad \lambda_3=-a_1+x^2;$$

dabei unterliegt λ_3 nicht der Bedingung $\lambda_3 < -a_2 < -a_3$. Die beiden ersten Wurzeln bestimmen die Coordinatenebenen xOy und zOx und die dritte die Fläche zweiter Ordnung

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_3}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_3}+\frac{z^2}{a_3+\lambda_3}=1,$$

welche ein Ellipsoid ist, wenn $a_3+\lambda_3>0$, ein einmanteliges Hyperboloid, wenn $a_3+\lambda_3<0$, $a_2+\lambda_3>0$ und ein zweimanteliges Hyperboloid, wenn $a_2+\lambda_3<0$. Im ersten Falle ersetzt die Ebene xOy ein einmanteliges und die Ebene zOx ein zweimanteliges Hyperboloid; im zweiten Falle ersetzt xOy ein Ellipsoid und zOx wieder ein zweimanteliges Hyperboloid;

endlich im dritten Falle ersetzt xOy ein Ellipsoid und zOx ein einmanteliges Hyperboloid. Auf ähnliche Weise lassen sich die Coordinatenflächen für die Punkte $(x, 0, z)$, $(0, y, z)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$ bestimmen.

Für den Coordinatenursprung $(0, 0, 0)$ gehen alle drei Flächen in die Coordinatenebenen yOz, zOx, xOy über.

57. Bestimmen wir nun die Differentialparameter der elliptischen Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3.

Der Kürze halber setzen wir:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 + \lambda_1, & \beta_1 &= a_2 + \lambda_1, & \gamma_1 &= a_3 + \lambda_1 \\ \alpha_2 &= a_1 + \lambda_2, & \beta_2 &= a_2 + \lambda_2, & \gamma_2 &= a_3 + \lambda_2 \\ \alpha_3 &= a_1 + \lambda_3, & \beta_3 &= a_2 + \lambda_3, & \gamma_3 &= a_3 + \lambda_3; \end{aligned}$$

dadurch nehmen die Gleichungen (4) die Form an:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{y^2}{\beta_1} + \frac{z^2}{\gamma_1} &= 1 \\ \frac{x^2}{\alpha_2} + \frac{y^2}{\beta_2} + \frac{z^2}{\gamma_2} &= 1 \\ \frac{x^2}{\alpha_3} + \frac{y^2}{\beta_3} + \frac{z^2}{\gamma_3} &= 1, \end{aligned} \tag{4'}$$

wobei die Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 &= \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_3 - \beta_3 = a_1 - a_2 \\ \beta_1 - \gamma_1 &= \beta_2 - \gamma_2 = \beta_3 - \gamma_3 = a_2 - a_3 \\ \gamma_1 - \alpha_1 &= \gamma_2 - \alpha_2 = \gamma_3 - \alpha_3 = a_3 - a_1 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \beta_1 - \beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= \beta_2 - \beta_3 = \gamma_2 - \gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ \alpha_3 - \alpha_1 &= \beta_3 - \beta_1 = \gamma_3 - \gamma_1 = \lambda_3 - \lambda_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Flächen (4) oder (4') wollen wir zur Abkürzung mit (λ_1), (λ_2), (λ_3) bezeichnen.

Es seien nun h_1, h_2, h_3 die Parameter der Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3 und δ_1, δ_2, δ_3 die von dem gemeinsamen Mittelpunkte O der Flächen (4') auf ihre Tangentenebenen im Punkte $M(x, y, z)$ gefällten Perpendikel. Offenbar müssen die Parameter h_1, h_2, h_3 den δ_1, δ_2, δ_3 resp. parallel sein. Es bleibt daher nur noch der Sinn und die Grösse der Parameter zu bestimmen.

Nach der allgemeinen Definition des Differentialparameters

ist die Grösse h_1 gleich der Derivirten $\frac{d\lambda_1}{dn}$, wobei dn die Verschiebung des Punktes M in der Normale der Niveaufläche (λ_1) bedeutet. Infolge dieser Verschiebung ändern sich die Coordinaten x, y, z und λ gleichzeitig so, dass ihre Differentiale derjenigen Gleichung genügen, die durch Differentiation der ersten der Gleichungen (4') entsteht, nämlich der Gleichung:

$$\frac{2x\,dx}{\alpha_1}+\frac{2y\,dy}{\beta_1}+\frac{2z\,dz}{\gamma_1}-\left(\frac{z^2}{\alpha_1^2}d\alpha_1+\frac{y^2}{\beta_1^2}d\beta_1+\frac{x^2}{\gamma_1^2}d\gamma_1\right)=0.$$

Da nun

$$d\alpha_1=d\beta_1=d\gamma_1=d\lambda_1$$

und

$$\begin{aligned} dx &= \pm\, dn\,.\cos(\delta,x)=\pm\,\frac{x\delta_1}{\alpha_1}dn\\ dy &= \pm\, dn\,.\cos(\delta,y)=\pm\,\frac{y\delta_1}{\beta_1}dn\\ dz &= \pm\, dn\,.\cos(\delta,z)=\pm\,\frac{z\,d_1}{\gamma_1}dn, \end{aligned}\tag{7}$$

so geht jene Gleichung über in die Gleichung

$$\pm\left(\frac{x^2}{\alpha_1^2}+\frac{y^2}{\beta_1^2}+\frac{z^2}{\gamma_1^2}\right)2\delta_1\,dn-\left(\frac{x^2}{\alpha_1^2}+\frac{y^2}{\beta_1^2}+\frac{z^2}{\gamma_1^2}\right)d\lambda_1=0,$$

aus der sich ergiebt:

$$\frac{d\lambda_1}{dn}=\pm\,2\delta_1.$$

Die Grösse $\frac{d\lambda_1}{dn}$, die gleich h_1 ist, muss positiv sein; daher muss in der letzten Formel, sowie in den Formeln (7) von den beiden Zeichen $\pm$ das obere genommen werden, und man sieht daraus, dass h_1 und δ_1 denselben Sinn haben, nämlich vom Punkte O nach der Tangentialebene des Punktes M; dabei ist $h_1=2\delta_1$. Ebenso findet man, dass h_1 und h_3 denselben Sinn wie resp. δ_2 und δ_3 haben und dass $h_2=2\delta_2$, $h_3=2\delta_3$ ist.

Nun wollen wir beweisen, dass *die Parameter* h_1, h_2, h_3 *auf einander senkrecht stehen.* Wir werden dazu den Werth von $\cos(h_2, h_3)$ suchen.

Da allgemein

$$\cos(\delta_i x)=\frac{x\delta_i}{\alpha_i},\quad \cos(\delta_i y)=\frac{y\delta_i}{\beta_i},\quad \cos(\delta_i z)=\frac{z\delta_i}{\gamma_i},$$

so ist:

$$\cos(h_2 h_3) = \cos(\delta_2 \delta_3) = \delta_2 \delta_3 \left(\frac{x^2}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{y^2}{\beta_2 \beta_3} + \frac{z^2}{\gamma_2 \gamma_3}\right).$$

Aus den Gleichungen (4′) erhält man, wenn man die dritte von der zweiten subtrahirt und die Bedingungen (6) beachtet:

$$\frac{x^2}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{y^2}{\beta_2 \beta_3} + \frac{z^2}{\gamma_2 \gamma_3} = 0;$$

es ist daher $\cos(h_2 h_3) = 0$; folglich sind h_2 und h_3 senkrecht auf einander. Ebenso lässt sich die Perpendikularität von h_1 auf h_2 und h_3 beweisen.

Infolge der gegenseitigen Perpendikularität der Parameter h_1, h_2, h_3 bilden die elliptischen Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3 ein *orthogonales System.* Der Parameter h_1 ist längs der Tangente an die Coordinatenlinie $(\lambda_2 \lambda_3)$ nach der Seite hin gerichtet, wo $\Delta\lambda_1 > 0$, h_2 längs der Tangente an $(\lambda_3 \lambda_1)$ nach der Seite $\Delta\lambda_2 > 0$ und h_3 längs der Tangente an $(\lambda_1 \lambda_2)$ nach der Seite $\Delta\lambda_3 > 0$. Die Richtungen der Parameter h_1, h_2, h_3 sind zugleich auch die Richtungen der Coordinatenaxen.

Diese Richtungen haben noch folgende bemerkenswerthe Eigenschaft:

Irgend zwei von den Parametern h_1, h_2, h_3 sind den Axen derjenigen Linie zweiter Ordnung parallel, die man als Schnitt einer diesen Parametern parallelen, durch das Centrum gelegten Ebene mit derjenigen von den Flächen (λ_1), (λ_2), (λ_3) erhält, welche jene Parameter berühren.

Zum Beweise dieses Satzes wollen wir mit

$$(abc), \quad (a'b'c'), \quad (a''b''c'')$$

resp. die Cosinus der Winkel bezeichnen, die vom Radiusvector $r = OM$ und den Parametern h_2 und h_3 mit den Axen Ox, Oy, Oz gebildet werden. Aus den Gleichungen (4′) ergeben sich durch Subtraction der zweiten und dritten von der ersten die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{y^2}{\beta_1 \beta_2} + \frac{z^2}{\gamma_1 \gamma_2} = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha_1 \alpha_3} + \frac{y^2}{\beta_1 \beta_3} + \frac{z^2}{\gamma_1 \gamma_3} = 0, \quad (8)$$

welche ausdrücken, dass h_2 und h_3 auf h_1 senkrecht stehen.

Da aber

$$x:y:z = a:b:c,\ \frac{x}{\alpha_2}:\frac{y}{\beta_2}:\frac{z}{\gamma_2} = a':b':c',$$

$$\frac{x}{\alpha_3}:\frac{y}{\beta_3}:\frac{z}{\gamma_3} = a'':b'':c'', \tag{9}$$

so können die Gleichungen (8) auch wie folgt, geschrieben werden:

$$\frac{aa'}{\alpha_1}+\frac{bb'}{\beta_1}+\frac{cc'}{\gamma_1}=0,\ \frac{aa''}{\alpha_1}+\frac{bb''}{\beta_1}+\frac{cc''}{\gamma_1}=0. \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (8) folgt noch, wenn man sie von einander subtrahirt und die Bedingungen (6) beachtet, die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}+\frac{y^2}{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3}+\frac{z^2}{\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3}=0,$$

welche mit Hilfe der Proportionen (9) in die folgende übergeht

$$\frac{a'\,a''}{\alpha_1}+\frac{b'\,b''}{\beta_1}+\frac{c'\,c''}{\gamma_1}=0.$$

Diese Gleichung und die Gleichungen (10) sagen aus, dass die Richtungen des Radiusvectors $OM = r$ und der durch den Mittelpunkt O der Fläche (λ_1) parallel den Parametern h_2 und h_3 gezogenen Geraden ein System von conjugirten Durchmessern bilden; also sind die zu h_2 und h_3 parallelen Geraden conjugirte Durchmesser der Curve, in welcher die Ebene dieser Geraden die Fläche (λ_1) schneidet. Da sie aber auf einander senkrecht stehen, so sind sie die Axen dieser Curve.

Es seien ϱ und ϱ' die Halbaxen dieser Curve. Man kann sie leicht in Function der elliptischen Coordinaten ausdrücken und dann aus ihnen Ausdrücke für die Parameter h_1, h_2, h_3 finden.

Wenn man in der Gleichung der Fläche (λ_1)

$$\frac{x^2}{\alpha_1}+\frac{y^2}{\beta_1}+\frac{z^2}{\gamma_1}=1$$

setzt $x = \varrho a'$, $y = \varrho b'$, $z = \varrho c'$, so giebt dieselbe

$$\varrho^2\left(\frac{a'^2}{\alpha_1}+\frac{b'^2}{\beta_1}+\frac{c'^2}{\gamma_1}\right)=1;$$

wegen des Parallelismus von ϱ und δ_2 hat man aber:

$$a' = \frac{x\delta_2}{\alpha_2},\ b' = \frac{y\delta_2}{\beta_2},\ c' = \frac{z\delta_2}{\gamma_2};$$

daher ist:

$$\varrho^2 \left(\frac{x^2}{\alpha_1\, \alpha_2^2} + \frac{y^2}{\beta_1\, \beta_2^2} + \frac{z^2}{\gamma_1\, \gamma_2^2} \right) \delta_2^2 = 1. \tag{11}$$

Die Formel für das vom Mittelpunkte O auf die Tangentenebene gefällte Perpendikel [s. S. 112 Form. (c)] giebt:

$$\frac{1}{\delta_2^2} = \frac{x^2}{\alpha_2^2} + \frac{y^2}{\beta_2^2} + \frac{z^2}{\gamma_2^2}.$$

Subtrahirt man hiervon die Bedingung der Perpendikularität von h_1 und h_2, nämlich

$$\frac{x^2}{\alpha_1\, \alpha_2} + \frac{y^2}{\beta_1\, \beta_2} + \frac{z^2}{\gamma_1\, \gamma_2} = 0,$$

so folgt

$$\frac{1}{\delta_2^2} = \left(\frac{x^2}{\alpha_1\, \alpha_2^2} + \frac{y^2}{\beta_1\, \beta_2^2} + \frac{z^2}{\gamma_1\, \gamma_2^2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2),$$

was in Verbindung mit Gleichung (11) giebt:

$$\varrho^2 = \alpha_1 - \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Ebenso findet man:

$$\varrho'^2 = \alpha_1 - \alpha_3 = \lambda_1 - \lambda_3.$$

Das Product $\varrho \varrho' \delta_1$ ist das Volumen des über den conjugirten Semidiametern r, ϱ, ϱ' der Fläche (λ_1) construirten Parallelepipedons; nach einem bekannten Satze ist dieses Volumen dem Volumen des über den Halbaxen $\sqrt{\alpha_1}$, $\sqrt{\beta_1}$, $\sqrt{\gamma_1}$ derselben Fläche construirten Parallelepipedons gleich; es ist also

$$\delta_1^2 \varrho^2 \varrho'^2 = \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1;$$

hieraus ergiebt sich:

$$\delta_1^2 = \frac{\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1}{\varrho^2\, \varrho'^2} = \frac{\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)\,(\alpha_1 - \alpha_3)};$$

da aber $h_1 = 2\delta_1$, so ist endlich:

$$h_1^2 = \frac{4\, \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)\,(\alpha_1 - \alpha_3)}.$$

Ebenso findet man:

$$h_2^2 = \frac{4\, \alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)\,(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad h_3^2 = \frac{4\, \alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)\,(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Aus diesen Formeln erhält man Ausdrücke für die Parameter h_1, h_2, h_3 in den elliptischen Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3, und zwar:

$$h_1 = 2\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}}$$

$$h_2 = 2\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}} \qquad (12)$$

$$h_3 = 2\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}.$$

58. Die geradlinigen Coordinaten x, y, z lassen sich folgendermassen als Functionen der elliptischen Coordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ausdrücken.

Setzen wir in Gleichung (3)

$$a_1 + \lambda = \alpha, \quad a_1 - a_2 = m, \quad a_1 - a_3 = n,$$

so erhalten wir eine Gleichung dritten Grades für α

$$\alpha^3 - (m + n + x^2 + y^2 + z^2)\,\alpha^2 +$$
$$[mn + (m+n)\,x^2 + ny^2 + mz^2]\,\alpha - mnx^2 = 0, \quad (13)$$

deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind. Da das Product dieser Wurzeln dem das α nicht enthaltenden Gliede, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, gleich sein muss, so ist

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = mnx^2,$$

woraus folgt

$$x^2 = \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}{mn} = \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)};$$

folglich ist

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}};$$

ebenso erhält man:

$$y = \pm\sqrt{\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}}.$$

Diese Formeln dienen zur Transformation irgend einer Function der Coordinaten x, y, z in eine Function der Coordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Zu ihnen tritt noch der Ausdruck des Quadrates des Radiusvectors $OM = r$ in elliptischen Coordinaten hinzu. Nach der Eigenschaft der Wurzelsummen hat man aus Gleichung (13)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m + n + x^2 + y^2 + z^2,$$

woraus folgt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - m - n$$

oder

$$r^2 = a_1 + a_2 + a_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \qquad (14)$$

Die elliptischen Coordinaten finden sehr wichtige Anwendung in der Geometrie, der Mechanik und der mathematischen Physik.*)

Transformation vermittelst reciproker Radienvectoren. Thomson'sche Coordinaten.

59. Wir wollen noch ein bemerkenswerthes orthogonales Coordinatensystem betrachten, das in der Mechanik und mathematischen Physik nicht selten vorkommt.

Wenn V eine Function des Punktes μ ist, von welchem ein anderer Punkt m derart abhängt, dass man, wenn die Lage des ersteren bekannt ist, die Lage des zweiten bestimmen kann, so ist V auch eine Function des Punktes m; daher sind die Coordinaten des Punktes μ, von welcher Art sie auch sein mögen, auch Coordinaten des Punktes m, aber im allgemeinen von anderer Art.

Nehmen wir nun an, die Beziehung zwischen μ und m bestehe darin, dass die beiden Punkte auf einer und derselben, durch den festen Ursprung O gehenden Geraden liegen und dass die Radienvectoren $O\mu = \varrho$ und $Om = r$ einander umgekehrt proportional sind, d. h. dass das Product ϱr einer gegebenen constanten Grösse c^2 gleich ist. Auf Grund dieser Beziehung

*) Eine ausführliche Darlegung der Eigenschaften der confocalen Flächen zweiter Ordnung findet man in dem Werke von G. Salmon: A Treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions, third edition, Dublin 1874; (die deutsche Uebersetzung unter dem Titel: Analytische Geometrie des Raumes von G. Salmon, deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler, 2. Aufl., 1874). Wir haben diesem Werke die Methode, die Parameter in elliptischen Coordinaten auszudrücken, entnommen. Die von uns dargelegte Methode, die geradlinigen Coordinaten in elliptischen auszudrücken, findet sich im XI. Bande des Journal de mathématiques pures et appliquées de J. Liouville, p. 177. Andere Methoden zur Darstellung der Coordinaten sowie auch der Parameter findet man in den Vorlesungen über Dynamik von Jacobi.

verwandelt sich das geometrische Gebilde von einer, zwei oder drei Dimensionen, dem die Punkte μ angehören, in ein geometrisches Gebilde von ebensoviel Dimensionen für die Punkte m, und ebenso verwandelt sich das Gebilde der Punkte m in das Gebilde der Punkte μ. Diese Methode der Umwandlung der geometrischen Oerter der Punkte μ und m heisst Transformation vermittelst reciproker Radienvectoren (transformation par rayons vecteurs réciproques).*)

Aus gegebener Lage des Punktes μ bestimmt sich die des Punktes m folgendermassen. Denken wir uns eine Kugel, die ihren Mittelpunkt in dem gegebenen Punkte O und einen Radius gleich c hat und construiren wir auf die bekannte Weise die Ebene der ersten Polare für den Punkt μ bezüglich dieser Kugel; der Schnittpunkt dieser Ebene mit dem Radiusvector $O\mu$ ist der Ort des Punktes m; denn man hat nach einer Eigenschaft der Polare $Om \cdot O\mu = c^2$. Umgekehrt ist der Schnittpunkt der Polare des Punktes m mit dem Radiusvector Om der Ort des Punktes μ. Nach einer Eigenschaft der Polare sind die Punkte μ und m conjugirt harmonisch bezüglich der Schnittpunkte der Geraden $O\mu$ mit der Kugeloberfläche. Bewegt sich μ auf einer Fläche (Σ), so wird sich m auf einer andern Fläche (σ) bewegen, welche die Enveloppe aller Polaren des Punktes μ ist. Ebenso ist (Σ) die Enveloppe aller Polaren des Punktes m.

Uebrigens gilt diese Bestimmung des Punktes m aus einem gegebenen Punkte μ nur für den Fall, dass μ und m auf derselben Seite des Anfangspunktes O liegen. Wenn aber μ und m auf verschiedenen Seiten von O liegen, so muss man den Schnittpunkt m' der Polare des Punktes μ mit dem Radiusvector $O\mu$ bestimmen und dann, um den Punkt m selbst zu finden, eine Strecke Om, gleich und entgegengesetzt Om', auftragen.

Gesetzt, μ sei durch geradlinige rechtwinklige Coordinaten

*) William Thomson, der diese Methode zur Lösung von Problemen der Elektrostatik erdachte, die sich auf die Vertheilung der Elektricität auf Leitern beziehen, nannte sie das Princip der *elektrischen Bilder* (principle of electrical images). S. Cambridge and Dublin Math. Journ., Vol. III, p. 141 Note.

x, y, z in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz bestimmt. Man kann x, y, z als Coordinaten des Punktes m betrachten; dieselben sind, wie wir gleich sehen werden, krummlinig, denn sie bestimmen drei Kugeln, die sich im Punkte m schneiden.

Bezeichnet φ den Winkel, welchen die Radienvectoren ϱ und r mit der x-Axe bilden*), so ist $x = \varrho \cos\varphi$, und nach der Bedingung $\varrho r = c^2$ erhält man:

$$x = \frac{c^2}{r} \cos\varphi. \tag{1}$$

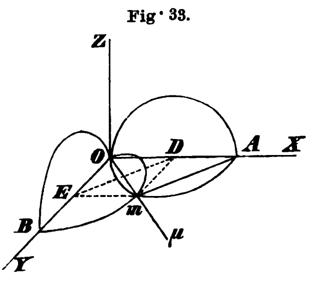
Für einen constanten Werth von x ist dies die Gleichung derjenigen Fläche, in die sich die der Ebene yOz parallele Coordinatenebene (x) verwandelt. Man sieht leicht, dass diese Fläche eine Kugel ist. Setzt man in der vorigen Gleichung $\varphi = 0$ für $x > 0$ oder $\varphi = 180^0$ für $x < 0$ und bezeichnet man den entsprechenden Werth von r mit α, so wird:

$$x = \pm \frac{c^2}{\alpha}, \text{ und } \alpha = \pm \frac{c^2}{x};$$

in dieser Entfernung vom Coordinatenanfang schneidet die Fläche (1) die Axe Ox. Der Schnittpunkt A (Fig. 33) liegt auf der Seite der positiven x, wenn $x > 0$, und auf der Seite der negativen x, wenn $x < 0$. Die Gleichung (1) geht über in

$$r = \pm \alpha \cos\varphi,$$

und dies zeigt, dass der Punkt m der Endpunkt eines von A auf die Gerade $O\mu$ gefällten Perpendikels ist; folglich ist die Fläche (1), d. h. das Niveau (x) für den Punkt m, eine Kugel vom Durchmesser OA. Ist D der Mittelpunkt dieser Kugel, d. h. die Mitte von OA, so ist der Radius Dm die Normale dieser Fläche; folglich muss der Differentialparameter, dessen Grösse x ist, die Richtung dieses Radius haben. Bezeichnen wir diesen Parameter mit h_1 und suchen wir seine Grösse und seinen



*) Wir beschränken uns auf den Fall, wo ϱ und r denselben Sinn haben.

Sinn. Aus der Formel $x = \pm \frac{c^2}{\alpha}$ ist ersichtlich, dass im Falle $x > 0$ bei wachsendem x der Durchmesser $\alpha = OA$ und der Radius Dm abnehmen; dadurch wird der Punkt m nach dem Inneren der Kugel (x) verschoben. Im Falle $x < 0$ wachsen bei wachsendem x auch der Diameter $OA = \alpha$ und der Radius Dm; dadurch verschiebt sich der Punkt m aus der Kugel (x) heraus. Folglich ist im ersten Falle h_1 nach dem Inneren, im zweiten nach dem Aeusseren der Kugel (x) gerichtet.

Die Grösse von h_1 kann man folgendermassen finden. Man ertheile dem Punkte m eine Verschiebung auf dem Radiusvector Om; dadurch ändert sich φ nicht und Gleichung (1) ergiebt:

$$\frac{dx}{dr} = -\frac{c^2}{r^2}\cos\varphi; \tag{2}$$

es ist aber auch $\frac{dx}{dr} = h_1 \cos(h_1 r)$, wo der Winkel $(h_1 r)$ immer gleich $180^0 - \varphi$ ist wegen der Gleichheit der Winkel DmO und DOm; daher ist

$$\frac{dx}{dr} = -h_1 \cos\varphi$$

und die Gleichung (2) giebt:

$$h_1 = \frac{c^2}{r^2} = \frac{\varrho^2}{c^2} = \frac{\varrho}{r}.$$

Ebenso findet man, dass das Niveau (y) für den Punkt m eine Kugel ist, deren Mittelpunkt auf der Axe Oy liegt und deren Durchmesser $OB = \pm \frac{c^2}{y}$ ist. Der Parameter h_2 der Grösse y hat die Richtung des Radius dieser Kugel und ist gleich $\frac{c^2}{r^2}$. Das Niveau (z) endlich ist eine Kugel, deren Mittelpunkt auf der Axe Oz liegt und deren Durchmesser $OC = \pm \frac{c^2}{z}$ ist; der Parameter h_3 der Function z hat die Richtung des Radius dieser Kugel und ist gleich $\frac{c^2}{r^2}$. Es sind also alle drei Parameter h_1, h_2, h_3 der krummlinigen Coordinaten x, y, z des Punktes m einer und derselben Grösse

$$\frac{c^2}{r^2} = \frac{\varrho^2}{c^2} = \frac{\varrho}{r}$$

gleich.

Die krummlinigen Coordinaten x, y, z des Punktes m sind orthogonal; denn ihre Parameter h_1, h_2, h_3 sind auf einander senkrecht. Zum Beweise wollen wir annehmen, D und E seien die Mittelpunkte der Kugeln (x) und (y); ziehen wir dann DE, Dm und Em, so erhalten wir zwei, wegen der Gleichheit der Seiten congruente Dreiecke DmE und DOE, und da $\sphericalangle DOE$ ein Rechter ist, so ist auch $\sphericalangle DmE$, der Winkel der Parameter h_1 und h_2, ein Rechter. Ebenso lässt sich beweisen, dass die Winkel $(h_2\, h_3)$ und $(h_1\, h_3)$ Rechte sind.

Die geradlinigen, rechtwinkligen Coordinaten des Punktes μ sind daher krummlinige rechtwinklige Coordinaten des Punktes m. Die Coordinatenaxen des letzteren Systems fallen mit den Richtungen der Parameter h_1, h_2, h_3 zusammen. Wir werden derartige Coordinaten Thomson'sche Coordinaten nennen, da dieselben von dem englischen Mathematiker William Thomson in die mathematische Physik eingeführt wurden.

60. Die Function $V = f(x, y, z)$ der geradlinigen Coordinaten x, y, z des Punktes μ ist eine Function der krummlinigen Coordinaten des Punktes m. Bezeichnet Π den Parameter von V, wenn V als Function des Punktes μ angesehen wird, und P den Parameter von V, wenn es als Function des Punktes m betrachtet wird, so hat man:

$$\Pi \cos(\Pi x) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \Pi \cos(\Pi y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \Pi \cos(\Pi z) = \frac{\partial f}{\partial z};$$

$$P \cos(P h_1) = \frac{\varrho^2}{c^2}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad P \cos(P h_2) = \frac{\varrho^2}{c^2}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad P \cos(P h_3) = \frac{\varrho^2}{c^2}\frac{\partial f}{\partial z};$$

folglich ist:

$$P = \frac{\varrho^2}{c^2}\Pi = \frac{\varrho}{r}\Pi,$$

$$\cos(P h_1) = \cos(\Pi x), \ \cos(P h_2) = \cos(\Pi y), \ \cos(P h_3) = \cos(\Pi z).$$

Diese Formeln zeigen, dass *der Parameter P mit den Coordinatenparametern h_1, h_2, h_3 dieselben Winkel bildet, die der Parameter Π mit den Axen Ox, Oy, Oz bildet; dabei sind die Parameter P und Π den Entfernungen ϱ und r der Punkte μ und m vom Ursprung O umgekehrt proportional.*

Aus dieser Eigenschaft des Parameters P ergeben sich bemerkenswerthe Eigenschaften des Systems der Punkte m, in welches das System der Punkte μ durch die Transformation übergeht.

Gesetzt, die als Functionen des Punktes μ angesehenen Grössen V und V' haben die Niveaux (Σ) und (Σ'). Diese Flächen gehen bei der Transformation vermittelst reciproker Radienvectoren in die Flächen (S) und (S') über, welche die Niveauflächen sind, wenn V und V' als Functionen des Punktes m betrachtet werden. Die Parameter P und P' dieser Functionen müssen, wie oben bewiesen, mit den Coordinaten-Parametern h_1, h_2, h_3 dieselben Winkel bilden, welche die Parameter Π und Π' der als Functionen des Punktes μ betrachteten Grössen V und V' mit den Axen Ox, Oy, Oz bilden. Daher ist der Winkel (PP') dem Winkel $(\Pi\Pi')$ gleich, und folglich bilden die Tangentenebenen der Flächen (S) und (S') im Punkte m einen Winkel, der demjenigen gleich ist, welchen die Tangentenebenen an die Flächen (Σ) und (Σ') im Punkte μ bilden. Werden drei Flächen (Σ), (Σ'), (Σ''), die sich im Punkte μ schneiden, in die Flächen (S), (S'), (S'') transformirt, so müssen die letzteren sich im Punkte m schneiden, und ihre Tangentenebenen in diesem Punkte müssen eine körperliche Ecke bilden, die mit derjenigen körperlichen Ecke congruent ist, welche die Tangentenebenen der Flächen (Σ), (Σ'), (Σ'') im Punkte μ bilden. Man sieht daraus, dass, wenn zwei Linien (σ), (σ'), die sich im Punkte μ schneiden, in (s) und (s') transformirt werden, die Tangenten der letzteren im Punkte m einen dem Winkel der Tangenten an (σ) und (σ') im Punkte μ gleichen Winkel bilden.

Nehmen wir nun noch eine Fläche (Σ''') hinzu, die die Schnittlinien der Flächen (Σ), (Σ'), (Σ'') in den Punkten ν, ν', ν'' trifft, welche unendlich nahe bei μ liegen. Die vier Flächen (Σ), (Σ'), (Σ''), (Σ''') begrenzen ein Volumen $\mu\gamma\gamma'\gamma''$ dessen drei Dimensionen sämmtlich unendlich klein sind und das man als das Tetraeder ansehen kann, welches die Tangentenebenen der Flächen (Σ), (Σ'), (Σ'') im Punkte μ mit der Tangentenebene von (Σ''') in einem der Punkte ν, ν', ν'' bilden. Dieses Tetraeder transformirt sich in ein Tetraeder $mnn'n''$, dessen ebene Winkel und Flächenwinkel den entsprechenden Winkeln des ersten Tetraeders entweder gleich sind oder sich von jenen doch nur um unendlich kleine Grössen unter-

scheiden. Vernachlässigt man also jene unendlich kleinen Unterschiede, so kann man sagen, dass die Tetraeder $mnn'n''$ und $\mu\nu\nu'\nu''$ ähnlich sind und dass zwei entsprechende Volumina von endlichen Dimensionen in dem Systeme der Punkte μ und in dem der Punkte m derart in Theile oder Elemente von drei unendlich kleinen Dimensionen zerlegt werden können, dass die entsprechenden Elemente ähnlich sind.

Ebenso lässt sich beweisen, dass entsprechende Flächenräume (Σ) und (S) von endlichen Dimensionen sich in ähnliche Elemente von zwei unendlich kleinen Dimensionen zerlegen lassen. Das Verhältniss zwischen den Grössen der entsprechenden ähnlichen Elemente ändert sich im Allgemeinen beim Uebergange von einem Paare von Elementen zu einem anderen. Zur Bestimmung dieses Verhältnisses wollen wir das Verhältniss zwischen zwei entsprechenden unendlich kleinen Linien $\mu\mu'$ und mm' zu bestimmen suchen. Da $O\mu . Om = c^2$ und $O\mu' . Om' = c^2$, so ist $O\mu . Om = O\mu' . Om'$; folglich $O\mu : O\mu' = Om' : Om$, und es sind daher die Dreiecke $\mu O\mu'$ und $m'Om$ ähnlich, weil sie im Punkte O einen von proportionalen Seiten eingeschlossenen gemeinsamen Winkel haben; folglich ist:

$$\frac{mm'}{\mu\mu'} = \frac{Om'}{O\mu} .$$

Gesetzt, es sei $\mu\mu'$ die Sehne des in μ endigenden Bogenincrementes $\Delta\sigma$ der Curve (σ) und mm' die Sehne des in m endigenden Bogenincrementes Δs der dem (σ) entsprechenden Curve (s). Dann ist die Grenze des Verhältnisses $\frac{mm'}{\mu\mu'}$ gleich $\frac{ds}{d\sigma}$; dieselbe soll aber der Grenze des Verhältnisses $\frac{Om'}{O\mu}$ gleich sein, die wiederum dem Verhältnisse $\frac{Om}{O\mu'} = \frac{r}{\varrho}$ gleich ist. Man hat daher $\frac{ds}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho} = \frac{1}{h}$, wo h der gemeinsame Werth der Coordinatenparameter ist.

Das Verhältniss der ähnlichen Flächenelemente in den Punkten μ und m ist $\frac{r^2}{\varrho^2} = \frac{1}{h^2}$, und das Verhältniss ähnlicher Körperelemente ist $\frac{r^3}{\varrho^3} = \frac{1}{h^3}$.

Ist σ der vom Punkte μ und s der vom Punkte m in der Zeit t durchlaufene Weg, so ist das Verhältniss der Geschwindigkeiten dieser beiden Bewegungen zur Zeit t

$$\frac{ds}{dt} : \frac{d\sigma}{dt} = \frac{r}{\varrho},$$

d. h. die *Geschwindigkeiten sind den Entfernungen der beweglichen Punkte vom Ursprung O proportional.*

61. Bezeichnet man mit ξ, η, ζ die geradlinigen Coordinaten des Punktes m bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz, so hat man:

$$\xi : x = \eta : y = \zeta : z = r : \varrho = c^2 : \varrho^2 = r^2 : c^2,$$

woraus sich ergiebt:

$$\xi = \frac{c^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{c^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{c^2 z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

und

$$x = \frac{c^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{c^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{c^2 \zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Die ersten drei Formeln können zur Transformation der Gleichung einer in geradlinigen Coordinaten ξ, η, ζ gegebenen Fläche (S) in eine Gleichung in krummlinigen Coordinaten x, y, z dienen; diese letztere Gleichung ist dann zugleich die Gleichung der Fläche (Σ) in geradlinigen Coordinaten x, y, z. Die übrigen drei Formeln dienen zu der umgekehrten Transformation.

Betrachten wir nun einige wichtigere Beispiele von Transformationen einer Fläche (Σ) in eine Fläche (S).

1) Es soll die Ebene (Σ)

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

transformirt werden.

Die Gleichung der transformirten Fläche (S) in geradlinigen Coordinaten ξ, η, ζ ist:

$$c^2 \frac{\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \delta.$$

Dieselbe lässt sich leicht auf die folgende Form bringen

$$\left(\xi - \frac{c^2 \alpha}{2\delta}\right)^2 + \left(\eta - \frac{c^2 \beta}{2\delta}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{c^2 \gamma}{2\delta}\right)^2 = \frac{c^4}{4\delta^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

die eine Kugel darstellt. Der Mittelpunkt derselben hat die Coordinaten

$$\frac{c^2\alpha}{2\delta}, \frac{c^2\beta}{2\delta}, \frac{c^2\gamma}{2\delta};$$

der Radius ist gleich $\frac{c^2}{2\delta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$; sie geht durch den Coordinatenursprung und ihr Mittelpunkt liegt auf dem vom Ursprung O auf die Ebene (Σ) gefällten Perpendikel.

Wenn die Ebene (Σ) durch den Ursprung O geht, so transformirt sich ihre Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

in die Gleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0,$$

die eine mit (Σ) zusammenfallende Ebene darstellt.

Eine in der Ebene (Σ) gelegene Gerade (λ) geht durch die Transformation in die Peripherie desjenigen Kreises über, der durch den Schnitt der Kugel (S) mit der durch den Ursprung O und die Gerade (λ) gehenden Ebene entsteht.

2) Die Kugelfläche (Σ)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

zu transformiren.

Die Gleichung der transformirten Fläche lässt sich in die Form bringen:

$$\left(\xi - \frac{c^2\alpha}{\delta^2 - R^2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{c^2\beta}{\delta^2 - R^2}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{c^2\gamma}{\delta^2 - R^2}\right)^2 = \frac{c^4R^2}{(\delta^2 - R^2)^2},$$

wo $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Diese Gleichung zeigt, dass (S) eine Kugel ist; die Coordinaten ihres Mittelpunktes sind

$$\frac{c^2\alpha}{\delta^2 - R^2}, \frac{c^2\beta}{\delta^2 - R^2}, \frac{c^2\gamma}{\delta^2 - R^2};$$

ihr Radius ist $\frac{c^2R}{\delta^2 - R^2}$ oder $\frac{c^2R}{R^2 - \delta^2}$, je nachdem $\delta > R$ oder $\delta < R$ ist.

Nehmen wir noch die Kugel (Σ')

$$(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2 = R'^2$$

hinzu. Dieselbe geht in die Kugel (S')

$$\left(\xi - \frac{c^2\alpha'}{\delta'^2 - R'^2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{c^2\beta'}{\delta'^2 - R'^2}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{c^2\gamma'}{\delta'^2 - R'^2}\right)^2 = \frac{c^4R'^2}{(\delta'^2 - R'^2)^2}$$

über, wo

$$\delta'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2.$$

Die beiden Kugeln (S) und (S') sind concentrisch, wenn

$$\frac{c^2\alpha'}{\delta'^2 - R'^2} = \frac{c^2\alpha}{\delta^2 - R^2}, \quad \frac{c^2\beta'}{\delta'^2 - R'^2} = \frac{c^2\beta}{\delta^2 - R^2}, \quad \frac{c^2\gamma'}{\delta'^2 - R'^2} = \frac{c^2\gamma}{\delta^2 - R^2};$$

daraus ergiebt sich zunächst die Bedingung

$$\alpha' : \alpha = \beta' : \beta = \gamma' : \gamma,$$

welche aussagt, dass die Mittelpunkte der Kugeln (Σ) und (Σ') in einer durch den Ursprung O gehenden Geraden liegen müssen; ferner die Bedingung

$$\frac{\delta'^2 - R'^2}{\delta^2 - R^2} = \frac{\delta'}{\delta},$$

durch welche die gegenseitige Lage der Kugeln (Σ) und (Σ') bestimmt ist.

Diese Bedingung kann man auch schreiben:

$$\frac{\delta^2 - R^2}{\delta} = \frac{\delta'^2 - R'^2}{\delta'};$$

oder

$$\frac{R^2 - \delta^2}{\delta} = \frac{R'^2 - \delta'^2}{\delta'}.$$

Die Grösse $\frac{\delta^2 - R^2}{\delta}$ oder $\frac{R^2 - \delta^2}{\delta}$ (je nachdem $\delta > R$ oder $\delta < R$) ist der Abstand des Punktes O von der Polare dieses Punktes bezüglich einer Kugel vom Radius R; folglich besteht jene Bedingung darin, dass der Ursprung O bezüglich beider Kugeln eine gemeinsame Polarebene haben muss. Daraus lässt sich leicht eine Construction der einen Kugel ableiten, wenn die andere gegeben ist.

Diese Transformation zweier nicht concentrischen Kugeln in concentrische findet eine wichtige Anwendung bei der Lösung des Problems von der Vertheilung der Elektricität auf sphärischen nichtconcentrischen Leitern.*)

*) Ausführlichere Untersuchungen über die Transformation durch reciproke Radienvectoren finden sich in einem Mémoire von Liouville, das im XII. Bande des Journal de Mathématiques pures et appliquées steht, sowie in seiner Note VI zu dem Werke von Monge, Application de l'analyse à la Géométrie. Einige Anwendungen auf die Lösung von Problemen der Elementargeometrie und der sphärischen Trigonometrie findet man in dem Werke von Paul Serret, Des méthodes en Géométrie, Paris 1855.

Homogene Coordinaten.

62. Sind q_1, q_2, q_3, q_4 vier Functionen des Punktes m, so sind die Verhältnisse von dreien unter ihnen zu der vierten, z. B.

$$\frac{q_1}{q_4}, \frac{q_2}{q_4}, \frac{q_3}{q_4},$$

drei neue Functionen des Punktes m, die als Coordinaten des Punktes m angesehen werden können. Bei derartigen Coordinaten lässt sich die Gleichung $f\left(\frac{q_1}{q_4}, \frac{q_2}{q_4}, \frac{q_3}{q_4}\right) = 0$ einer beliebigen Fläche in eine in Bezug auf die vier Grössen q_1, q_2, q_3, q_4 homogene Gleichung umformen; daher nennt man diese vier Grössen die *homogenen Coordinaten des Punktes m.*

Wegen der bekannten Vortheile, welche die ganzen homogenen Functionen in der Analysis gewähren, zieht man häufig die homogenen Coordinaten anderen nicht homogenen vor. Die gebräuchlichsten homogenen Coordinaten sind die *tetraedrischen,* welche die Entfernungen des Punktes m von den vier Seitenflächen eines Tetraeders sind.

Die drei Functionen q_1, q_2, q_3 eines Punktes m, der einer gegebenen Fläche (S) angehört, lassen sich als homogene Coordinaten dieses Punktes ansehen, indem sie dessen Lage durch die Verhältnisse zweier von diesen Functionen zu der dritten bestimmen, z. B. durch die Verhältnisse $\frac{q_1}{q_3}$, $\frac{q_2}{q_3}$. Die gebräuchlichsten homogenen Coordinaten in der Ebene sind die *trilinearen Coordinaten,* welche die Abstände des Punktes von den Seiten eines gegebenen Dreieckes sind.

63. Sind h_1, h_2, h_3, h_4 die Differentialparameter der homogenen Coordinaten q_1, q_2, q_3, q_4, so ist der Parameter P der Function

$$V = f(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

(s. §. 52) die geometrische Summe der vier partiellen Parameter:

$$P_1 = \pm\frac{\partial V}{\partial q_1} h_1, \quad P_2 = \pm\frac{\partial V}{\partial q_2} h_2, \quad P_3 = \pm\frac{\partial V}{\partial q_3} h_3, \quad P_4 = \pm\frac{\partial V}{\partial q_4} h_4,$$

die man auf h_1, h_2, h_3, h_4 in dem durch das Vorzeichen der partiellen Derivirten $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ bestimmten Sinne aufträgt.

Es seien z. B. q_1, q_2, q_3, q_4 tetraedrische Coordinaten, d. h. die vom Punkte m auf die Flächen eines gegebenen Tetraeders T gefällten Perpendikel.

Dann ist $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$, und

$$P_1 = \pm \frac{\partial V}{\partial q_1},\; P_2 = \pm \frac{\partial V}{\partial q_2},\; P_3 = + \frac{\partial V}{\partial q_3},\; P_4 = \pm \frac{\partial V}{\partial q_4}.$$

Wir setzen allgemein $P_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, indem wir P_i als eine im Sinne der positiven oder negativen q_i aufgetragene positive oder negative Strecke betrachten. Ist nun V eine homogene Function vom n^{ten} Grade, so hat man:

$$\begin{aligned} nV &= \frac{\partial V}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} q_2 + \frac{\partial V}{\partial q_3} q_3 + \frac{\partial V}{\partial q_4} q_4 \\ &= P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 + P_4 q_4. \end{aligned} \tag{1}$$

Zwischen den tetraedrischen Coordinaten q_1, q_2, q_3, q_4 besteht eine lineare Gleichung, die man folgendermassen erhält.

Bezeichnen wir mit Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die Flächenzahlen der Seiten des Tetraeders T, auf die die Perpendikel q_1, q_2, q_3, q_4 gefällt sind, und nehmen wir allgemein als Richtung der positiven q_i diejenige an, welche von der Fläche Q_i nach der Seite hin geht, wo sich die ihr gegenüberliegende Tetraederecke befindet; endlich bedeute T das Volumen des Tetraeders. Da dieses Volumen die algebraische Summe derjenigen vier Pyramiden ist, die die Seitenflächen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 zu Grundflächen und den Punkt m zur gemeinschaftlichen Spitze haben, so hat man für jede Lage des Punktes die Relation:

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 + Q_4 q_4 = 3T. \tag{2}$$

Mit Hilfe dieser Bedingung kann man aus der Function V eine der Coordinaten q_1, q_2, q_3, q_4 eliminiren und sie so in Form einer Function von drei unabhängigen Variablen darstellen. Mit Hilfe derselben Bedingung kann man jede nicht homogene Function der Variablen q_1, q_2, q_3, q_4 homogen machen, indem man die zur Homogeneität fehlenden Dimensionen durch Potenzen der Grösse

$$\frac{1}{3T}(Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 + Q_4 q_4)$$

ergänzt; jede homogene Function $V = f(q_1, q_2, q_3, q_4)$ vom n^{ten} Grade kann man in der Form eines Bruches

$$V = \frac{(3\,T)^n\, f(q_1, q_2, q_3, q_4)}{(Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 + Q_4 q_4)^n}$$

darstellen, der, wenn man Zähler und Nenner durch q_i^n dividirt, zu einer Function der Verhältnisse von drei Coordinaten zur vierten wird.

64. Für den Fall einer linearen homogenen Function geht der Ausdruck (1) über in

$$V = P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 + P_4 q_4,$$

wo P_1, P_2, P_3, P_4 constante Grössen sind. Bezeichnen wir denselben zur Abkürzung mit

$$V = \Sigma P_i q_i. \tag{3}$$

Nun sei V' der Werth dieser Function für einen anderen Punkt m' (q'_1, q'_2, q'_3, q'_4); man hat dann

$$V' = \Sigma P_i q'_i$$

und

$$V' - V = \Sigma P_i (q'_i - q_i).$$

Hierin ist $q'_i - q$ die auf P_i projicirte Entfernung des Punktes m von m', die wir mit r bezeichnen wollen, indem wir den Punkt m als Ursprung ansehen; es ist also

$$q'_i - q_i = r \cos(rP)$$

und daher

$$V' - V = \Sigma P_i\, r \cos(P_i r) = r\, \Sigma P_i \cos(P_i r);$$

aber $\Sigma P_i \cos(P_i r)$ ist der Projection des Parameters P der Function V auf r gleich, denn P ist die geometrische Summe der partiellen Parameter P_1, P_2, P_3, P_4; folglich ist:

$$V' - V = Pr \cos(Pr). \tag{4}$$

Ist $V' = V$, so ist $\cos(Pr) = 0$, und der Punkt m' muss in einer durch m senkrecht zum Parameter P gelegten Ebene liegen. Daraus folgt, dass die Niveaufläche (V) eine Ebene ist. Und da P eine constante Richtung hat, so sind die den verschiedenen Werthen von V und V' entsprechenden Niveauflächen einander parallel. Für $V' > V$ ist die Projection $r\cos(Pr)$ die Entfernung der beiden Niveauebenen von ein-

ander. Bezeichnet man dieselbe mit δ, so ergiebt sich aus Gleichung (4) die Formel

$$\delta = \frac{V' - V}{P} \tag{5}$$

zur Bestimmung dieses Abstandes für gegebene Werthe von V, V' und P.

Sind P_1, P_2, P_3, P_4, d. h. die Coefficienten der linearen Function $V = \Sigma P_i q_i$ gegeben, so bestimmen sich die Grösse des Parameters P und die Cosinus der Winkel seiner Richtung mit den Richtungen der Coordinaten durch die Formeln:

$$P = \sqrt{\Sigma P_k P_i \cos(q_k q_i)}, \tag{6}$$

$$\cos(P q_i) = \frac{\partial P}{\partial q_i}. \tag{7}$$

Die Betrachtung der linearen Function $V = \Sigma P_i q_i$, ihres Parameters P und der vorstehenden Formeln (4), (6), (7) kann mit Vortheil zur Behandlung von Aufgaben der analytischen Geometrie benutzt werden, die sich auf die Ebene und Gerade im Raume beziehen.*) Wir heschränken uns hier auf die Entwickelung der Gleichung der Ebene und der Entfernung eines Punktes von einer Ebene.

Die Gleichung

$$V = \Sigma P_i q_i$$

ist bei constantem P_i und V die allgemeine Gleichung einer Ebene in tetraedrischen Coordinaten. Sie kann mit Hilfe der Bedingungsgleichung (2) in Form einer homogenen Gleichung

$$\Sigma \left(P_i - \frac{V}{3T} Q_i\right) q_i = 0$$

dargestellt werden.

Die Entfernung δ des gegebenen Punktes (q'_1, q'_2, q'_3, q'_4) von der gegebenen Ebene $V = \Sigma P_i q_i$ bestimmt sich aus Formel (5), nämlich

$$\delta = \pm \frac{\Sigma P_i q'_i - V}{P} = \pm \frac{\Sigma \left(P_i - \frac{V}{3T} Q_i\right) q'_i}{P},$$

wo man das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen hat, je nachdem

*) Man wende z. B. die oben dargelegte Methode auf die Lösung der in den Lehrbüchern der Geometrie des Raumes von Salmon und Hesse behandelten Aufgaben an.

$\Sigma P_i q'_i > V$ oder $\Sigma P_i q'_i < V$, d. h. je nachdem der Punkt (q'_1, q'_2, q'_3, q'_4) bezüglich der Ebene $V = \Sigma P_i q_i$ in dem Raume liegt, wohin der Parameter P gerichtet ist, oder im entgegengesetzten.

Wir wollen noch zeigen, wie man die Gleichung der Tangentenebene einer gegebenen Fläche erhält.

Die Gleichung der krummen Fläche (S) sei $V = 0$, wo V eine homogene Function der Coordinaten q_1, q_2, q_3, q_4 ist. Die Richtung des Parameters P der Function V, der die geometrische Summe der partiellen Parameter

$$P_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1},\ P_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2},\ P_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3},\ P_4 = \frac{\partial V}{\partial q_4}$$

ist, stellt die Normale der Fläche (S) im Punkte (q_1, q_2, q_3, q_4) dar; folglich ist die in diesem Punkte auf P errichtete senkrechte Ebene die Tangentenebene der Fläche (S) in diesem Punkte. Nach dem oben Bewiesenen hat ihre Gleichung die allgemeine Form

$$\Sigma P_i q'_i = 0$$

oder

$$\Sigma \frac{\partial V}{\partial q_i} q'_i = 0,$$

wobei q_1, q_2, q_3, q_4 constant und q'_1, q'_2, q'_3, q'_4 die Variablen sind, welche die tetraedrischen Coordinaten eines beliebigen in der Tangentenebene angenommenen Punktes bedeuten.

Betrachtet man dagegen in dieser Gleichung q'_1, q'_2, q'_3, q'_4 als constant und q_1, q_2, q_3, q_4 als veränderlich, so ist sie die Gleichung der ersten Polare, die dem Pole (q'_1, q'_2, q'_3, q'_4) entspricht.

65. Bezeichnen q_1, q_2, q_3 die trilinearen Coordinaten des Punktes m in einer gegebenen Ebene, d. h. die Abstände des Punktes von den Seiten eines gegebenen Dreieckes K, so hat man analog dem vorhergehenden für jede homogene Function V dieser Coordinaten:

$$nV = P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3,$$

wo n der Grad der Function V ist; ferner sind

$$P_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1},\ P_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2},\ P_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3}$$

die auf den Richtungen q_1, q_2, q_3 aufgetragenen partiellen Parameter. Ihre geometrische Summe bildet den totalen Parameter P. Ist die Function V linear, so sind die partiellen Parameter P_1, P_2, P_3 constant und es ist:

$$V = P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 = \Sigma P_i q_i.$$

Bedeuten dann Q_1, Q_2, Q_3 die Seiten des Dreieckes K, auf welche die Perpendikel q_1, q_2, q_3 gefällt sind, so hat man für jeden Punkt die Bedingungsgleichung

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 = 2K, \tag{a}$$

mit deren Hilfe man jede nicht homogene Function der Coordinaten q_1, q_2, q_3 homogen machen und jede homogene Function als Function der Verhältnisse zweier Coordinaten zu der dritten ausdrücken kann.

Es lässt sich leicht beweisen, und zwar ebenso wie für tetraedrische Coordinaten, dass die Niveaulinie für eine lineare Function V eine Gerade ist. Die, zwei verschiedenen Werthen V und V' entsprechenden Niveaulinien sind parallel und haben den Abstand

$$\delta = \frac{V' - V}{P},$$

wobei die Grösse und Richtung des Parameters P durch die Formeln

$$P = \sqrt{\{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2P_2P_3 \cos(q_2 q_3) + 2P_3 P_1 \cos(q_3 q_1) + 2P_1 P_2 \cos(q_1 q_2)\}},$$

$$\cos(Pq_i) = \frac{dP}{dq_i}$$

bestimmt sind.

Die allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie in trilinearen Coordinaten ist

$$P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 = V,$$

wo P_1, P_2, P_3, V constant sind. Diese Gleichung lässt sich vermittelst der Gleichung (a) in die homogene Gleichung

$$\left(P_1 - \frac{VQ_1}{2K}\right) q_1 + \left(P_2 - \frac{VQ_2}{2K}\right) q_2 + \left(P_3 - \frac{VQ_3}{2K}\right) q_3 = 0 \tag{b}$$

umformen. Bezeichnet man mit δ den Abstand des Punktes (q'_1, q'_2, q'_3) von der Geraden (b), so ist:

$$\delta = \pm \frac{1}{P}\left[\left(P_1 - \frac{VQ_1}{2K}\right) q_1 + \left(P_2 - \frac{VQ_2}{2K}\right) q_2 + \left(P_3 - \frac{VQ_3}{2K}\right) q_3\right].$$

Die homogene Gleichung

$$f(q_1, q_2, q_3) = 0$$

stellt eine ebene Curve dar; und die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} q'_3 = 0$$

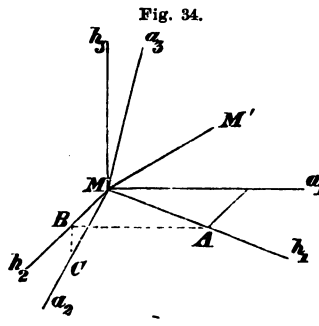
ist bei constantem q_1, q_2, q_3 und variablen q'_1, q'_2, q'_3 die Gleichung der Tangente jener Curve im Punkte (q_1, q_2, q_3); bei constanten q'_1, q'_2, q'_3 aber und veränderlichen q_1, q_2, q_3 ist sie die Gleichung der ersten Polare, die dem Pole (q'_1, q'_2, q'_3) entspricht.

VIII. Capitel.

Allgemeine Methode zur Bestimmung der Lage und Länge einer Geraden vermittelst ihrer Componenten oder ihrer Projectionen auf drei schiefwinklige Axen. · Anwendung auf die Bestimmung der Geschwindigkeit.

66. Die Grösse und Richtung einer beliebigen geraden Strecke r können entweder durch ihre Componenten oder durch ihre orthogonalen Projectionen auf drei, nicht in einer Ebene liegende Axen bestimmt werden. Es seien Ma_1, Ma_2, Ma_3 (Fig. 34) die gegebenen Axen; α_1, α_2, α_3 die Cosinus der Winkel $a_2 Ma_3$, $a_3 Ma_1$, $a_1 Ma_2$; MM' eine dem r geometrisch gleiche Strecke; r_1, r_2, r_3 ihre Componenten nach den Richtungen der gegebenen Axen und ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ihre orthogonalen Projectionen auf dieselben Axen. Nach einer bekannten Formel (s. §. 23 am Ende) hat man dann:

Fig. 34.



$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\alpha_1 r_2 r_3 + 2\alpha_2 r_3 r_1 + 2\alpha_3 r_1 r_2; \quad (1)$$

ferner ist:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= r_1 + \alpha_3 r_2 + \alpha_2 r_3, \\ \varrho_2 &= \alpha_3 r_1 + r_2 + \alpha_1 r_3, \\ \varrho_3 &= \alpha_2 r_1 + \alpha_1 r_2 + r_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Diese drei linearen homogenen Functionen der Componenten r_1, r_2, r_3 sind die halben Derivirten des Ausdruckes (1) nach diesen Componenten; setzt man also:

$$R = \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\alpha_1 r_2 r_3 + 2\alpha_2 r_3 r_1 + 2\alpha_3 r_1 r_2), \tag{3}$$

so wird:

$$\varrho_1 = \frac{\partial R}{\partial r_1}, \quad \varrho_2 = \frac{\partial R}{\partial r_2}, \quad \varrho_3 = \frac{\partial R}{\partial r_3}.$$

Indem man die Gleichungen (2) nach r_1, r_2, r_3 auflöst, findet man die Componenten durch die Projectionen ausgedrückt, nämlich

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{\varDelta}(\varDelta_{11}\varrho_1 + \varDelta_{12}\varrho_2 + \varDelta_{13}\varrho_3), \\ r_2 &= \frac{1}{\varDelta}(\varDelta_{21}\varrho_1 + \varDelta_{22}\varrho_2 + \varDelta_{23}\varrho_3), \\ r_3 &= \frac{1}{\varDelta}(\varDelta_{31}\varrho_1 + \varDelta_{32}\varrho_2 + \varDelta_{33}\varrho_3), \end{aligned} \tag{4}$$

wo $\varDelta$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \tag{5}$$

und $\varDelta_{rs}$ deren Derivirte nach dem in der r^{ten} Horizontal- und s^{ten} Vertikalreihe stehenden Elemente bezeichnet; dabei ist $\varDelta_{rs} = \varDelta_{sr}$, denn die Determinante ist symmetrisch. Man sieht leicht, dass:

$$\begin{aligned} &\varDelta_{11} = 1 - \alpha_1^2, \quad \varDelta_{12} = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3, \quad \varDelta_{13} = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2, \\ &\varDelta_{21} = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3, \quad \varDelta_{22} = 1 - \alpha_2^2, \quad \varDelta_{23} = \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1, \\ &\varDelta_{31} = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2, \quad \varDelta_{32} = \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1, \quad \varDelta_{33} = 1 - \alpha_3^2. \end{aligned} \tag{5a}$$

Die Grösse R kann in Form einer homogenen quadratischen Function der Projectionen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ dargestellt werden. Nach der Eigenschaft der homogenen Functionen hat man nämlich

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial r_1} r_1 + \frac{\partial R}{\partial r_2} r_2 + \frac{\partial R}{\partial r_3} r_3\right) \\ &= \frac{1}{2}(\varrho_1 r_1 + \varrho_2 r_2 + \varrho_3 r_3), \end{aligned}$$

was infolge der Formeln (4) in

$$R = \frac{1}{2\varDelta}(\varDelta_{11}\varrho_1^2 + \varDelta_{22}\varrho_2^2 + \varDelta_{33}\varrho_3^2 + 2\varDelta_{23}\varrho_2\varrho_3 + 2\varDelta_{31}\varrho_3\varrho_1 + 2\varDelta_{12}\varrho_1\varrho_2) \tag{6}$$

übergeht. Diese Formel heisst bezüglich der ursprünglichen (3) die ihr *conjugirte*.

67. Nehmen wir nun noch das System der Axen Mh_1, Mh_2, Mh_3 hinzu, die zu den Ebenen

$$a_2 Ma_3,\ a_3 Ma_1,\ a_1 Ma_2$$

respective senkrecht und so gerichtet sein sollen, dass die Winkel $h_1 Ma_1$, $h_2 Ma_2$, $h_3 Ma_3$ nicht grösser als 90^0 sind. Dieses Axensystem werden wir das Complementärsystem des ursprünglichen Systems der Axen Ma_1, Ma_2, Ma_3 nennen. Da die Axen Ma_1, Ma_2, Ma_3 auf den Ebenen $h_2 Mh_3$, $h_3 Mh_1$, $h_1 Mh_2$ senkrecht stehen, so bilden sie ihrerseits das Complementärsystem des Systems Mh_1, Mh_2, Mh_3. Die Cosinus der Winkel $h_2 Mh_3$, $h_3 Mh_1$, $h_1 Mh_2$ wollen wir mit ω_1, ω_2, ω_3 bezeichnen. Diese, sowie auch die Cosinus der Winkel $h_1 Ma_1$, $h_2 Ma_2$, $h_3 Ma_3$ lassen sich mit Hilfe der Determinanten $\varDelta$ und $\varDelta_{rs}$ ausdrücken.

Zu diesem Zwecke wollen wir für einen Augenblick annehmen, es sei r eine der Einheit gleiche, auf der Richtung Mh_1 aufgetragene Strecke MA; in diesem Falle ist

$$\varrho_1 = \cos(h_1 a_1),\ \ \varrho_2 = 0,\ \ \varrho_3 = 0;$$

wenn man mit r'_1, r'_2, r'_3 die Componenten der Strecke MA nach den Axen Ma_1, Ma_2, Ma_3 bezeichnet, so ergiebt sich aus den Formeln (4):

$$r'_1 = \frac{\varDelta_{11}}{\varDelta}\cos(h_1 a_1),\ \ r'_2 = \frac{\varDelta_{12}}{\varDelta}\cos(h_1 a_1),\ \ r'_3 = \frac{\varDelta_{13}}{\varDelta}\cos(h_1 a_1).$$

Nun ist aber MA die Projection der Strecke r'_1 auf die Axe Mh_1; denn eine zu $a_2 Ma_3$ parallele, durch den Endpunkt von r'_1 gehende Ebene geht durch den Punkt A und ist zur Axe Mh_1 senkrecht; folglich ist

$$1 = r'_1 \cos(h_1 a_1) = \frac{\varDelta_{11}}{\varDelta}\cos^2(h_1 a_1);$$

daraus folgt

$$\cos(h_1 a_1) = \sqrt{\frac{\varDelta}{\varDelta_{11}}}. \qquad (7)$$

Ebenso findet man, dass

$$\cos(h_2 a_2) = \sqrt{\frac{\varDelta}{\varDelta_{22}}},\ \ \cos(h_3 a_3) = \sqrt{\frac{\varDelta}{\varDelta_{33}}}. \qquad (8)$$

Die Strecken r'_2 und MA haben die gemeinsame Projection MB auf der Axe Mh_2; denn die der Ebene $a_1 Ma_3$ parallele, durch A gehende Ebene geht auch durch den Endpunkt C von r'_2; folglich ist:

$$\cos(h_1 h_2) = r'_2 \cos(h_2 a_2) = \frac{\varDelta_{12}}{\varDelta}\sqrt{\frac{\varDelta}{\varDelta_{11}}}\sqrt{\frac{\varDelta}{\varDelta_{22}}},$$

d. h.

$$\omega_3 = \frac{\varDelta_{12}}{\sqrt{\varDelta_{11}\varDelta_{22}}}. \tag{9}$$

Ebenso findet man, dass

$$\omega_1 = \frac{\varDelta_{23}}{\sqrt{\varDelta_{22}\varDelta_{33}}}, \quad \omega_2 = \frac{\varDelta_{13}}{\sqrt{\varDelta_{11}\varDelta_{33}}}. \tag{10}$$

Es seien nun m_1, m_2, m_3 die Componenten und n_1, n_2, n_3 die Projectionen einer Strecke $r = MM'$ auf die Axen Mh_1, Mh_2, Mh_3; wir wollen die Abhängigkeit dieser Grössen von r_1, r_2, r_3, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bestimmen.

Eine zu $h_2 Mh_3$ parallele, durch den Endpunkt M' von r gehende Ebene steht auf der Axe Ma_1 senkrecht und geht durch den Endpunkt von m_1; daher haben r und m_1 eine gemeinsame Projection auf Ma_1, d. h. es ist:

$$m_1 \cos(h_1 a_1) = \varrho_1;$$

also

$$m_1 = \frac{\varrho_1}{\cos(h_1 a_1)},$$

was nach Formel (7) liefert:

$$m_1 = \varrho_1 \sqrt{\frac{\varDelta_{11}}{\varDelta}}. \tag{11}$$

Ebenso findet man:

$$m_2 = \varrho_2 \sqrt{\frac{\varDelta_{22}}{\varDelta}}, \quad m_3 = \varrho_3 \sqrt{\frac{\varDelta_{33}}{\varDelta}}. \tag{12}$$

Da

$$\overline{r} = \overline{m_1} + \overline{m_2} + \overline{m_3},$$

so ist

$$R = \tfrac{1}{2}(\overline{m_1} + \overline{m_2} + \overline{m_3})^2 = \tfrac{1}{2}[m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2\omega_1 m_2 m_3 + \\ + 2\omega_2 m_3 m_1 + 2\omega_3 m_1 m_2],$$

woraus man mit Hilfe der Gleichungen (11) und (12) die conjugirte Form (6) erhält.

Zur Bestimmung der Projectionen der Strecke r auf die Axen Mh_1, Mh_2, Mh_3 hat man:

$$n_1 = \frac{\partial R}{\partial m_1}, \quad n_2 = \frac{\partial R}{\partial m_2}, \quad n_3 = \frac{\partial R}{\partial m_3}. \tag{13}$$

Eine zu $a_2 M a_3$ parallele, durch M' gehende Ebene geht durch den Endpunkt von r_1 und ist zu $M h_1$ senkrecht; daher haben r und r_1 eine gemeinsame Projection auf $M h_1$, d. h.

$$r_1 \cos(h_1 a_1) = n_1;$$

daraus folgt

$$r_1 = n_1 \sqrt{\frac{\varDelta_{11}}{\varDelta}} \tag{14}$$

und ebenso ergiebt sich:

$$r_2 = n_2 \sqrt{\frac{\varDelta_{22}}{\varDelta}}, \quad r_3 = n_3 \sqrt{\frac{\varDelta_{33}}{\varDelta}}. \tag{15}$$

Die Formeln (11), (12), (14), (15) können in folgender Form geschrieben werden:

$$m_k = \frac{\partial R}{\partial r_k} \sqrt{\frac{\varDelta_{kk}}{\varDelta}}, \quad r_k = \frac{\partial R}{\partial m_k} \sqrt{\frac{\varDelta_{kk}}{\varDelta}}, \tag{16}$$

wo $k = 1, 2, 3$. Ausserdem ist:

$$\frac{m_1}{\varrho_1} : \frac{m_2}{\varrho_2} : \frac{m_3}{\varrho_3} = \frac{r_1}{n_1} : \frac{r_2}{n_2} : \frac{r_3}{n_3} = \sqrt{\varDelta_{11}} : \sqrt{\varDelta_{22}} : \sqrt{\varDelta_{33}}.$$

68. Die Determinante

$$\varDelta = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

werden wir *Determinante des ursprünglichen Systems der Axen* $M a_1$, $M a_2$, $M a_3$ und die Determinante

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + 2\omega_1 \omega_2 \omega_3$$

Determinante des Complementärsystems nennen. Bezeichnet man nun mit $\varDelta'_{ki}$ die Derivirte der letzteren nach dem in der k^{ten} Horizontal- und i^{ten} Vertikalreihe stehenden Elemente, so ist nach den Formeln (7), (8), (9), (10):

$$\cos(a_1 h_1) = \sqrt{\frac{\varDelta'}{\varDelta'_{11}}}, \quad \cos(a_2 h_2) = \sqrt{\frac{\varDelta'}{\varDelta'_{22}}},$$

$$\cos(a_3 h_3) = \sqrt{\frac{\varDelta'}{\varDelta'_{33}}}; \tag{17}$$

$$\alpha_1 = \frac{\varDelta'_{23}}{\sqrt{\varDelta'_{22} \varDelta'_{33}}}, \quad \alpha_2 = \frac{\varDelta'_{31}}{\sqrt{\varDelta'_{33} \varDelta'_{11}}}, \quad \alpha_3 = \frac{\varDelta'_{12}}{\sqrt{\varDelta'_{11} \varDelta'_{22}}}; \tag{18}$$

und

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\varDelta_{12}}{\sqrt{\varDelta_{11}\,\varDelta_{22}}} & \frac{\varDelta_{13}}{\sqrt{\varDelta_{11}\,\varDelta_{33}}} \\ \frac{\varDelta_{21}}{\sqrt{\varDelta_{22}\,\varDelta_{11}}} & 1 & \frac{\varDelta_{23}}{\sqrt{\varDelta_{22}\,\varDelta_{33}}} \\ \frac{\varDelta_{13}}{\sqrt{\varDelta_{11}\,\varDelta_{33}}} & \frac{\varDelta_{23}}{\sqrt{\varDelta_{22}\,\varDelta_{33}}} & 1 \end{vmatrix}$$

was sich reduciren lässt auf:

$$\varDelta' = \frac{1}{\varDelta_{11}\,\varDelta_{22}\,\varDelta_{33}} \begin{vmatrix} \varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \varDelta_{13} \\ \varDelta_{21} & \varDelta_{22} & \varDelta_{23} \\ \varDelta_{31} & \varDelta_{32} & \varDelta_{33} \end{vmatrix}.$$

Da nun

$$\begin{vmatrix} \varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \varDelta_{13} \\ \varDelta_{21} & \varDelta_{22} & \varDelta_{23} \\ \varDelta_{31} & \varDelta_{32} & \varDelta_{33} \end{vmatrix} = \varDelta^2,$$

so folgt:

$$\varDelta' = \frac{\varDelta^2}{\varDelta_{11}\,\varDelta_{22}\,\varDelta_{33}}.$$

Ebenso findet man:

$$\varDelta = \frac{\varDelta'^2}{\varDelta'_{11}\,\varDelta'_{22}\,\varDelta'_{33}}.$$

Hieraus ergiebt sich die bemerkenswerthe Beziehung zwischen $\varDelta$ und $\varDelta'$;

$$\varDelta\varDelta' = \varDelta_{11}\,\varDelta_{22}\,\varDelta_{33} \cdot \varDelta'_{11}\,\varDelta'_{22}\,\varDelta'_{33}. \tag{19}$$

Aus der sphärischen Trigonometrie ist bekannt, dass $\sqrt{\varDelta}$ das Volumen eines Parallelepipedons ausdrückt, dessen Kanten gleich 1 sind und die Richtungen von Ma_1, Ma_2, Ma_3 haben. Man kann sich davon leicht auf folgende Weise überzeugen. Die Grösse $\sqrt{\varDelta_{11}} = \sqrt{1 - \alpha_1^2}$ ist der Sinus des Winkels $a_2 M a_3$ und stellt daher die in der Ebene dieses Winkels liegende Parallelepipedonseite dar; $\cos(a_1 h_1) = \sqrt{\frac{\varDelta}{\varDelta_{11}}}$ ist die Länge des aus dem Endpunkte der in Ma_1 liegenden Kante auf jene Seite gefällten Perpendikels; folglich ist

$$\sqrt{\varDelta_{11}}\sqrt{\frac{\varDelta}{\varDelta_{11}}} = \sqrt{\varDelta}$$

das Volumen des Parallelepipedons. Aus demselben Grunde ist $\sqrt{\varDelta'}$ das Volumen eines Parallelepipedons, dessen Kanten

gleich 1 sind und die Winkel $h_2 Mh_3$, $h_3 Mh_1$, $h_1 Mh_2$ einschliessen.

Die Grösse

$$r_1\, r_2\, r_3 \sqrt{\Delta}$$

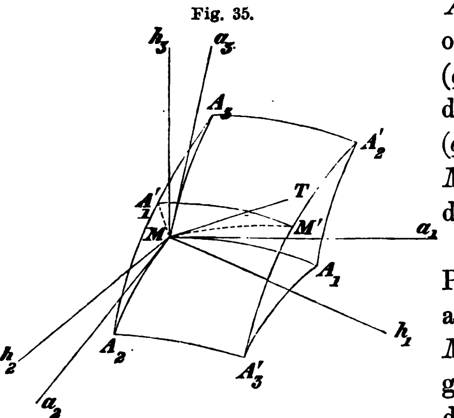
ist das Volumen eines über r_1, r_2, r_3 als Kanten construirten Parallelepipedons, dessen Diagonale $r = MA$ ist: endlich ist

$$m_1\, m_2\, m_3 \sqrt{\Delta'}$$

das Volumen eines über m_1, m_2, m_3 als Kanten errichteten Parallelepipedons, dessen Diagonale gleichfalls $r = MA$ ist.

69. Gesetzt, es sei M der Ort des beweglichen Punktes m zur Zeit t; q_1, q_2, q_3 seine Coordinaten; $A_2 MA_3$, $A_3 MA_1$, $A_1 MA_2$ (Fig. 35) die Coordinatenflächen (q_1), (q_2), (q_3); MA_1, MA_2, MA_3 die Coordinatenlinien $(q_2 q_3)$, $(q_3 q_1)$, $(q_1 q_2)$ und Ma_1, Ma_2, Ma_3 die Coordinatenaxen, d. h. die Tangenten der Coordinatenlinien im Punkte M; dabei sei vorausgesetzt, dass die Axe Ma_1 im Sinne von $\Delta q_1 > 0$ gerichtet ist, d. h. nach der Seite, wohin man den Punkt M verschieben muss, um die Coordinate q_1 wachsen zu lassen; ebenso seien Ma_2 nach der Seite $\Delta q_2 > 0$ und Ma_3 nach der Seite $\Delta q_3 > 0$ gerichtet.

Fig. 35.



Bedeuten nun h_1, h_2, h_3 die Differentialparameter der Coordinaten q_1, q_2, q_3, so stellt sich h_1 als das in M auf der Ebene $a_2 Ma_3$ errichtete Perpendikel Mh_1 dar; ebenso h_2 als das auf $a_3 Ma_1$ errichtete Perpendikel Mh_2 und h_3 als das Perpendikel Mh_3 der Ebene $a_1 Ma_2$; dabei sind die Winkel $a_1 Mh_1$, $a_2 Mh_2$, $a_3 Mh_3$ spitz, da Mh_k und Ma_k bezüglich der Fläche (q_k) nach derselben Seite $\Delta q_k > 0$ gerichtet sind.

Die Axen Ma_1, Ma_2, Ma_3 und die Axen Mh_1, Mh_2, Mh_3 bilden zwei Systeme die zu einander gegenseitig complementär sind. Auf diese beiden Axensysteme wollen wir nun die Formeln

der vorhergehenden Paragraphen anwenden, wobei wieder α_1, α_2, α_3 die Cosinus der Winkel $a_2 M a_3$, $a_3 M a_1$, $a_1 M a_2$ und ω_1, ω_2, ω_3 die Cosinus der Winkel $h_2 M h_3$, $h_3 M h_1$, $h_1 M h_2$ bedeuten.

Ausser den Differentialparametern h_1, h_2, h_3 werden hier noch drei von ihnen abhängige Grössen auftreten, die wir *reciproke Parameter* nennen wollen. Dieselben lassen sich folgendermassen allgemein definiren.

Der reciproke Parameter der Coordinate q_r, den wir mit a_r bezeichnen, ist der reciproke Werth der Derivirten der Coordinate q_r nach der Verschiebung in der Axe Ma_r; dabei denken wir uns diesen Werth als Länge auf Ma_r im Sinne $\Delta q_r > 0$ aufgetragen.

Da die derivirte Function des Punktes q_r nach der Verschiebung in der Richtung Ma_r gleich der Projection des Parameters h_r auf diese Axe, d. h. gleich $h_r \cos(h_r a_r)$ ist, so hat man:

$$a_r = \frac{1}{h_r \cos(h_r a_r)}.$$

Macht man

$$Ma_r = \frac{1}{h_r \cos(h_r a_r)},$$

so ist dies die Strecke, welche den reciproken Parameter darstellt. Da also $a_r h_r \cos(a_r h_r) = 1$, so ist *das geometrische Product des directen Parameters h_r in den reciproken a_r gleich* 1.

Die Formeln (7), (8) und (17) geben:

$$a_r = \frac{1}{h_r}\sqrt{\frac{\Delta_{rr}}{\Delta}}, \quad h_r = \frac{1}{a_r}\sqrt{\frac{\Delta'_{rr}}{\Delta'}}. \tag{20}$$

Im Falle eines orthogonalen Systems ist

$$\cos(h_r a_r) = 1 \text{ und } a_r = \frac{1}{h_r}.$$

Diese Grösse ist es, welche Lamé mit H_r bezeichnet. (s. Leçons sur les coordonnées curvilignes, pag. 74).

70. Gesetzt, der Punkt m durchlaufe in der Zeit τ die Strecke MM'; es seien $q_1 + \Delta q_1$, $q_2 + \Delta q_2$, $q_3 + \Delta q_3$ die Coordinaten des Punktes M'; die entsprechenden Coordinatenflächen $(q_1 + \Delta q_1)$, $(q_2 + \Delta q_2)$, $(q_3 + \Delta q_3)$ mögen die Coordinatenlinien $(q_2 q_3)$, $(q_3 q_1)$, $(q_1 q_2)$ in den Punkten A_1, A_2,

A_3 treffen und die Flächen (q_1), (q_2), (q_3) die Coordinatenlinien $(q_2 + \Delta q_2,\ q_3 + \Delta q_3)$, $(q_3 + \Delta q_3,\ q_1 + \Delta q_1)$, $(q_1 + \Delta q_1,\ q_2 + \Delta q_2)$ in den Punkten A'_1, A'_2, A'_3.

Die Geschwindigkeit $v = MT$ des Punktes m zur Zeit t bei der Bewegung auf MM' ist zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes A_1 auf der Coordinatenlinie $(q_2 q_3)$ und aus der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes A'_1 auf der Fläche (q_1); die letztere ist wiederum zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes A_2 auf der Linie $(q_3 q_1)$ und aus der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes A_3 auf der Linie $(q_1 q_2)$; folglich ist $\overline{v}$ die geometrische Summe der Geschwindigkeiten der Bewegungen der Punkte A_1, A_2, A_3 auf den Coordinatenlinien $(q_2 q_3)$, $(q_3 q_1)$, $(q_1 q_2)$.

Bedeutet s einen Bogen der Coordinatenlinie $(q_2 q_3)$, der in irgend einem Punkte auf der Seite $\Delta q_1 < 0$ beginnt und im Punkte M endigt, so ist $\pm \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes A_1 zur Zeit t; dieselbe hat die Richtung von Ma_1, wenn $\frac{ds}{dt} > 0$ und die entgegengesetzte im Falle $\frac{ds}{dt} < 0$. Bezeichnet man mit q'_r die Derivirte der Coordinate q_r nach t, so ist:

$$q'_1 = \frac{dq_1}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = h_1 \cos(h_1 a_1) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{a_1} \frac{ds}{dt};$$

folglich

$$\frac{ds}{dt} = a_1 q'_1.$$

Ebenso findet man, dass $a_2 q'_2$ und $a_3 q'_3$ die Geschwindigkeiten der Bewegung der Punkte A_2 und A_3 sind, und zwar sind dieselben mit $+$ oder $-$ zu nehmen, je nachdem sie dieselbe oder entgegengesetzte Richtung, wie die reciproken Parameter a_2 und a_3 haben. Jedenfalls hat man:

$$\overline{v} = \overline{a_1 q'_1} + \overline{a_2 q'_2} + \overline{a_3 q'_3}.$$

Wendet man nun auf v die Formel (1) an und bezeichnet $\frac{1}{2} v^2$ durch T, so ergiebt sich:

$$T = \tfrac{1}{2} \{ a_1^2 q'^2_1 + a_2^2 q'^2_2 + a_3^2 q'^2_3 + 2\alpha_1 a_2 a_3 q'_2 q'_3 + \\ + 2\alpha_2 a_3 a_1 q'_3 q'_1 + 2\alpha_3 a_1 a_2 q'_1 q'_2 \};$$

dies kann man zur Abkürzung auch schreiben

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma \overline{a_r a_s} q'_r q'_s, \tag{21}$$

wo $\overline{a_r a_s}$ das geometrische Product der beiden reciproken Parameter a_r und a_s und Σ die Summe aller der Ausdrücke bedeutet, die man aus $\overline{a_r a_s} q'_r q'_s$ dadurch ableiten kann, dass man $r = 1, 2, 3$ und $s = 1, 2, 3$ setzt.

Die Grösse T heisst die *lebendige Kraft* oder die *active Energie.**) Um uns kürzer auszudrücken, werden wir sie für's erste einfach *Energie* nennen.

Für ein gegebenes Coordinatensystem der q_1, q_2, q_3 sind Grösse und Richtung der reciproken Parameter a_r bekannt. Weiss man überdiess, welche Functionen der Zeit die Coordinaten sind, so kann man die Energie T nach Formel (1) bestimmen und dann den Werth der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2T}$ finden. Die Richtung der Geschwindigkeit bestimmt sich vermittelst ihrer Componenten $a_1 q'_1$, $a_2 q'_2$ und $a_3 q'_3$ oder vermittelst ihrer Projectionen auf die Axen Ma_1, Ma_2, Ma_3, die sich aus den Formeln (2) und (3), wie folgt, ergeben:

$$\begin{aligned} v \cos(va_1) &= a_1 q'_1 + \alpha_3 a_2 q'_2 + \alpha_2 a_3 q'_3, \\ v \cos(va_2) &= \alpha_3 a_1 q'_1 + a_2 q'_2 + \alpha_1 a_3 q'_3, \\ v \cos(va_3) &= \alpha_2 a_1 q'_1 + \alpha_1 a_2 q'_2 + a_3 q'_3. \end{aligned} \tag{22}$$

Durch Multiplication dieser Ausdrücke mit a_1, a_2, a_3 ergiebt sich:

$$\begin{aligned} a_1 v \cos(a_1 v) &= \overline{a_1 a_1} q'_1 + \overline{a_1 a_2} q'_2 + \overline{a_1 a_3} q'_3, \\ a_2 v \cos(a_2 v) &= \overline{a_2 a_1} q'_1 + \overline{a_2 a_2} q'_2 + \overline{a_2 a_3} q'_3, \\ a_3 v \cos(a_3 v) &= \overline{a_3 a_1} q'_1 + \overline{a_3 a_2} q'_2 + \overline{a_3 a_3} q'_3. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind die Derivirten des Ausdrucks (21) nach q'_1, q'_2, q'_3; wenn man also $\frac{\partial T}{\partial q_r} = p_r$ setzt, so hat man:

$$\overline{a_r v} = p_r \text{ und } v \cos(va_r) = \frac{1}{a_r} p_r. \tag{23}$$

Aus den Formeln (11) und (12) ergeben sich nun die Componenten der Geschwindigkeit v nach den Complementär-

*) Der Grund für diese Benennung wird in der Dynamik erklärt werden.

axen Mh_1, Mh_2, Mh_3, d. h. nach den directen Coordinatenparametern h_1, h_2, h_3. Allgemein ist

$$m_r = \frac{1}{a_r} p_r \sqrt{\frac{\varDelta_{rr}}{\varDelta}},$$

und da

$$\frac{1}{a_r} \sqrt{\frac{\varDelta_{rr}}{\varDelta}} = h_r ,$$

so ist

$$m_r = h_r p_r ;$$

folglich

$$\bar{v} = \overline{h_1 p_1} + \overline{h_2 p_2} + \overline{h_3 p_3}$$

und

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} (h_1{}^2 p_1{}^2 + h_2{}^2 p_2{}^2 + h_3{}^2 p_3{}^2 + 2 \omega_1 h_2 h_3 p_2 p_3 + 2 \omega_2 h_3 h_1 p_3 p_1 + 2 \omega_3 h_1 h_2 p_1 p_2);$$

oder indem wir diesen dem Ausdruck (21) conjugirten Ausdruck für die Energie mit T bezeichnen:

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2} \Sigma \overline{h_r h_s} p_r p_s . \tag{24}$$

Die Projectionen der Geschwindigkeit v auf die Parameter h_1, h_2, h_3 drücken sich durch die Formeln aus:

$$v \cos(v h_1) = h_1 p_1 + \omega_3 h_2 p_2 + \omega_2 h_3 p_3 ,$$
$$v \cos(v h_2) = \omega_3 h_1 p_1 + h_2 p_2 + \omega_1 h_3 p_3 ,$$
$$v \cos(v h_3) = \omega_2 h_1 p_1 + \omega_1 h_2 p_2 + h_3 p_3 .$$

Durch Multiplication dieser Formeln mit h_1, h_2, h_3 ergiebt sich:

$$\overline{h_1 v} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_1}, \quad \overline{h_2 v} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_2}, \quad \overline{h_3 v} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_3} . \tag{25}$$

Die Formeln (14) und (15) geben

$$a_r q'_r = \sqrt{\frac{\varDelta_{rr}}{\varDelta}} \, v \cos(v h_r)$$

und da

$$a_r = \frac{1}{h_r} \sqrt{\frac{\varDelta_{rr}}{\varDelta}},$$

so ist

$$q'_r = \overline{h_r v} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r}$$

und allgemein

$$v \cos(v h_r) = \frac{1}{h_r} q'_r . \tag{26}$$

Aus den Formeln (21), (22), (23) und (24) lassen sich Ausdrücke für die Cosinus der von der Geschwindigkeit mit den reciproken und directen Parametern gebildeten Winkel ableiten; es ist nämlich:

$$\cos(va_r) = \frac{1}{a_r\sqrt{2\mathrm{T}}}p_r, \quad \cos(vh_r) = \frac{1}{h_r\sqrt{2\mathrm{T}}}q'_r\,. \tag{27}$$

Im Falle orthogonaler Coordinaten q_1, q_2, q_3 fallen die Richtungen der directen Parameter h_1, h_2, h_3 mit den Richtungen der Coordinatenaxen, d. h. mit den Richtungen der reciproken Parameter a_1, a_2, a_3 zusammen; dann ist

$$\cos(h_r a_r) = 1, \quad a_r = \frac{1}{h_r}$$

und die obigen Formeln nehmen die Gestalt an:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{h_r^2}q'^2_r, \quad \mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\Sigma h_r^2 p_r^2, \\ p_r &= \frac{1}{h_r^2}q'_r, \quad v\cos(vh_r) = \frac{1}{h_r}q'_r = h_r p_r. \end{aligned} \tag{28}$$

71. Wir wollen nun die zur Bestimmung der Geschwindigkeit abgeleiteten Formeln auf specielle Fälle und zur Lösung von einigen Aufgaben anwenden.

1) *Polarcoordinatensystem im Raume.* Der Punkt m sei bestimmt durch den Radiusvector r, den Winkel φ, den die Richtung von r mit einer festen, durch den Anfangspunkt von r gezogenen Axe bildet, und durch den Winkel ψ, den die Ebene des Winkels φ mit einer festen Ebene bildet. Dieses Coordinatensystem gehört zu den orthogonalen.

Im §. 54 3) haben wir die Parameter dieser drei Coordinaten gefunden, und zwar: $h_1 = 1$ für r, $h_2 = \frac{1}{r}$ für φ und $h_3 = \frac{1}{r\sin\varphi}$ für ψ; daher ist $a_1 = 1$, $a_2 = r$, $a_3 = r\sin\varphi$; dabei haben a_1 und h_1 die Richtung von r, h_2 und a_2 liegen in der Ebene des Winkels φ und sind senkrecht zu r im Sinne von $\Delta\varphi > 0$, h_3 und a_3 endlich stehen auf jener Ebene senkrecht und zwar nach der Seite $\Delta\psi > 0$.

Die Ausdrücke (21) und (24) für die Energie reduciren sich auf die folgenden

$$T = \tfrac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\sin^2\varphi\cdot\psi'^2),$$

$$T = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{1}{r^2} p_2^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi} p_3^2\right)$$

wo

$$p_1 = r', \; p_2 = r^2\varphi', \; p_3 = r^2 \sin^2\varphi \cdot \psi'.$$

Die Formeln (22) und (25) geben:

$$v \cos(vh_1) = v \cos(vr) = r', \; v \cos(vh_2) = r\varphi',$$
$$v \cos(vh_3) = r \sin\varphi \cdot \psi'.$$

Gesetzt, z. B., es sei $r = at$, $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = bt$, wo a und b Constante sind. Dann bewegt sich der Punkt m auf dem Kegel $\varphi = \text{Const.}$ und beschreibt eine Curve, deren Gleichung ist:

$$r = \frac{a}{b}\psi;$$

man erhält dieselbe durch Elimination von t aus den Gleichungen $r = at$ und $\psi = bt$. Diese Curve hat die Gestalt einer Schraubenlinie. Man construire ihre Tangente und finde ihre Bogenlänge.

2) *Elliptische Coordinaten im Raume.* Die Formeln (12) des §. 57 liefern:

$$T = \frac{1}{8}\left[\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1'^2}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2'^2}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\lambda_3'^2}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}\right]$$

$$T = 2\left[\frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} p_1^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} p_2^2 + \frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} p_3^2\right]$$

$$v \cos(vh_1) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}\right]^{\frac{1}{2}} . \lambda_1',$$

$$v \cos(vh_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}\right]^{\frac{1}{2}} . \lambda_2',$$

$$v \cos(vh_3) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}} . \lambda_3'.$$

Anwendungen:

a) Die Länge der Coordinatenlinie $(\lambda_1 \lambda_2)$ zu bestimmen, d. h. den Schnitt des Ellipsoids (λ_1) mit dem ihm confocalen einmanteligen Hyperboloid (λ_2).

Hierzu wollen wir annehmen, dass sich der Punkt m auf der Linie $(\lambda_1 \lambda_2)$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = 1$ bewege. In diesem Falle ist

$$\lambda'_1 = 0, \; \lambda'_2 = 0, \; T = \tfrac{1}{2}, \; s = t;$$

folglich wird:

$$ds = \tfrac{1}{2} \left[\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_3)(a_2 + \lambda_3)(a_3 + \lambda_3)} \right] . \, d\lambda_3 .$$

Integrirt man diesen Ausdruck, indem man λ_1 und λ_2 als constant ansieht, so erhält man die Länge s. Die zwischen den Ebenen yz und zx, d. h. zwischen den Ebenen $\lambda_3 = -a_1$ und $\lambda_3 = -a_2$ liegende Länge ist durch das Integral

$$s = \tfrac{1}{2} \int_{-a_1}^{-a_2} \left[\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_3)(a_2 + \lambda_3)(a_3 + \lambda_3)} \right]^{\frac{1}{2}} d\lambda_3 ,$$

ausgedrückt, welches sich auf Abel'sche Functionen zurückführen lässt. Die Länge $4s$ ist der vollständige Perimeter der geschlossenen Curve $(\lambda_1 \lambda_2)$.

b) Die Länge der Schnittcurve des Ellipsoids (λ_1) mit einer ihm concentrischen Kugel vom Radius r zu bestimmen.

Diese Curve ist durch die Gleichungen bestimmt

$$\lambda_1 = \text{Const.}, \; r^2 = a_1 + a_2 + a_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 ,$$

s. §. 58, (14), wo r constant ist. Setzt man

$$r^2 - a_1 - a_2 - a_3 - \lambda_1 = m,$$

so ist

$$\lambda_2 + \lambda_3 = m$$

die Gleichung der Kugel. Nimmt man nun wieder $v = 1$ an und bezeichnet die gesuchte Länge mit s, so ist

$$ds = \tfrac{1}{4}(m - 2\lambda_2) \left\{ \frac{A + B\lambda_2 + C\lambda_2^2}{f(\lambda_2)\, f(m - \lambda_2)} \right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda_2 ,$$

$$= \tfrac{1}{4}(m - 2\lambda_3) \left\{ \frac{A + B\lambda_3 + C\lambda_3^2}{f(\lambda_3)\, f(m - \lambda_3)} \right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda_3 ,$$

wo

$$f(\lambda) = (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda),$$

$$A = \lambda_1 \left[m^2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2 - r^2 + \lambda_1 \right] - a_1 a_2 a_3 ,$$

$$B = (r^2 - 2\lambda_1) m, \; C = r^2 + m.$$

Damit die Kugel (r) das Ellipsoid (λ_1) schneide, sind die Bedingungen $r^2 < a_1 + \lambda_1$, $r^2 > a_3 + \lambda_1$ erforderlich. Ist ausserdem auch $r^2 > a_2 + \lambda_1$, so besteht die Curve aus zwei getrennten Theilen, die zur Ebene zy symmetrisch gelegen sind; jeder Theil ist eine geschlossene, die x-Axe umschliessende Linie. Ihre Länge σ ist durch das Abel'sche Integral

$$\sigma = \int_{-a_2}^{-a_3} (m - 2\lambda) \left\{ \frac{A + B\lambda + C\lambda^2}{f(\lambda) f(m - \lambda)} \right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda \tag{a}$$

dargestellt. Ist aber $r^2 < a_2 + \lambda_1$, so besteht die Curve aus zwei zur xy-Ebene symmetrisch gelegenen Theilen; jeder derselben umschliesst die z-Axe. Die Länge σ des vollen Umfanges ist durch das Integral ausgedrückt:

$$\sigma = \int_{-a_1}^{-a_2} (m - 2\lambda) \left\{ \frac{A + B\lambda + C\lambda^2}{f(\lambda) f(m - \lambda)} \right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda. \tag{b}$$

3) Für die Thomson'schen Coordinaten (§. 61), die man durch Transformation der rechtwinkligen, geradlinigen Coordinaten x, y, z vermittelst reciproker Radienvectoren erhält, hat man:

$$T = \frac{c^4}{2r^4}(x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad T = \frac{r^4}{2c^4}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

wo

$$p_1 = \frac{c^4}{r^4} x', \; p_2 = \frac{c^4}{r^4} y', \; p_3 = \frac{c^4}{r^4} z';$$

$$v \cos(vh_1) = \frac{c^2}{r^2} x', \quad v \cos(vh_2) = \frac{c^2}{r^2} y', \quad v \cos(vh_3) = \frac{c^2}{r^2} z'.$$

Da $\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ die Energie der Bewegung des Punktes m ist, wenn dieser durch die geradlinigen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, so sieht man aus dem Ausdruck für T, dass die Energie der Bewegung des Punktes μ gleich ist der Energie des Punktes m, multiplicirt mit $\frac{c^4}{r^4}$. Bezeichnet man daher mit ds und $d\sigma$ die Differentialelemente der von den Punkten m und μ durchlaufenen Wege s und σ, so ist:

$$d\sigma = \frac{c^2}{r^2} ds,$$

was mit dem am Ende des §. 61 Bewiesenen übereinstimmt.

Anwendungen: a) Die Länge der Curve zu bestimmen, in welche die Schnittcurve des Ellipsoids (λ_1) mit dem Hyperboloid (λ_2) bei der Transformation durch reciproke Radienvectoren übergeht. Bedeutet σ den Bogen dieser Curve, so hat man:

$$d\sigma = \frac{c^2}{a_1 + a_2 + a_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot ds$$

und daher

$$\sigma = 2c^2 \int_{-a_1}^{-a_2} \frac{d\lambda_3}{a_1 + a_2 + a_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \left[\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_3)(a_2 + \lambda_3)(a_3 + \lambda_3)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Die Curve in welche sich die Schnittcurve der Flächen (λ_1) und (λ_2) verwandelt, ist der Schnitt der Flächen vierter Ordnung:

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda_1} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda_1} = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda_2} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda_2} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda_2} = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Durch diese Curve geht auch der Kegel zweiter Ordnung:

$$\frac{x^2}{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)} + \frac{y^2}{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)} + \frac{z^2}{(a_3 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_2)} = 0.$$

b) Die Länge der Curve zu bestimmen, die durch Transformation der Schnittcurve des Ellipsoids (λ_1) mit einer ihm concentrischen Kugel vom Radius r entsteht. Dazu ist nur nöthig, die Ausdrücke (a) und (b) mit der constanten Grösse $\frac{c^2}{r^2}$ zu multipliciren. Die transformirte Curve ist der Schnitt einer Fläche vierter Ordnung mit einer Kugel vom Radius $\varrho = \frac{c^2}{r^2}$.

4) Für ein geradliniges, schiefwinkliges Coordinatensystem der q_1, q_2, q_3 sind die Parameter a_1, a_2, a_3 gleich 1 und behalten constante Richtungen. Die directen Parameter sind

$$h_1 = \sqrt{\frac{\Delta_{11}}{\Delta}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{\Delta_{22}}{\Delta}}, \quad h_3 = \sqrt{\frac{\Delta_{33}}{\Delta}}$$

und behalten auch constante Richtungen, die zu den Coordinatenebenen senkrecht sind.

In diesem Falle ist:

$$T = \tfrac{1}{2}(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + 2\alpha_1 q_2' q_3' + 2\alpha_2 q_3' q_1' + 2\alpha_3 q_1' q_2'),$$

$$p_1 = q_1' + \alpha_3 q_2' + \alpha_2 q_3'$$

$$p_2 = \alpha_3 q_1' + q_2' + \alpha_1 q_3'$$

$$p_3 = \alpha_2 q_1' + \alpha_1 q_2' + q_3'$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2\Delta} \Sigma \Delta_{rs} p_r p_s, \quad q_r = \frac{1}{\Delta} \Sigma_s \Delta_{rs} p_s.$$

5) Es seien q_1, q_2, q_3 die kürzesten Abstände des Punktes m von drei in einem Punkte sich schneidenden Ebenen Q_1, Q_2, Q_3, wobei q_r auf einer Seite der Ebene Q_r als positiv und auf der entgegengesetzten als negativ betrachtet wird.

Für ein solches Coordinatensystem sind die Parameter h_1, h_2, h_3 gleich Eins und stehen auf den Ebenen Q_1, Q_2, Q_3 senkrecht. Die reciproken Parameter a_1, a_2, a_3 sind den Schnittlinien der Ebenen Q_1, Q_2, Q_3 parallel, und zwar ist a_1 parallel der Schnittlinie von Q_2 und Q_3, a_2 dem Schnitt von Q_3 und Q_1, a_3 dem von Q_1 und Q_2. Die Cosinus ω_1, ω_2, ω_3 gehören den Flächenwinkeln $(Q_2 Q_3)$, $(Q_3 Q_1)$, $(Q_1 Q_2)$ an und sind daher constant; die Cosinus α_1, α_2, α_3 sind ebenfalls constant und gehören den von den Schnittlinien der Ebenen Q_1, Q_2, Q_3 gebildeten ebenen Winkeln an.

Die Werthe der reciproken Parameter bestimmen sich durch die Formel:

$$a_r = \sqrt{\frac{\Delta_{rr}}{\Delta}} = \sqrt{\frac{\Delta'_{rr}}{\Delta'}}.$$

In dem vorliegenden Falle ist:

$$T = \frac{1}{2\Delta'} \Sigma \Delta'_{rs} q'_r q'_s, \quad T = \tfrac{1}{2}\Sigma p_r p_s, \quad p_r = \frac{1}{\Delta'} \sum_s \Delta'_{rs} q'_s.$$

Gesetzt, z. B., der Punkt m bewege sich gleichförmig auf einer Curve, deren Gleichungen sind

$$q_1 q_2 = m^2, \; q_1 q_3 = n^2, \qquad (\alpha)$$

wo m und n constante Grösse bedeuten. Die erste der Gleichungen (α) gehört einem Cylinder an, dessen Erzeugende der Schnittlinie der Ebenen Q_1 und Q_2 parallel sind und dessen Leitlinie eine Hyperbel in einer zu jener Schnittlinie senkrechten Ebene ist; die zweite repräsentirt einen Cylinder, dessen Erzeugende der Schnittlinie der Ebenen Q_1 und Q_3 parallel sind und dessen Leitlinie eine Hyperbel in einer zu jenem Schnitte senkrechten Ebene ist; folglich ist die Trajectorie des Punktes m die Schnittcurve dieser beiden Cylinder. Wir wollen nun die Zeit t als Function der Coordinate q_1 auszudrücken suchen. Eliminirt man q_1 aus den Gleichungen (α), so erhält man die Gleichung

$$n^2 q_2 - m^2 q_3 = 0, \qquad (\beta)$$

die eine Ebene darstellt; also ist die Trajectorie eine ebene Curve, eine von den Curven zweiter Ordnung. Die Gleichungen (α) geben

$$q'_2 = -\frac{m^2}{q_1^2} q'_1, \quad q'_3 = -\frac{n^2}{q_1^2} q'_1;$$

daher ist:

$$T = \tfrac{1}{2}(A q_1^4 - 2B q_1^2 + C) \frac{q'^2_1}{q_1^4},$$

$$A = a_1^2,$$

$$B = a_1 a_2 \alpha_3 m^2 + a_1 a_3 \alpha_2 n^2, \quad C = a_2^2 m^4 + a_3 n^4 + 2 a_2 a_3 \alpha_1 m^2 n^2;$$

folglich wird

$$dt = \pm \frac{1}{v q_1^2} \sqrt{A q_1^4 - 2B q_1^2 + C} \, . \, dq_1,$$

wo das Zeichen + zu nehmen ist, wenn q_1 bei wachsendem t zunimmt und —, wenn es abnimmt. Bedeutet q_1^0 den Werth der Coordinate q_1 für $t = 0$, so ist:

$$t = \pm \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{1}{v q_1^2} \sqrt{A q_1^4 - 2B q_1^2 + C} \, . \, dq_1.$$

Dieses Integral lässt sich auf elliptische Integrale zurückführen.

6) Fügt man zu den drei Abständen q_1, q_2, q_3 des Punktes m von den Ebenen Q_1, Q_2, Q_3 noch seinen Abstand q_4 von einer Ebene Q_4 hinzu, die mit jenen Ebenen ein Tetraeder A bildet, so erhält man ein System von homogenen, tetraedrischen Coordinaten (§. 63), zwischen denen die Gleichung

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 + Q_4 q_4 = 3A \qquad (\alpha)$$

besteht, worin A das Volumen des Tetraeders und Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die Inhalte seiner Seitenflächen bedeuten. Zwischen den Derivirten dieser Coordinaten nach der Zeit besteht die homogene Gleichung

$$Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + Q_3 q'_3 + Q_4 q'_4 = 0,$$

mit deren Hilfe man aus dem Ausdruck für die Energie

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma \overline{a_r a_s} q'_r q'_s$$

die Quadrate q'^2_1, q'^2_2, q'^2_3 eliminiren und denselben dadurch auf die Form bringen kann:

$$T = A_{12}q'_1q'_2 + A_{13}q'_1q'_3 + A_{14}q'_1q'_4 + A_{23}q'_2q'_3 + \\ + A_{24}q'_2q'_4 + A_{34}q'_3q'_4.$$

Dies wollen wir der Kürze halber schreiben:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma A_{rs}q'_rq'_s.$$

Der Coefficient A_{rs} hierin lässt sich folgendermassen finden.

Bezeichnen wir mit (r) die der Seite Q_r gegenüberliegende Tetraederecke, mit δ_r den Abstand der Ecke (r) von der Ebene Q_r und mit (rs) die die Ecken (r) und (s) verbindende Kante. Wir betrachten nun eine gleichförmige Bewegung des Punktes m mit der Geschwindigkeit $v = 1$ auf der Kante (rs) von (r) nach (s). Dabei werden sich nur die Coordinaten q_r und q_s ändern, während die beiden übrigen gleich 0 bleiben; daher liefert der obige Ausdruck für die Energie

$$1 = A_{rs}q'_rq'_s.$$

Man sieht nun leicht, dass

$$q_s = \frac{\delta_s}{(rs)}\,t,\quad q_r = \frac{\delta_r}{(rs)}\,[(rs) - t];$$

daher ist:

$$q'_s = \frac{\delta_s}{(rs)},\quad q'_r = -\frac{\delta_r}{(rs)};$$

mithin

$$1 = -A_{rs}\cdot\frac{\delta_r\delta_s}{(rs)^2},$$

woraus folgt:

$$A_{rs} = -\frac{(rs)^2}{\delta_r\delta_s}.$$

Setzt man dies in den allgemeinen Ausdruck von T ein, so erhält man:

$$T = -\tfrac{1}{2}\Sigma(rs)^2\,\frac{q_r'}{\delta_r}\,\frac{q_s'}{\delta_s}. \qquad (\beta)$$

Nehmen wir nun an, die Coordinaten q_1, q_2, q_3 ändern sich bei der Bewegung des Punktes m proportional der Zeit t; dann ändert sich infolge der Gleichung (α) auch q_4 proportional der Zeit t. In diesem Falle sind somit alle vier Derivirten q'_1, q'_2, q'_3, q'_4 constant und daher ist auch die Energie T und die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2T}$ constant, d. h. die Be-

wegung ist gleichförmig. Bedeuten q^0_1, q^0_2, q^0_3, q^0_4 die Anfangsioordcnaten des Punktes m, so hat man:

$$q'_1 = \frac{q_1 - q^0_1}{t}, \quad q'_2 = \frac{q_2 - q^0_2}{t}, \quad q'_3 = \frac{q_3 - q^0_3}{t}, \quad q'_4 = \frac{q_4 - q^0_4}{t}.$$

Eliminirt man hieraus t, so ergeben sich die Gleichungen der Trajectorie:

$$\frac{q_1 - q^0_1}{q'_1} = \frac{q_2 - q^0_2}{q'_2} = \frac{q_3 - q^0_3}{q'_3} = \frac{q_4 - q^0_4}{q'_4}.$$

Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie; also ist die Bahn eine Gerade.

Bezeichnet man den in der Zeit t durchlaufenen Weg mit l, so ist

$$l = vt, \quad l^2 = 2T \cdot t^2,$$

so dass man nach Formel (β) findet:

$$l^2 = - \Sigma\left[(rs)^2 \cdot \frac{q_r - q_r{}^0}{\delta_r} \cdot \frac{q_s - q_s{}^0}{\delta_s}\right];$$

dies stimmt mit der bekannten Formel für das Quadrat der Entfernung zweier Punkte von einander überein, die man in dem Salmon'schen Werke: „A treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions“ finden kann.

Wir empfehlen noch, die allgemeinen, zur Bestimmung der Geschwindigkeit im Obigen abgeleiteten Formeln auf folgende Fälle anzuwenden:

a) q_1 und q_2 seien die Abstände des Punktes m von zwei Ebenen Q_1 und Q_2 und q_3 seine Entfernung von einem gegebenen Punkte A.

b) q_1 und q_2 seien die Entfernungen des Punktes m von zwei gegebenen Punkten A_1 und A_2 und q_3 sein Abstand von einer gegebenen Ebene P.

c) q_1, q_2, q_3 seien die Entfernungen des Punktes m von drei Punkten A_1, A_2, A_3.

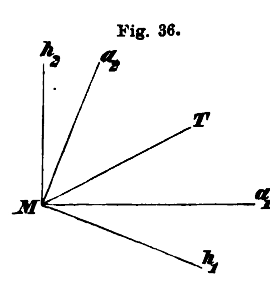
IX. Capitel.

Krummlinige Coordinaten auf einer gegebenen Fläche. — Geodätische Coordinaten. — Cartographische Coordinaten.

72. Wir werden nun die allgemeine Methode der Bestimmung der Geschwindigkeit betrachten, wenn sich der bewegliche Punkt m auf einer gegebenen Fläche (S) bewegen soll und seine Lage auf derselben durch zwei Coordinaten q_1 und q_2 bestimmt ist, die zwei im Punkte m sich schneidende Coordinatenlinien (q_1) und (q_2) auf der Fläche (S) geben.

Es sei (Fig. 36) M die Lage des Punktes m zur Zeit t, Ma_1 die Tangente der Linie (q_2), nach der Seite $\Delta q_1 > 0$ gerichtet, und Ma_2 die Tangente an (q_1), nach der Seite $\Delta q_2 > 0$ gerichtet; $Mh_1 = h_1$ der Differentialparameter (§. 53) der Coordinate (q_1), und $Mh_2 = h_2$ der der Coordinate (q_2). Die Grösse $h_1 \cos(h_1 a_1)$ ist die Derivirte der Coordinate q_1 nach einer Verschiebung in der Richtung Ma_1; den reciproken Werth $\frac{1}{h_1 \cos(h_1 a_1)}$ dieser

Fig. 36.



Derivirten wollen wir den reciproken Parameter der Coordinate q_1 nennen und mit a_1 bezeichnen. Ebenso nennen wir die Grösse $a_2 = \frac{1}{h_2 \cos(h_2 a_2)}$ den reciproken Parameter der Coordinate q_2. Angenommen, die reciproken Parameter seien durch die Längen Ma_1 und Ma_2 dargestellt und es sei:

$$\cos(a_1 a_2) = \alpha;$$

dann hat man jedenfalls:

$$\cos(h_1 a_1) = \cos(h_2 a_2) = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

$$\cos(h_1 h_2) = -\alpha_1, \quad a_1 = \frac{1}{h_1 \sqrt{1-\alpha^2}}, \quad a_2 = \frac{1}{h_2 \sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\overline{a_1 h_1} = 1, \quad \overline{a_2 h_2} = 1.$$

Die Geschwindigkeit $v = MT$ einer beliebigen Bewegung auf der Fläche (S) ist (nach dem Princip der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten) aus den Geschwindigkeiten u und w der Bewegungen auf den Coordinatenlinien zusammen-

gesetzt. Das Verhältniss $\frac{u\,dt}{dq_1}$ muss dem reciproken Parameter a_1 gleich sein; folglich ist $u = a_1 q'_1$; ebenso findet sich $w = a_2 q'_2$. Mithin wird $\overline{v} = \overline{a_1 q'_1} + \overline{a_2 q'_2}$; dabei hat die Geschwindigkeit $\overline{a_1 q'_1}$ die Richtung von a_1 und die Geschwindigkeit $\overline{a_2 q'_2}$ die Richtung von a_2. Bedeutet nun T die Energie $\frac{1}{2} v^2$ der Bewegung des Punktes m, so ist:

$$T = \tfrac{1}{2}(a_1^2 q_1'^2 + a_2^2 q_2'^2 + 2\alpha a_1 a_2 q'_1 q'_2) = \tfrac{1}{2}\Sigma \overline{a_r a_s} q'_r q'_s. \quad (1)$$

Setzt man

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2,$$

so kann man vermittelst p_1 und p_2 die Projectionen der Geschwindigkeit v auf die Axen Ma_1 und Ma_2 bestimmen; dieselben sind nämlich:

$$\begin{aligned} v\cos(va_1) &= a_1 q'_1 + \alpha a_2 q'_2 = \frac{1}{a_1} p_1, \\ v\cos(va_2) &= \alpha a_1 q'_1 + a_2 q'_2 = \frac{1}{a_2} p_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Zerlegt man die Geschwindigkeit v in zwei Componenten längs h_1 und h_2, so haben die Componente längs h_1 und die Geschwindigkeit v eine gemeinsame Projection auf Ma_1; denn eine zu Mh_2 parallele Gerade steht auf Ma_1 senkrecht. Folglich ist die Geschwindigkeitscomponente längs h_1:

$$\frac{1}{a_1} p_1 : \cos(h_1 a_1) = h_1 p_1.$$

Ebenso findet man, dass die Componente längs h_2 gleich $h_2 p_2$ ist; folglich wird

$$\overline{v} = \overline{h_1 p_1} + \overline{h_2 p_2},$$

und die Energie $\frac{1}{2} v^2$ kann durch die zu (1) conjugirte Formel

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}(h_1^2 p_1^2 + h_2^2 p_2^2 - 2\alpha h_1 h_2 p_1 p_2) \quad (3)$$

dargestellt werden.

Die Geschwindigkeit v und ihre Componente $a_1 q'_1$ auf der Axe Ma_1 haben eine gemeinsame Projection auf Mh_1; denn die projicirende Gerade ist zu Ma_2 parallel; folglich ist

$$v\cos(vh_1) = a_1 q'_1 \cos(a_1 h_1) = \frac{1}{h_1} q'_1, \quad (4)$$

und ebenso

$$v \cos(v h_2) = \frac{1}{h_2} q'_2. \tag{4'}$$

Andererseits aber ist:

$$v \cos(v h_1) = h_1 p_1 - \alpha h_2 p_2 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial p_1}$$

$$v \cos(v h_2) = - \alpha h_1 p_1 + h_2 p_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial p_2};$$

daher ist:

$$q'_1 = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad q'_2 = \frac{\partial T}{\partial p_2}. \tag{5}$$

Im Falle orthogonaler Coordinaten wird:

$$\alpha = 0, \quad \cos(h_1 a_1) = 1, \quad \cos(h_2 a_2) = 1, \quad a_1 = \frac{1}{h_1}, \quad a_2 = \frac{1}{h_2},$$

$$T = \tfrac{1}{2}(a_1^2 q'^2_1 + a_2^2 q'^2_2), \quad T = \tfrac{1}{2}(h_1^2 p_1^2 + h_2^2 p_2^2),$$

$$\cos(v h_1) = \frac{1}{h_1} q'_1, \quad \cos(v h_2) = \frac{1}{h_2} q'_2. \tag{6}$$

Wir empfehlen diese Formeln auf folgende Fälle anzuwenden:

a) Polarcoordinaten in der Ebene, b) sphärische Coordinaten (s. §. 8), nämlich die geographische Länge und Breite, c) Thomson'sche Coordinaten in der Ebene, d) ein Coordinatensystem, das aus dem Abstand q_1 des Punktes m von einer gegebenen Ebene und seinem Abstand q_2 von einer gegebenen Geraden besteht, e) ein bipolares Coordinatensystem, d. h. ein solches, das aus den Entfernungen des Punktes von zwei gegebenen Punkten besteht.

Für die ebenen, geradlinigen, schiefwinkligen Coordinaten q_1 und q_2 sind Grösse und Richtung der directen und reciproken Parameter constant und zwar ist:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

73. Sind q_1 und q_2 die kürzesten Abstände des Punktes m in einer Ebene von zwei gegebenen Geraden Q_1 und Q_2, so sind h_1 und h_2 auf diesen letzteren senkrecht, und a_1 und a_2 sind ihnen parallel; folglich ist α der Cosinus des Winkels $(Q_1\ Q_2)$; dabei ist:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Nimmt man noch den Abstand q_3 des Punktes m von einer Geraden Q_3 hinzu, die mit den Geraden Q_1 und Q_2 ein Dreieck K bildet, so erhält man ein System von homogenen trilinearen Coordinaten die durch die Gleichung

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 = 2K \qquad \text{(a)}$$

verbunden sind, worin Q_1, Q_2, Q_3 die Seiten des Dreieckes K bedeuten (s. §. 65). Aus dieser Gleichung folgt die homogene, lineare Gleichung zwischen den Derivirten der Coordinaten nach der Zeit

$$Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + Q_3 q'_3 = 0,$$

mit deren Hilfe man aus dem Ausdruck für die Energie

$$T = \tfrac{1}{2}(a_1^2 q'^2_1 + a_2^2 q'^2_2 + 2\alpha a_1 a_2 q'_1 q'_2) \qquad \text{(b)}$$

die Quadrate q'^2_1, q'^2_2, q'^2_3 eliminiren kann, wie wir dies für die tetraedrischen Coordinaten ausgeführt haben; man kann aber auch das Product $q'_1 q'_2$ eliminiren; die Gleichung nimmt dann die Form an:

$$T = \tfrac{1}{2}(A_1 q'^2_1 + A_2 q'^2_2 + A_3 q'^2_3). \qquad \text{(c)}$$

Gesetzt, der Punkt m entferne sich gleichförmig von den Geraden Q_1 und Q_2; dann sind q'_1 und q'_2 constant und nach Gleichung (b) muss auch q'_3 constant sein. Bedeuten q^0_1, q^0_2, q^0_3 die Anfangscoordinaten, so ist:

$$q'_1 = \frac{q_1 - q^0_1}{t}, \quad q'_2 = \frac{q_2 - q^0_2}{t}, \quad q'_3 = \frac{q_3 - q^0_3}{t}. \qquad \text{(d)}$$

Durch Elimination von t ergeben sich hieraus die Gleichungen der Trajectorie:

$$\frac{q_1 - q^0_1}{q'_1} = \frac{q_2 - q^0_2}{q'_2} = \frac{q_3 - q^0_3}{q'_3}.$$

Diese Gleichungen stellen eine Gerade dar; die Bewegung ist also geradlinig. Durchläuft der Punkt m in der Zeit t die Strecke l, so ist $v = \frac{l}{t}$, $T = \frac{1}{2}\frac{l^2}{t^2}$ und nach den Formeln (c) und (d) findet man:

$$l_2 = A_1 (q_1 - q^0_1)^2 + A_2 (q_2 - q^0_2)^2 + A_3 (q_3 - q^0_3)^2. \qquad \text{(e)}$$

Die Constanten A_1, A_2, A_3 lassen sich folgendermassen leicht bestimmen. Bezeichnen wir mit γ_1, γ_2, γ_3 die drei Höhen des Dreiecks K, welche auf den Grundlinien Q_1, Q_2,

Q_3 resp. senkrecht stehen, und nehmen wir an, dass l die Seite Q_1 darstellt; dann ist:

$$q^0{}_1 = 0,\ q^0{}_2 = 0,\ q^0{}_3 = \gamma_3;$$
$$q_1 = 0,\ q_2 = \gamma_2,\ q_3 = 0;$$

folglich:

$$Q_1^2 = A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2.$$

Ebenso findet sich:

$$Q_2^2 = A_1\gamma_1^2 + A_3\gamma_3^2,$$
$$Q_3^2 = A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2.$$

Hieraus folgt:

$$A_1 = \frac{Q_2^2 + Q_3^2 - Q_1^2}{2\gamma_1^2},\ A_2 = \frac{Q_3^2 + Q_1^2 - Q_2^2}{2\gamma_2^2},$$
$$A_3 = \frac{Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3^2}{2\gamma_3^2}.$$

74. Betrachten wir ferner das ebene System der elliptischen Coordinaten λ und μ (§. 55). Da diese Coordinaten orthogonal sind, so muss man die Formeln (6) auf sie anwenden, indem man setzt:

$$h_1 = \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2}},\ h_2 = \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}}.$$

So findet sich:

$$T = \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu'^2}{c^2 - \mu^2}\right].$$

$$v\cos(vh_1) = \lambda'\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}},\ v\cos(vh_2) = \mu'\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}}.$$

Bewegt sich der Punkt m auf der Ellipse (λ) gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = 1$, so ist $\lambda' = 0$ und

$$ds = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}} \cdot d\mu.$$

Setzt man $\mu = \mu_0$ für $t = 0$, so ist:

$$s = \int_{\mu_0}^{\mu} \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}}\, d\mu.$$

Dieses Integral lässt sich auf die Differenz zweier elliptischen Integrale der zweiten Gattung zurückführen. Um dasselbe in die kanonische Form zu bringen, setze man

$$\mu = c \sin\varphi, \quad \mu_0 = c \sin\varphi_0, \quad \frac{c}{\lambda} = k;$$

dadurch erhält man:

$$s = \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \, . \, d\varphi$$

$$= \lambda \left[\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \, . \, d\varphi - \int_0^{\varphi_0} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \, . \, d\varphi \right].$$

Geodätische Coordinaten.

75. Die geodätischen Linien auf einer Fläche (S), welche von einem festen Punkte ausgehen oder zu einer gegebenen Curve normal sind, können in Verbindung mit ihren orthogonalen Trajectorien als ein System von Coordinatenlinien zur Bestimmung der Lage der Punkte auf der Fläche (S) angesehen werden. Dadurch erhält man ein orthogonales Coordinatensystem, das zur Lösung vieler Probleme über die Eigenschaften von Linien auf einer gegebenen Fläche vorzüglich geeignet ist.

Nehmen wir zunächst an, dass die geodätischen Linien von einem gegebenen Punkte A (Fig. 37) ausgehen. Dann bestimmt sich der Ort eines Punktes M als Durchschnitt der geodätischen Linie AM mit einer gewissen orthogonalen Trajectorie BM derselben. Wie im §. 42 bewiesen wurde, ist die Länge AM für alle Punkte der Linie BM constant; daher kann man, wenn man $AM = q_1$ setzt, q_1 als die eine Coordinate des Punktes M ansehen; BM ist dann die Coordinatenlinie (q_1). Als zweite Coordinate q_2 kann man den Winkel nehmen, den die Tangente an AM mit der Tangente an eine feste geodätische Linie AB im Punkte A bildet. Die Coordinatenparameter h_1 und h_2 im Punkte M haben die Richtungen der Tangenten von AM und BM und stehen auf einander senkrecht. Der erstere ist gleich 1; denn das Increment der Länge q_1 ist zugleich auch die Verschiebung des Punktes M in der Coordinatenlinie AM. Der zweite Parameter aber wird im allgemeinen eine Function der beiden Coordinaten q_1, q_2 sein,

Fig. 37.

kann aber in speciellen Fällen von einer Coordinate allein abhängen. Daher hat der Ausdruck für die Energie §. 72, Gleichung (6) im vorliegenden Falle die Form

$$T = \frac{1}{2}[q_1'^2 + f(q_1, q_2) \cdot q_2'^2], \tag{7}$$

was für das Bogendifferential ds einer beliebigen Curve auf der gegebenen Fläche Ausdrücke von der Form

$$ds^2 = dq_1^2 + f(q_1, q_2)\, dq_2^2 \tag{8}$$

giebt.

Ist BM (Fig. 38) die orthogonale Trajectorie eines Systems von geodätischen Linien, die zu einer gegebenen Curve AC normal sind und sind AB und CM zwei Linien dieses Systems, so kann man die Länge $q_1 = AB = CM$ und die Länge $q_2 = AC$ als Coordinaten des Punktes M wählen. Der Differentialparameter h_1 der Coordinate q_1 ist wieder gleich 1, und der Differentialparameter h_2 wird im allgemeinen eine Function der Coordinaten q_1 und q_2 sein; also hat auch in diesem Falle die Energie die Form (7). Es ist leicht zu beweisen, dass, wenn für ein Coordinatensystem die Energie T die Form (7) hat, die Coordinatenlinien (q_2) immer geodätische Linien und die Coordinatenlinien (q_1) deren orthogonale Trajectorien sind.

Fig. 38.

Es seien AC und BM zwei Linien des Systems (q_1), CM eine der Linien (q_2) und $C'\mu$ die ihr unendlich nahe Linie $(q_2 + \delta q_2)$ desselben Systems. Man kann nun $C'\mu$ als Variationsverschiebung der Linie CM und $M\mu = \varepsilon$ als Variationsverschiebung des Punktes M ansehen. Nach der, schon im §. 38 benutzten Formel zur Differentiation eines geometrischen Productes hat man

$$\frac{d\,.\,\overline{v\varepsilon}}{dt} = \overline{v_1\varepsilon} + \overline{v\varepsilon_1}, \tag{9}$$

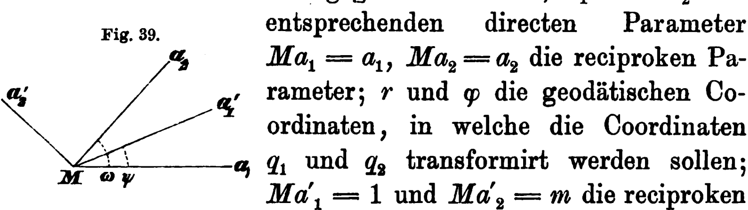
wo v die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes M auf der Linie CM ist. Da das Coordinatensystem der q_1 und q_2 orthogonal ist, so ist $\overline{v\varepsilon} = 0$ für jede Zeit t und folglich $\frac{d\,.\,\overline{v\varepsilon}}{dt} = 0$. Die geometrische Derivirte $\overline{\varepsilon_1}$ ist gleich der geometrischen Variation der Geschwindigkeit v (s. §. 37), daher

ist $\varepsilon_1 \cos(\varepsilon_1 v) = \delta v$. Die Geschwindigkeiten der Bewegungen der Punkte M und μ sind aber gleich; diese Punkte bewegen sich so, dass sich nur eine Coordinate q_1 ändert und es ist daher, nach Formel (7) die Energie der einen wie auch der anderen Bewegung $T = \frac{1}{2} q'^2_1$, woraus sich $v = q'_1$ und $v + \delta v = q'_1$ ergiebt; also ist $\delta v = 0$ und $\overline{v \varepsilon_1} = v \delta v = 0$; daher nach Gleichung (9) auch $\overline{v_1 \varepsilon} = 0$. Dies zeigt aber, dass die Beschleunigung v_1 senkrecht zu ε ist; folglich ist auch die Ebene der ersten Krümmung der Curve CM im Punkte M auf ε senkrecht; sie ist daher normal zur Fläche (S). Nun kommt aber diese Eigenschaft nur der geodätischen Linie zu; also ist CM eine geodätische Linie. Bedeutet s die Länge CM, so ist nach Formel (8) $ds = dq_1$; folglich $q_1 = s + \text{Const.}$ Es hindert aber nichts $q_1 = s$ zu setzen, d. h. anzunehmen, dass AC die Linie $q_1 = 0$ sei. In einem speciellen Falle kann $q_1 = 0$ die Gleichung eines Punktes sein.

Ein Coordinatensystem, für welches die Energie die Form (7) annimmt, oder für welches das Differential eines beliebigen Bogens s die Form (8) hat, heisst ein *geodätisches*. In der berühmten Abhandlung von Gauss: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" finden sich sehr wichtige Anwendungen dieser Art krummliniger Coordinaten. Wir wollen hier die Methode zur Transformation eines beliebigen Coordinatensystems in ein geodätisches aus jener Abhandlung folgen lassen.

76. Es seien (Fig. 39) q_1 und q_2 irgend welche Coordinaten des Punktes M auf einer gegebenen Fläche, h_1 und h_2 die entsprechenden directen Parameter $Ma_1 = a_1$, $Ma_2 = a_2$ die reciproken Parameter; r und φ die geodätischen Coordinaten, in welche die Coordinaten q_1 und q_2 transformirt werden sollen; $Ma'_1 = 1$ und $Ma'_2 = m$ die reciproken Parameter der Coordinaten r und φ; $\sphericalangle\, a_1 M a_2 = \omega$, $\sphericalangle\, a'_1 M a_1 = \psi$. Da das Differential ds einer beliebigen auf der gegebenen Fläche verzeichneten Curve sowohl gleich der geometrischen Summe $\overline{a_1 dq_1} + \overline{a_2 dq_2}$, als auch gleich der geometrischen Summe $\overline{dr} + \overline{m d\varphi}$ sein muss, so ist die Summe der Projectionen der Componenten $a_1 dq_1$ und $a_2 dq_2$ auf eine

Fig. 39.



beliebige Axe gleich der Summe der Projectionen der Componenten dr und $md\varphi$ auf dieselbe Axe. Man hat also:

$$a_1 dq_1 \cos\psi + a_2 dq_2 \cos(\omega - \psi) = dr = \frac{\partial r}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} dq_2,$$

$$-a_1 dq_1 \sin\psi + a_2 dq_2 \sin(\omega - \psi) = m d\varphi = m \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} dq_1 + m \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} dq_2.$$

Diese Gleichungen müssen in dq_1 und dq_2 identisch sein, denn sie müssen für alle Werthe dieser Differentiale gelten; folglich ist:

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} = a_1 \cos\psi, \quad \frac{\partial r}{\partial q_2} = a_2 \cos(\omega - \psi),$$

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = -a_1 \sin\psi, \quad m \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = a_2 \sin(\omega - \psi). \tag{1}$$

Eliminirt man ψ aus den beiden ersten Gleichungen, so folgt:

$$a_2^2 \left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2 - 2a_1 a_2 \cos\omega \frac{\partial r}{\partial q_1} \frac{\partial r}{\partial q_2} + a_1^2 \left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2 = a_1^2 a_2^2 \sin^2\omega. \tag{2}$$

Zur Abkürzung und zur Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen in der Gauss'schen Abhandlung wollen wir setzen:

$$a_1^2 = E, \quad a_2^2 = G \text{ und } a_1 a_2 \cos\omega = F,$$

d. h. wir schreiben:

$$ds^2 = E dq_1^2 + 2F dq_1 dq_2 + G dq_2^2;$$

dadurch nimmt die Gleichung (2) die Form an:

$$G\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2 - 2F\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right) + E\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2 = EG - F^2. \tag{2'}$$

Diese Gleichung zwischen den partiellen Derivirten der geodätischen Coordinate r nach den gegebenen Coordinaten q_1 und q_2 dient zur Bestimmung von r. Dieselbe hat bekanntlich ein allgemeines Integral von der Form:

$$r = f(q_1, q_2, \alpha) + \beta, \tag{3}$$

wo α und β willkürliche Constante sind.

Nehmen wir nun für β die willkürliche Function $\Theta(\alpha)$ und setzen $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ gleich Null, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$r = f(q_1, q_2, \alpha) + \Theta(\alpha),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \Theta'(\alpha) = 0, \tag{4}$$

welche das allgemeine Integral (3) ersetzen.

Substituirt man den Ausdruck (3) an Stelle von r in die beiden ersten Gleichungen unter (1), so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = a_1 \cos\psi, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = a_2 \cos(\omega - \psi).$$

Diese Gleichungen können zur Bestimmung des Winkels ψ dienen, aus dem man die Richtung der Axen der geodätischen Coordinaten Ma'_1, Ma'_2 erkennt.

Da dieselben für jedes α bestehen müssen, so kann man sie nach α differentiiren; dadurch ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial \alpha} = - a_1 \sin\psi \frac{d\psi}{d\alpha}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial \alpha} = a_2 \sin(\omega - \psi) \frac{d\psi}{d\alpha};$$

vergleicht man diese Resultate mit der dritten und vierten der Gleichungen (1), so zeigt sich, dass

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial \alpha} \cdot \frac{d\psi}{d\alpha}, \quad m \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial \alpha} \cdot \frac{d\psi}{d\alpha}$$

ist, woraus folgt:

$$d\varphi = \frac{1}{m} \frac{d\psi}{d\alpha} d \frac{\partial f}{\partial \alpha}. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist jedoch nur in dem Falle möglich, wenn die Coordinate φ eine Function von $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ ist.

Nach der zweiten der Gleichungen (4) hat man aber

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = - \Theta'(\alpha);$$

folglich muss man φ als Function von α allein ansehen, welches infolge der zweiten von den Gleichungen (4) zu einer Function der Coordinaten q_1 und q_2 wird.

Bei constantem φ ist auch α constant; daher ist

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \Theta'(\alpha) = 0 \tag{6}$$

bei constantem α die Gleichung der geodätischen Linie (φ).

Nimmt man für $\Theta(\alpha)$ eine bestimmte Function und eli-

minirt α aus den Gleichungen (4), so erhält man ein Resultat von der Form:

$$r = \varpi(q_1, q_2), \tag{7}$$

welches bei constantem r die Gleichung der orthogonalen Trajectorie der geodätischen Linien (6) ist, die verschiedenen Werthen von α oder φ entsprechen.

Von der Orthogonalität der Curven (7) und (6) kann man sich folgendermassen überzeugen.

Bedeuten P und P' die Differentialparameter der Functionen $\varpi(q_1, q_2)$ und $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, so ist nach der Regel über die Bestimmung des Parameters einer zusammengesetzten Function der Parameter P gleich der geometrischen Summe der auf h_1 und h_2 aufgetragenen partiellen Parameter $h_1 \frac{\partial \varpi}{\partial q_1}$ und $h_2 \frac{\partial \varpi}{\partial q_2}$, während P' gleich der geometrischen Summe der ebenfalls auf h_1 und h_2 aufgetragenen partiellen Parameter $h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_1}$ und $h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_2}$ ist. Daher hat man:

$$\overline{PP'} = h_1^2 \frac{\partial \varpi}{\partial q_1} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_1} + \overline{h_1 h_2} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial q_1} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_2} + \frac{\partial \varpi}{\partial q_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_1}\right) + h_2^2 \frac{\partial \varpi}{\partial q_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_2}$$

vergl. §. 23, Lehrsatz 2 über die Multiplication geometrischer Summen). Hierin ist nun

$$h_1^2 = \frac{1}{a_1^2 \sin^2 \omega} = \frac{G}{GE - F^2}, \quad h_2^2 = \frac{1}{a_2^2 \sin^2 \omega} = \frac{E}{GE - F^2},$$

$$\overline{h_1 h_2} = -h_1 h_2 \cos \omega = -\frac{F}{EG - F^2}$$

und daher wird:

$$\overline{PP'} = \frac{1}{EG - F^2} \left[G \frac{\partial \varpi}{\partial q_1} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_1} - F \left(\frac{\partial \varpi}{\partial q_1} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_2} + \frac{\partial \varpi}{\partial q_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_1}\right) + E \frac{\partial \varpi}{\partial q_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_2}\right]. \tag{8}$$

Substituirt man aber andererseits statt r seinen Ausdruck (3) in die Gleichung (2'), so erhält man die Gleichung

$$G \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2 - 2F \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial f}{\partial q_2} + E \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2 = EG - F^2,$$

welche für jeden Werth von α gelten muss; man kann sie daher nach α differentiiren, wodurch man erhält:

$$G\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial\alpha} - F\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial^2 f}{\partial q_2\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial\alpha}\right)$$
$$+ E\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial^2 f}{\partial q_2\partial\alpha} = 0. \tag{9}$$

Da nun

$$\varpi(q_1, q_2) = f(q_1, q_2, \alpha) + \Theta(\alpha),\ \text{für}\ \frac{\partial f}{\partial\alpha} + \Theta'(\alpha) = 0,$$

so ist:

$$\frac{\partial\varpi}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \Theta'(\alpha)\right)\frac{\partial\alpha}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1},$$
$$\frac{\partial\varpi}{\partial q_2} = \frac{\partial f}{\partial q_2} + \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \Theta'(\alpha)\right)\frac{\partial\alpha}{\partial q_2} = \frac{\partial f}{\partial q_2};$$

also erhält man aus Gleichung (9):

$$G\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial q_1} - F\left(\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial q_1} + \frac{\partial\varpi}{\partial q_2}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial q_1}\right) + E\frac{\partial\varpi}{\partial q_2}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial q_2} = 0;$$

infolge dessen geht Gleichung (8) über in:

$$\overline{PP'} = PP'\cos(PP') = 0.$$

Diese Gleichung sagt aber aus, dass P auf P' senkrecht steht, d. h. dass die Curven (6) und (7) orthogonal sind.

Substituirt man in die Gleichungen (1) für r seinen Ausdruck (3) und eliminirt dann ψ, so erhält man eine Formel zur Bestimmung des Parameters m; es wird nämlich:

$$m = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}}.$$

Da nun φ eine Function von α allein sein soll, wenn dieses letztere mit Hilfe der zweiten Gleichung unter (4) als Function von q_1 und q_2 ausgedrückt wird, so wird

$$m = \frac{1}{\frac{d\varphi}{d\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial\alpha}{\partial q_2} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}};$$

folglich ist

$$ds^2 = dr^2 + \frac{EG - F^2}{\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial\alpha}{\partial q_2} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\right)}\cdot d\varphi^2,$$

was sich reducirt auf

$$ds^2 = dr^2 + \frac{EG - F^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \alpha}{\partial q_2} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial \alpha}{\partial q_1}\right)^2} d\alpha^2,$$

ein Ausdruck, der von der für φ gewählten willkürlichen Function von α nicht mehr abhängt. Man darf daher $\varphi = \alpha$ setzen, d. h. r und α zu geodätischen Coordinaten wählen.

Wenn alle, den verschiedenen Werthen von α entsprechenden geodätischen Linien ihren gemeinsamen Ursprung im Punkte (q_1^0, q_2^0) haben sollen, so hat man zur Bestimmung der Function $\Theta(\alpha)$ die Bedingung

$$f(q_1^0, q_2^0, \alpha) + \Theta(\alpha) = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$\Theta(\alpha) = -f(q_1^0, q_2^0, \alpha);$$

Die Gleichungen (4) gehen also über in:

$$r = f(q_1, q_2, \alpha) - f(q_1^0, q_2^0, \alpha),$$

$$\frac{\partial f(q_1, q_2, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(q_1^0, q_2^0, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \tag{10}$$

Eliminirt man aus denselben α, so folgt die Gleichung:

$$r = \varpi(q_1, q_2, q_1^0, q_2^0),$$

welche bei constantem r die orthogonale Trajectorie der vom Punkte (q_1^0, q_2^0) ausgehenden geodätischen Linien darstellt.

Wenn die geodätischen Linien (α) zu einer gegebenen Curve

$$\Phi(q_1, q_2) = 0 \tag{11}$$

normal sein sollen, so müssen die Differentialparameter der Functionen $\Phi(q_1, q_2)$ und $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ für die Punkte der Curve (10) auf einander senkrecht stehen; dazu muss, wie wir eben gesehen haben, die Gleichung

$$G\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial \alpha} - F\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}\frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial \alpha}\right) +$$

$$+ E\frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial \alpha} = 0 \tag{12}$$

zugleich mit Gleichung (11) erfüllt sein. Fügen wir noch die Bedingung hinzu:

$$f(q_1, q_2, \alpha) + \Theta(\alpha) = 0,$$

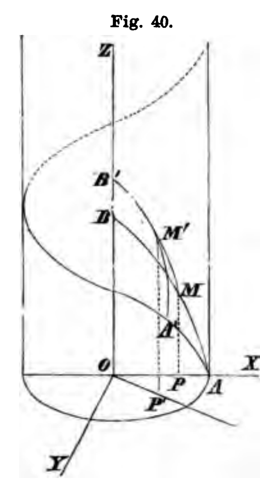
dass nämlich die geodätischen Linien auf der Curve (10) beginnen, so haben wir drei Gleichungen, aus denen sich durch Elimination der Coordinaten q_1 und q_2 eine Gleichung zur Bestimmung von $\Theta(\alpha)$ herleiten lässt.

Beispiele.

1) *Das geodätische Coordinatensystem auf der Schraubenfläche zu bestimmen.*

Es seien Ox, Oy, Oz (Fig. 40) drei zu einander senkrechte Axen und AMB eine ebene unveränderliche Linie, die durch ihre Bewegung eine Schraubenfläche erzeugt, indem sie in einer durch die Axe Oz gehenden Ebene bleibt, während jeder ihrer Punkte M eine Schraubenlinie von gegebener Ganghöhe h beschreibt.

Fig. 40.



Bezeichnen wir mit q_1 den Winkel POP', um den sich die Ebene der Erzeugenden AMB um Oz drehen muss, um die Lage $A'M'B'$ einzunehmen; mit q_2 die Abscisse OP und mit $F(q_2)$ die Ordinate PM des Punktes M. Die Grössen q_1 und q_2 wollen wir als Coordinaten eines Punktes M' auf $A'B'$ wählen, der eine beliebige Lage des Punktes M repräsentirt.

Man sieht leicht, dass die Coordinaten x, y, z dieses Punktes bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz sich als Functionen der Coordinaten q_1, q_2 auf folgende Weise darstellen lassen:

$$x = q_2 \cos q_1, \quad y = q_2 \sin q_1, \quad z = aq_1 + F(q_2),$$

wo $a = \frac{h}{2\pi}$; bezeichnet also ds das Bogendifferential einer beliebigen auf der Schraubenfläche verzeichneten Curve, so ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + q_2^2)\, dq_1^2 + 2aF'(q_2)\, dq_1\, dq_2 + \\ + [1 + (F'(q_2))^2]\, dq_2^2;$$

im vorliegenden Falle hat man daher:

$$E = a^2 + q_2^2, \quad F = aF'(q_2), \quad G = 1 + [F'(q_2)]^2,$$

so dass die Gleichung (2') die folgende Form annimmt:

$$[1 + (F'(q_2))^2] \left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2 - 2aF'(q_2) \frac{\partial r}{\partial q_1} \frac{\partial r}{\partial q_2} + (a^2 + q_2^2) \left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2 = \\ = a^2 + q_2^2\, [1 + (F'(q_2))^2]. \qquad \text{(a)}$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn man für die partielle Derivirte $\frac{\partial r}{\partial q_1}$ einen constanten Werth α und für $\frac{\partial r}{\partial q_2}$ eine Function von α und nur

einer Coordinate q_2 wählt. Setzt man nun $\frac{\partial r}{\partial q_1} = \alpha$ und löst die Gleichung (a) nach $\frac{\partial r}{d q_2}$ auf, so folgt:

$$\frac{\partial r}{\partial q_2} = \frac{a \alpha F'(q_2) \pm \sqrt{(q_2^2 + a^2 - \alpha^2)\{q_2^2 [1 + (F'(q_2))^2] + a^2\}}}{q_2^2 + a^2}.$$

Die Integrabilitätsbedingung des totalen Differentials

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} dq_2$$

ist erfüllt. Nimmt man also das Integral und setzt darauf seine Derivirte nach α gleich Null, so erhält man die Gleichungen

$$r = \alpha q_1 + a\alpha \int \frac{F'(q_2)\, dq_2}{q_2^2 + a^2}$$

$$\pm \int \frac{\sqrt{(q_2^2 + a^2 - \alpha^2)\{q_2^2[1 + (F'(q_2))^2] + a^2\}}}{q_2^2 + a^2} \cdot dq^2 + \Theta(\alpha)$$

und (b)

$$q_1 + a \int \frac{F'(q_2)\, dq_2}{q_2^2 + a^2}$$

$$\mp \alpha \int \frac{\sqrt{q_2^2 [1 + (F'(q_2))^2] + a^2}}{(q_2^2 + a^2)\sqrt{q_2^2 + a^2 - \alpha^2}} \cdot dq_2 + \Theta'(\alpha) = 0,$$

welche den Gleichungen (4) entsprechen.

Nehmen wir an, die geodätischen Linien sollen ihren gemeinsamen Ursprung im Punkte (q_1^0, q_2^0) haben; dann müssen die Gleichungen (10) bestehen, die in die folgenden übergehen:

$$r = \alpha(q_1 - q_1^0) + a\alpha \int_{q_2^0}^{q_2} \frac{F'(q_2)\, dq_2}{q_2^2 + a^2}$$

$$\pm \int_{q_2^0}^{q_2} \frac{\sqrt{(q_2^2 + a^2 - \alpha^2)\{q_2^2[1 + (F'(q_2))^2] + a^2\}}}{q_2^2 + a^2} \cdot dq_2,$$

$$q_1 - q_1^0 + a \int_{q_2^0}^{q_2} \frac{F'(q_2)\, dq_2}{q_2^2 + a^2}$$

$$\mp \alpha \int_{q_2^0}^{q_2} \frac{\sqrt{q_2^2[1 + (F'(q_2))^2] + a^2}}{(q_2^2 + a^2)\sqrt{q_2^2 + a^2 - \alpha^2}} \cdot dq_2 = 0.$$

Die zweite von diesen Gleichungen stellt die geodätische Linie dar, die erste giebt die Länge dieser Linien an. Um die Gleichung der orthogonalen Trajectorie der geodätischen Linien von gegebener Länge r zu finden, muss man in der ersten Gleichung r constant annehmen und

aus beiden Gleichungen α eliminiren. Diese Elimination ist jedoch vor Ausführung der angedeuteten Integration nicht ausführbar. Ebenso unausführbar ist es, die früheren Coordinaten q_1 und q_2, sowie den Differentialparameter m als Functionen der geodätischen Coordinaten r und α darzustellen.

2) *Das geodätische Coordinatensystem auf der Kegelfläche zu bestimmen.*

Die oben entwickelte Methode zur Transformation eines gegebenen Coordinatensystems in ein geodätisches lässt sich auf den speciellen Fall anwenden: ein gegebenes geodätisches System in ein anderes, aber ebenfalls geodätisches zu transformiren. Wir wollen diese Transformation für die Kegelfläche ausführen.

Die Lage des Punktes M auf der Kegelfläche sei durch seine Entfernung q_1 von der Spitze O des Kegels und durch die Länge q_2 der sphärischen Curve bestimmt, die durch den Schnitt des Kegels mit einer Kugel entsteht, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels und deren Radius gleich 1 ist; dabei sei der Anfangspunkt von q_2 in irgend einem Punkte dieser Curve gelegen, der Endpunkt aber auf der durch den Punkt M hindurchgehenden Erzeugenden des Kegels. Das Quadrat des Bogendifferentials ds einer beliebigen, auf der Kegelfläche verzeichneten Curve ist durch die Formel

$$ds^2 = dq_1^2 + q_1^2 dq_2^2 \tag{a}$$

ausgedrückt, welche (s. §. 75) zeigt, dass das System der Coordinaten q_1 und q_2 ein geodätisches ist; dabei ist die Erzeugende des Kegels die geodätische Linie. Transformiren wir dies Coordinatensystem in ein anderes geodätisches.

Die Gleichung (2) nimmt im vorliegenden Falle die Form an:

$$q_1^2 \left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2 = q_1^2;$$

dieser Gleichung wird durch die folgenden Ausdrücke genügt:

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} = \sin(q_2 + \alpha), \quad \frac{\partial r}{\partial q_2} = q_1 \cos(q_2 + \alpha).$$

Bei constantem α ist die Bedingung:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_1}$$

erfüllt; daher ist:

$$dr = \sin(q_2 + \alpha)\, dq_1 + q_1 \cos(q_2 + \alpha)\, dq_2$$

und

$$r = q_1 \sin(q_2 + \alpha) + \Theta(\alpha).$$

Zur Bestimmung von $\Theta(\alpha)$ wollen wir die Bedingung annehmen dass die geodätischen Linien ihren Ursprung im Punkte $(q_1^0, 0)$ haben. Dann gehen die Gleichungen (10) über in:

$$r = q_1 \sin(q_2 + \alpha) - q_1{}^0 \sin \alpha,$$

$$q_1 \cos(q_2 + \alpha) - q_1{}^0 \cos \alpha = 0. \tag{b}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichung α, so folgt:

$$r = \sqrt{q_1{}^2 + (q_1{}^0)^2 - 2 q_1 q_1{}^0 \cos q_2}. \tag{c}$$

Die zweite der Gleichungen (b) zeigt, dass jede geodätische Curve auf dem Kegel sich bei der Abwickelung desselben in eine Gerade verwandelt.

Es sei BOM (Fig. 41) diese Abwickelung und A die Lage des Ursprungs $(q_1{}^0, 0)$ der geodätischen Linien. Trägt man den Winkel $AOB = \alpha$ an und zieht durch A eine Senkrechte zu OB, so sieht man leicht, dass diese Gerade die geodätische Linie in der Abwickelung darstellt.

Fig. 41.

Nimmt man nämlich auf dieser Geraden einen beliebigen Punkt M an und setzt $OM = q_1$, $MOA = q_2$, so ist:

$$OB = q_1 \cos(q_2 + \alpha) \text{ und } OB = q_1{}^0 \cos \alpha;$$

also

$$q_1 \cos(q_2 + \alpha) - q_1{}^0 \cos \alpha = 0.$$

Dies wird aber auch die Gleichung derjenigen Curve sein, die sich bei der Abwickelung in die Gerade AM verwandelt, d. h. die zweite der Gleichungen (b) stellt eine Curve dar, die bei der Abwickelung in die Gerade AM übergeht.

In dem Dreieck OMA hat man:

$$AM = \sqrt{q_1{}^2 + (q_1{}^0)^2 - 2 q_1 q_1{}^0 \cos q_2} = r;$$

also bedeutet Gleichung (c) bei constantem r eine Curve, die bei der Abwickelung in die Peripherie eines Kreises vom Mittelpunkte A und vom Radius AM übergeht. Also verwandelt sich die orthogonale Trajectorie der vom Punkte $(q_1{}^0, 0)$ ausgehenden geodätischen Linien in einen Kreis, dessen Mittelpunkt A ist.

Da

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \sin(q_2 + \alpha), \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = q_1 \cos(q_2 + \alpha)$$

und nach Gleichung (b)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_1} = \frac{\cos(q_2 + \alpha)}{r}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial q_2} = \frac{-q_1 \sin(q_2 + \alpha)}{r},$$

so ist

$$[illegible]^2 = \frac{EG - F^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial q_1}\dfrac{\partial \alpha}{\partial q_2} - \dfrac{\partial f}{\partial q_2}\dfrac{\partial \alpha}{\partial q_1}\right)^2} = r^2;$$

also ist der transformirte Ausdruck des Quadrats des Bogendifferentials einer beliebigen Curve

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2,$$

was sich auch leicht aus der Abwickelung MOB ableiten lässt.

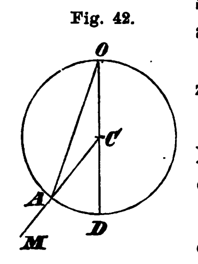
Nehmen wir nun an, die geodätischen Linien sollen normal zu der Curve

$$q_1 = k \cos q_2 \tag{d}$$

beginnen, wo k eine Constante ist.

Man sieht leicht, dass sich diese Curve bei der Abwickelung in einen Kreis verwandelt, dessen Durchmesser $OD = k$ (Fig. 42) von der Spitze O des Kegels aus auf derjenigen Erzeugenden aufgetragen ist, von der die Coordinate q_2 anfängt.

Fig. 42.



Die Bedingung (12), dass die geodätischen Linien zu der Curve (d) normal sind, giebt:

$$q_1^2 \cos(q_2 + \alpha) - kq_1 \sin q_2 \sin(q_2 + \alpha) = 0;$$

hieraus ergiebt sich, wenn man q_1 mit Hilfe der Gleichung (d) eliminirt:

$$\cos(2q_2 + \alpha) = 0;$$

daher ist

$$2q_2 + \alpha = 90^0, \quad q_2 = 45^0 - \frac{\alpha}{2};$$

somit wird nach Gleichung (d):

$$q_1 = k \cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Diese Grössen q_1 und q_2 sind die Coordinaten des Anfangspunktes A der geodätischen Linie, deren Gleichung ist:

$$q_1 \sin(q_2 + \alpha) + \Theta(\alpha) = 0;$$

sie müssen daher dieser Gleichung genügen. Substituirt man sie, so findet man

$$k \cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) + \Theta(\alpha) = 0,$$

woraus sich die unbekannte Function $\Theta(\alpha)$ bestimmt:

$$\Theta(\alpha) = -\frac{k}{2}(1 + \sin\alpha).$$

Somit verwandeln sich im vorliegenden Falle die Gleichungen (4) in die folgenden:

$$r = q_1 \sin(q_2 + \alpha) - \frac{k}{2}(1 + \sin\alpha),$$

$$q_1 \cos(q_2 + \alpha) - \frac{k}{2}\cos\alpha = 0.$$

Die zweite Gleichung stellt eine Curve dar, die sich bei der Abwickelung in die Gerade CM verwandelt, welche durch den Mittelpunkt des über dem Durchmesser $OD = k$ construirten Kreises geht.

Ferner hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \sin(q_2 + \alpha), \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = q_1 \cos(q_2 + \alpha),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_1} = \frac{\cos(q_2 + \alpha)}{r + \frac{k}{2}}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial q_2} = -\frac{q_1 \sin(q_2 + \alpha)}{r + \frac{k}{2}},$$

und daher

$$m^2 = \left(r + \frac{k}{2}\right)^2$$

und

$$ds^2 = dr^2 + \left(r + \frac{k}{2}\right)^2 d\alpha^2.$$

Bedeutet φ den Winkel OCA und setzt man $r + \frac{k}{2} = \varrho$, so ist $\varphi = 90^0 + \alpha$ und daher:

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2.$$

Die Grössen ϱ und φ kann man als die neuen geodätischen Coordinaten ansehen.

Ausser der oben angeführten Abhandlung von Gauss, in der die wichtigsten Anwendungen des geodätischen Coordinatensystems dargelegt sind, empfehlen wir noch das Werk von Aoust, Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque, Paris 1869, worin die allgemeinen Methoden zur Untersuchung der Curven auf einer Fläche mit Hilfe krummliniger Coordinaten und unter anderem die Lösung der Probleme über die geodätische Linie entwickelt sind.

Kartographische Coordinaten.

77. Wir wollen nun noch ein bemerkenswerthes orthogonales Coordinatensystem untersuchen, welches die Eigenschaft hat, dass die Parameter beider Coordinaten für jeden Punkt der Fläche einander an Grösse gleich sind. Für dieses Coordinatensystem hat die Energie die Form

$$T = \frac{1}{2h^2}(q_1'^2 + q_2'^2),$$

folglich bestimmt sich das Bogendifferential einer beliebigen Curve durch die Formel:

$$ds^2 = \frac{1}{h^2}(dq_1^2 + dq_2^2),$$

wo h der gemeinsame Werth der beiden Coordinatenparameter

ist. Ein solches Coordinatensystem nennt man ein *kartographisches*, weil es in der Kartographie Anwendung findet.*)

Wir wollen nun ein gegebenes Coordinatensystem der q_1 und q_2 in ein kartographisches der α und β transformiren. Dies wird geschehen, indem wir zwei Functionen α und β der Coordinaten q_1 und q_2 so bestimmen, dass sie der Gleichung genügen:

$$\frac{1}{h^2}(d\alpha^2 + d\beta^2) = E dq_1^2 + 2 F dq_1 dq_2 + G dq_2^2. \qquad (1)$$

Man kann zu diesem Zwecke ein ähnliches Verfahren anwenden, wie zur Auffindung des geodätischen Coordinatensystems. Es giebt jedoch noch ein anderes, bequemeres Verfahren, das in folgendem besteht.**)

Man zerlegt den Ausdruck

$$E dq_1^2 + 2 F dq_1 dq_2 + G dq_2^2$$

in die beiden conjugirt complexen Factoren

$$\frac{1}{\sqrt{E}}[E . dq_1 + (F + i\sqrt{EG - F^2}) dq_2] \qquad (2)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{E}}[E . dq_1 + (F - i\sqrt{EG - F^2}) dq_2] \qquad (3)$$

wo $i = \sqrt{-1}$, und sucht einen Factor von der Gestalt $\mu + i\nu$, durch welchen der Ausdruck (2) ein vollständiges Differential wird. In der Integralrechnung wird bewiesen, dass ein solcher Factor immer existirt, und zwar nicht ein einziger, sondern unendlich viele. Es sei $\alpha + i\beta$ das Integral des vollständigen Differentials

$$(\mu + i\nu)[E . dq_1 + (F + i\sqrt{EG - F^2}) dq_2]\frac{1}{\sqrt{E}}. \qquad (4)$$

Dann ist $\alpha - i\beta$ das Integral des conjugirten Ausdruckes

$$(\mu - i\nu)[E . dq_1 + (F - i\sqrt{EG - F^2}) dq_2]\frac{1}{\sqrt{E}};$$

---

*) Man nennt diese Coordinaten auch *isometrische* oder *thermometrische*. S. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes. Hâton de la Goupillière, Journal de l'Ecole polytechnique, 48e cahier.

**) Monge, Application de l'analyse à la Géometrie, Note II. de Liouville.

folglich geht das Product dieser beiden Ausdrücke

$$(\mu^2 + \nu^2)\,[E dq_1^2 + 2 F dq_1 dq_2 + G dq_2^2]$$

in das Product

$$(d\alpha + i d\beta)\,(d\alpha - i d\beta) = d\alpha^2 + d\beta^2$$

über; mithin ist:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}\,(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Man kann daher die beiden reellen Functionen α und β, die in dem Integral $\alpha + i\beta$ des Ausdrucks (4) auftreten, als neue Coordinaten und die Grösse $\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$, den Modul des integrirenden Factors $\mu + i\nu$, als Parameter dieser Coordinaten wählen.

Der Differentialausdruck (2) hat bekanntlich unendlich viele integrirende Factoren, die in dem allgemeinen Ausdruck

$$f(\alpha + i\beta)\,(\mu + i\nu) \tag{5}$$

enthalten sind. Ein solcher Factor bringt den Ausdruck (2) auf die Form des exacten Differentials

$$f(\alpha + i\beta)\; d\,(\alpha + i\beta)$$

einer gewissen Function $F(\alpha + i\beta)$. Gesetzt, es sei $F(\alpha)$ eine beliebige reelle Function von α und

$$F(\alpha + i\beta) = \alpha' + i\beta',$$

wo α' und β' reelle Functionen von α und β sind. Betrachtet man α' und β' als neue Coordinaten eines Punktes (q_1, q_2), so sind die Parameter dieser Coordinaten, ebenso wie die Parameter der Coordinaten α und β, einander gleich und das System ist orthogonal. Bezeichnen nämlich μ' und $i\nu'$ den reellen und den imaginären Theil des Ausdruckes (5), so erhält man den Factor $\mu' - i\nu'$, der den Ausdruck (3) in

$$d(\alpha' - i\beta')$$

verwandelt; man hat daher, ganz wie bei dem Factor $\mu + i\nu$:

$$(\mu'^2 + \nu'^2)\, ds^2 = d\alpha'^2 + d\beta'^2$$

und

$$ds^2 = \frac{1}{\mu'^2 + \nu'^2}\,(d\alpha'^2 + d\beta'^2).$$

Offenbar kann man statt α und β auch α und $-\beta$, oder $-\alpha$ und $+\beta$, oder $-\alpha$ und $-\beta$ wählen; denn durch diese Vertauschungen ändert sich der Ausdruck

$$ds^2 = \frac{1}{h^2}(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

nicht. Dasselbe gilt von den Coordinaten α' und β'. Aber diese Coordinatensysteme, die sich nur durch die Vorzeichen der Coordinaten und die Richtungen der entsprechenden Parameter unterscheiden, entspringen aus einem System, das durch die Formel

$$\alpha' + i\beta' = F(\alpha + i\beta)$$

bestimmt wird; man kann sich daher auf diese Formel beschränken, und es lässt sich leicht beweisen, dass sie die allgemeinste Lösung des Problems der Transformation eines gegebenen Coordinatensystems in ein kartographisches giebt. Angenommen, es sei nach der obigen Methode ein specielles System der kartographischen Coordinaten α und β gefunden und es solle ein anderes, gleichfalls kartographisches System der α' und β' bestimmt werden. Bezeichnet man mit h den Werth der Parameter der Coordinaten α und β, mit h' den Werth der Parameter der Coordinaten α' und β' und mit φ den Winkel, welchen der Parameter der Coordinate α mit dem der Coordinate α' einschliesst, so hat man:

$$\frac{1}{h'}\,d\alpha' = \frac{1}{h}\cos\varphi\,.\,d\alpha - \frac{1}{h}\sin\varphi\,.\,d\beta,$$

$$\frac{1}{h'}\,d\beta' = \frac{1}{h}\sin\varphi\,.\,d\alpha + \frac{1}{h}\cos\varphi\,.\,d\beta.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{1}{h'}\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha} = \frac{1}{h}\cos\varphi,\quad \frac{1}{h'}\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta} = -\frac{1}{h}\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{h'}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = \frac{1}{h}\sin\varphi,\quad \frac{1}{h'}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} = \frac{1}{h}\cos\varphi;$$

folglich ist:

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha} = \frac{\partial\beta'}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta} = -\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}. \qquad (6)$$

Diese Gleichungen drücken aber die bekannte Bedingung

dafür aus, dass $\alpha' + i\beta'$ eine Function der complexen Grösse $\alpha + i\beta$ ist.*)

78. Gesetzt, die gegebenen Coordinaten q_1 und q_2 auf der Fläche (S) seien in irgend ein System von kartographischen Coordinaten α und β transformirt. Wir nehmen die letzteren als geradlinige rechtwinkelige Coordinaten in Bezug auf die Axen $O\alpha$ und $O\beta$ in einer beliebigen Ebene an; dann entspricht einem Punkte $M'(\alpha, \beta)$ in dieser Ebene ein Punkt $M(q_1, q_2)$ auf der Fläche (S). Jeder auf der Fläche (S) verzeichneten Figur (A) entspricht in der Ebene $\alpha O \beta$ eine Figur (A'), die der geometrische Ort der den Punkten der Figur (A) entsprechenden Punkte ist.

Die Figuren (A) und (A') haben die wichtige Eigenschaft, dass man mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung ihre correspondirenden unendlich kleinen Theile als ähnliche Figuren betrachten kann; dabei ist der Parameter h das Verhältniss zwischen den entsprechenden linearen Elementen und h^2 das Verhältniss der Flächen. Diese Eigenschaft der Figur (A') muss aber eine Karte haben, die die Abbildung des Theiles A der Erdoberfläche sein soll.

Die Aehnlichkeit der Figuren (A) und (A') in ihren unendlich kleinen Elementen lässt sich folgendermassen beweisen. Es seien MP und MQ (Fig. 43) zwei beliebige, unendlich kleine, auf der Fläche (S) verzeichnete Linien, QR und PR

---

*) Man kann sich folgendermassen hiervon überzeugen. Man setze $\alpha' + i\beta' = \varpi(\alpha, \beta)$ und $\alpha + i\beta = z$ und eliminire aus dem ersten Ausdruck α; als Resultat ergiebt sich dann $\varpi(z - i\beta, \beta)$, worin β verschwindet. Da nämlich

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} + i\frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varpi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} + i\frac{\partial \beta'}{\partial \beta} = \frac{\partial \varpi}{\partial z} i + \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \beta}\right),$$

so ist:

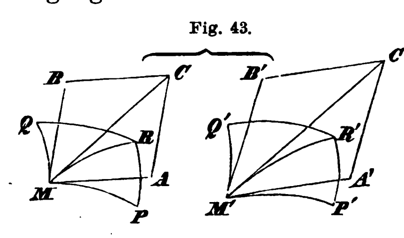
$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} + i\frac{\partial \beta'}{\partial \beta} = \frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} i - \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \beta}\right);$$

die Gleichungen (6) geben aber $\frac{\partial \varpi}{\partial \beta} = 0$. Man sieht daraus, dass $\varpi(z - i\beta, \beta)$ sich auf eine Function von nur einer Variablen z reducirt. Bezeichnet man diese Function mit $F(z)$, so ist:

$$\alpha' + i\beta' = F(\alpha + i\beta).$$

ihre Verschiebungen, die man durch eine continuirliche Bewegung des Punktes m von M nach R hervorbringen kann.

Fig. 43.



Diese Bewegung ist aus den Bewegungen MP und MQ zusammengesetzt. Wir bezeichnen nun die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung mit v, die der Componentenbewegungen mit u und w und tragen auf der Tangente von MP im Punkte M eine Strecke $MA = udt$ und auf der Tangente von MQ im Punkte M eine Strecke $MB = wdt$ auf. Dann lässt sich über MA und MB ein Parallelogramm construiren, das zur Diagonale die Strecke $MC = vdt$ hat, die auf der Tangente von MR im Punkte M aufgetragen ist. Nun sei $M'P'R'Q'$ die der Figur $MPRQ$ entsprechende Figur in der Ebene $\alpha O \beta$; dann kann man $Q'R'$ und $P'R'$ als Verschiebungen der Linien $M'P'$ und $M'Q'$ ansehen, die mit den Verschiebungen der Linien MP und MQ gleichzeitig sind. Bedeuten nun v', u', w' die Geschwindigkeiten der Bewegungen auf $M'R'$, $M'P'$ und $M'Q'$ und trägt man auf den Tangenten dieser Curven im Punkte M' die Strecken $M'A' = u'\,dt$, $M'B' = w'\,dt$ und $M'C' = v'\,dt$ auf, so erhält man das Parallelogramm $M'A'C'B'$, welches, wie leicht zu sehen, dem Parallelogramm $MACB$ ähnlich ist. Man hat nämlich in Folge der Gleichung

$$Edq_1^2 + 2Fdq_1\,dq_2 + Gdq_2^2 = \frac{1}{h^2}(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

die Relationen

$$M'A' = h\,.\,MA, \quad M'B' = h\,.\,MB, \quad M'C' = h\,.\,MC,$$

und daher sind die Parallelogramme $MACB$ und $M'A'C'B'$ ähnlich. In der Aehnlichkeit dieser Parallelogramme besteht aber die oben erwähnte Eigenschaft; denn mit Vernachlässigung von Unendlichkleinem höherer Ordnung kann man durch diese Parallelogramme die krummlinigen Flächen $MPRQ$ und $M'P'R'Q'$ ersetzen; diese sind aber die Elemente, in welche sich zwei endliche entsprechende Figuren (A) und (A') zerlegen lassen. Das Verhältniss h^2 der entsprechenden Elemente

zu einander ändert sich im Allgemeinen bei der Aenderung der Lage der Punkte M und M'.

79. Unter der Voraussetzung, dass die Fläche (S) eine Ebene ist und dass ihre Punkte M durch rechtwinkelige geradlinige Coordinaten x, y in Bezug auf die Axen Ox, Oy bestimmt sind, hat man:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + i\,dy)\,(dx - i\,dy).$$

Hierin ist $dx + i\,dy = d(x + iy)$ ein vollständiges Differential; daher bestimmen sich die allgemeinen kartographischen Coordinaten in der Ebene, die wir mit ξ und η bezeichnen wollen, durch die Formel:

$$\xi + i\eta = f(x + iy),$$

d. h. sie bilden den reellen und den imaginären Theil einer beliebigen Function der complexen Grösse $x + iy$.

Betrachtet man ξ und η als geradlinige rechtwinklige Coordinaten eines Punktes M' in Bezug auf die Axen Ox und Oy, so kann man in derselben Ebene xOy zwei Figuren (A) und (A') verzeichnen, die in ihren unendlich kleinen Theilen ähnlich sind.

Setzt man

$$f(x + iy) = \frac{c^2}{x + iy} = \frac{c^2 x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{c^2 y}{x^2 + y^2},$$

so kann man nehmen:

$$\xi = \frac{c^2 x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{c^2 y}{x^2 + y^2}.$$

In diesem Falle lassen sich die Figuren (A) und (A') vermittelst der Methode der reciproken Radienvectoren (s. §. 59) in einander transformiren, denn es ist:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{c^4}{x^2 + y^2}.$$

80. Gesetzt, die Fläche (S) sei eine die Erde darstellende Kugel vom Radius 1, q_1 die geographische Breite, q_2 die geographische Länge eines ihrer Punkte M. Nach §. 8 hat man dann:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dq_1^{\,2} + \cos^2 q_1 \,.\, dq_2^{\,2} \\ &= (dq_1 + i\cos q_1 \,.\, dq_2)\,(dq_1 - i\cos q_1 \,.\, dq_2). \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$dq_1 + i\cos q_1 \,.\, dq_2$$

wird durch den Factor $\frac{1}{\cos q_1}$ zu einem vollständigen Differential; es ist nämlich:

$$\frac{dq_1}{\cos q_1} + i\,dq_2 = d\left[\log\tan\left(\frac{1}{2}q_1 + \frac{\pi}{4}\right) + iq_2\right];$$

man kann daher allgemein setzen:

$$\alpha + i\beta = f\left[\log\tan\left(\frac{1}{2}q_1 + \frac{\pi}{4}\right) + iq_2\right].$$

Der einfachste Fall ist

$$\alpha + i\beta = \log\tan\left(\frac{1}{2}\,q_1 + \frac{\pi}{4}\right) + iq_2\,;$$

dann sind die kartographischen Coordinaten

$$\alpha = \log\tan\left(\frac{1}{2}\,q_1 + \frac{\pi}{4}\right),\quad \beta = q_2\,;$$

dabei ist der Parameter h dieser Coordinaten:

$$h = \cos q_1 = \frac{2\,e^{\alpha}}{e^{2\alpha} + 1}\,.$$

In diesem Falle ist die Abbildung (A') der sphärischen Figur (A) in der Ebene nichts anderes als eine *Seekarte*. Dem Meridian (q_2) entspricht die Gerade (β), die der Axe $O\alpha$ parallel ist und dem Parallelkreis (q_1) die der Axe $O\beta$ parallele Gerade (α). Die Gleichung der Loxodrome (s. §. 8), d. h. des Weges eines, fortwährend unter demselben Windstriche a segelnden Schiffes, ist

$$\log\tan\left(\frac{1}{2}\,q_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \log\tan\left(\frac{1}{2}\,q_1{}^0 + \frac{\pi}{4}\right) = (q_2 - q_2{}^0)\tan a,$$

wo $q_1{}^0$ und $q_2{}^0$ die geographische Breite und Länge irgend eines Punktes auf der Bahn des Schiffes sind. Dieselbe transformirt sich in die Gleichung

$$\alpha - \alpha_0 = (\beta - \beta_0)\tan a,$$

wo α_0 und β_0 die Coordinaten desjenigen Punktes sind, welcher den Punkt $(q_1{}^0,\ q_2{}^0)$ abbildet. Diese Gleichung stellt aber eine durch den Punkt $(\alpha_0,\ \beta_0)$ gehende Gerade dar, die mit der Axe $O\beta$ einen dem Windstrich a gleichen Winkel bildet. Die Eigenschaft der Loxodrome, sich als gerade Linie abzubilden, ist der Hauptvortheil der Seekarten.

Setzen wir ferner:

$$\alpha + i\beta = k\,e^{-\log\tan\left(\frac{1}{2}q_1 + \frac{\pi}{4}\right) + iq_2} = k\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,q_1\right)e^{iq_2}\,;$$

dann ist:

$$\alpha = k\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,q_1\right)\cos q_2,\quad \beta = k\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,q_1\right)\sin q_2, \tag{a}$$

während der Parameter h der neuen Coordinaten

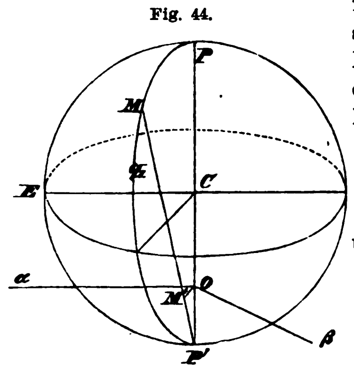
$$h = \frac{1}{2}\,k\sec^2\left(\frac{1}{4}\,\pi - \frac{1}{2}\,q_1\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + k^2}{2k}$$

ist.

Es sei P (Fig. 44) der Pol auf der Seite der positiven geographischen Breiten q_1, P' der gegenüberliegende Pol, PEP' der erste Meridian, $\alpha O\beta$ eine dem Aequator parallele Ebene in der Entfernung $OP' = k$ von P', $O\alpha$ der Schnitt dieser Ebene mit PEP', $O\beta$ eine Senkrechte

zu $O\alpha$ und M' der Schnittpunkt der Geraden $P'M$ mit der Ebene $\alpha O\beta$, d. h. das perspectivische Bild des Punktes M auf der Ebene $\alpha O\beta$ für ein in P' befindliches Auge. Man sieht leicht, dass die Coordinaten des Punktes M' bezüglich der Axen $O\alpha$, $O\beta$ durch die Formeln (a) ausgedrückt werden. Denn es ist

Fig. 44.



$$\alpha = OM' \,.\, \cos q_2, \quad \beta = OM' \,.\, \sin q_2,$$

$$OM' = k \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\, q_1\right)$$

und daher:

$$\alpha = k \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\, q_1\right) \cos q_2,$$

$$\beta = k \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\, q_1\right) \sin q_2 .$$

Die sphärische Figur (A) und ihre Abbildung (A') in der Ebene $\alpha O\beta$ transformiren sich nach der Methode der reciproken Radienvectoren in einander; denn es ist

$$P'M = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\, q_1\right), \quad P'M' = \frac{k}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\, q_1\right)}$$

und folglich

$$P'M \,.\, P'M' = 2k.$$

Setzt man $k = \frac{1}{2}$, so ist (A') die *stereographische* Projection der Figur (A) auf den Aequator.

Um die stereographische Projection auf einen beliebigen Horizont zu erhalten, muss man annehmen, dass P der Zenith, q_1 die Höhe und q_2 das Azimuth ist.

Vermittelst der reciproken Radienvectoren transformirt sich die Kugel (C) in die Ebene $\alpha O\beta$ und jede Ebene in eine durch den Pol P' gehende Kugel (s. §. 61); folglich bildet sich der Kreis, in dem die Kugel (C) irgend eine Ebene schneidet, als Schnitt der Ebene $\alpha O\beta$ mit einer gewissen Kugel ab, d. h. auch als Kreis; es lässt sich dies auch unmittelbar aus den Formeln (a) nachweisen.

81. Nehmen wir endlich an, die Fläche (S) sei ein Ellipsoid (λ_1) (§. 56) und der Punkt M sei durch die elliptischen Coordinaten λ_2 und λ_3 bestimmt. In diesem Falle hat man (§. 71):

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\,(\lambda_2 - \lambda_3)}{(a_1 + \lambda_2)\,(a_2 + \lambda_2)\,(a_3 + \lambda_2)}\,(d\lambda_2)^2 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)\,(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_3)\,(a_2 + \lambda_3)\,(a_3 + \lambda_3)}\,(d\lambda_3)^2\right].$$

Dieser Ausdruck lässt sich in die folgenden conjugirten Factoren zerlegen:

$$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^{\frac{1}{2}}}{[(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(-a_3-\lambda_2)]^{\frac{1}{2}}} d\lambda_2 \right.$$
$$\left. \pm i \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}}{[(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)]^{\frac{1}{2}}} d\lambda_3 \right\};$$

Dieselben werden durch Multiplication mit $\frac{2}{(\lambda_2 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}}$ zu vollständigen Differentialen und geben die Integrale:

$$\int \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^{\frac{1}{2}} d\lambda_2}{[(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(-a_3-\lambda_2)]^{\frac{1}{2}}} \pm i \int \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} d\lambda_3}{[(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Man muss daher setzen:

$$\alpha + i\beta$$
$$= f\left\{ \int \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^{\frac{1}{2}} d\lambda_2}{[(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(-a_3-\lambda_2)]^{\frac{1}{2}}} + i \int \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} d\lambda_3}{[(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)]^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Wir empfehlen noch das kartographische Coordinatensystem zu bestimmen: a) für eine Rotationsfläche, b) für die Schraubenfläche und c) für die Kegelfläche.

Schon Lambert*) und Euler**) beschäftigten sich mit dem Probleme der Kartographie, indem sie als Bedingung annahmen, dass die Abbildung in ihren unendlich kleinen Theilen der abzubildenden Figur ähnlich sein solle. Doch begnügten sie sich damit, zu zeigen, dass die stereographische Projection und die Seekarte diese Bedingung erfüllen. Später gab Lagrange***) die im Vorstehenden dargelegte Methode zur Auffindung eines kartographischen Systems und wendete dieselbe auf die Abbildung einer Rotationsfläche in der Ebene an. Darauf dehnte Gauss†) in einer, von der Kopenhagener Akademie preisgekrönten Abhandlung die Lagrange'sche Methode auf die Abbildung einer beliebigen gegebenen Fläche auf einer anderen, ebenen oder krummen Fläche aus.

In Zusammenhang mit dieser Aufgabe steht die Frage über die Deformation einer Fläche oder über das Auflegen einer Fläche auf eine andere ohne Risse und ohne Falten.

---

*) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik.

**) Acta Academiae Petropolitanae, 1777.

***) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1779.

†) Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher, 3. Heft, 1825.

Mit diesem Gegenstande beschäftigten sich besonders erfolgreich Minding*) und Bour.**)

Bour findet es in gewisser Hinsicht vortheilhaft, die kartographischen Coordinaten α und β durch die complexen Variablen $u = \alpha + i\beta$, $v = \alpha - i\beta$, die er *symmetrische Coordinaten* nennt, zu ersetzen. Mit Hilfe dieser Coordinaten lässt sich das Quadrat des Bogendifferentials einer Curve durch die einfache Formel ausdrücken:

$$ds^2 = \frac{1}{h^2} du\, dv.$$

X. Capitel.

Geometrische Derivirte der Coordinatenparameter. — Ausdrücke für die Krümmung von Linien, die auf Coordinatenflächen liegen.

82. Die directen und reciproken Parameter der Coordinaten eines beweglichen Punktes ändern sich im allgemeinen nach Grösse und Richtung und haben daher mehrere geometrische Derivirte. Stellen wir uns nun die Aufgabe, diese Derivirten zu bestimmen. Es seien a_1, a_2, a_3 die reciproken Parameter der Coordinaten des Punktes $M(q_1, q_2, q_3)$. Erleidet dieser Punkt eine Verschiebung nach einem anderen Punkte $M'(q_1 + \delta q_1, q_2, q_3)$, so dass sich nur die Coordinate q_1 ändert, d. h. verschiebt man ihn nach dem Schnittpunkte der Coordinatenlinie $(q_2 q_3)$ mit der Fläche $(q_1 + \delta q_1)$, so erhält der Parameter a_r ein geometrisches Increment, das wir mit $\Delta_1 a_r$ bezeichnen wollen. Vernachlässigt man bei diesem Incremente die unendlich kleinen Grössen von höherer Ordnung als δq_1, so erhält man die geometrische Variation $\overline{\delta_1 a_r}$ bezüglich der Coordinate q_1. Ebenso erhält man die geometrischen Variationen $\overline{\delta_2 a_r}$, $\overline{\delta_3 a_r}$ nach den Coordinaten q_2, q_3. Es ist nun leicht zu beweisen, dass

$$\left(\frac{\overline{\delta_s a_r}}{\delta q_s}\right) = \left(\frac{\overline{\delta_r a_s}}{\delta q_r}\right);$$

*) Journal von Crelle, B. XIX.

**) Journal de l'École Polytechnique, 29ième Cahier.

d. h. wenn man das Verhältniss $\frac{\overline{\delta_s a_r}}{\delta q_s}$ auf der Richtung von $\overline{\delta_s a_r}$ und das Verhältniss $\frac{\overline{\delta_r a_s}}{\delta q_r}$ auf der Richtung von $\overline{\delta_r a_s}$ aufträgt, so erhält man zwei Strecken, die einander geometrisch gleich sind.

Man kann dies durch die Formel

$$\overline{D_s a_r} = \overline{D_r a_s}, \qquad (1)$$

ausdrücken, welche somit aussagt, dass *die geometrische Derivirte des Parameters a_r nach q_s der geometrischen Derivirten des Parameters a_s nach q_r geometrisch gleich ist.*

Angenommen, MM' (Fig. 45) stelle diejenige Coordinatenlinie dar, welche vom Parameter a_r tangirt wird und $\mu\mu'$ sei die Lage welche diese Linie annimmt, wenn nur die eine Coordinate q_s ein Increment δq_s erhält; ferner sei $M\mu$ die vom Parameter a_s tangirte Coordinatenlinie und $M'\mu'$ ihre Lage, wenn nur die Coordinate q_r ein Increment δq_r erhält. Mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung kann man $M\mu$ als die Variationsverschiebung $a_s \delta q_s$ ansehen, welche der Punkt m erleidet, während er sich infolge der Aenderung der Coordinate q_r auf der Linie MM' fortbewegt (vergl. §. 37); dadurch wird $M\mu$ eine geometrische Function der Coordinate q_r und hat somit ein geometrisches Differential $\overline{D_r a_s \,.\, \delta q_s \,.\, \delta q_r}$ nach dieser Veränderlichen, welches, wie im §. 36 bewiesen, dem Differential der Verschiebung $\overline{MM'} = a_r \delta q_r$ nach der Coordinate q_s, d. h. der Grösse $\overline{D_s (a_r \delta q_r) \,.\, \delta q_s}$ oder $\overline{D_s a_r \delta q_r \delta q_s}$ geometrisch gleich ist; man hat daher

Fig. 45.

$$\overline{D_r a_s \delta q_s \delta q_r} = \overline{D_s a_r \delta q_r \delta q_s},$$

woraus folgt

$$\overline{D_r a_s} = \overline{D_s a_r},$$

w. z. b. w.

83. Nach der bekannten Formel für die Differentiation der geometrischen Producte hat man

$$\overline{a_m D_s a_r} = \frac{\partial \,\overline{a_m a_r}}{\partial q_s} - \overline{a_r D_s a_m},$$

und ebenso mit Beachtung der Formel (1):

$$\overline{a_r D_s a_m} = \overline{a_r D_m a_s} = \frac{\partial \overline{a_r a_s}}{\partial q_m} - \overline{a_s D_m a_r},$$

$$\overline{a_s D_m a_r} = \overline{a_s D_r a_m} = \frac{\partial \overline{a_s a_m}}{\partial q_r} - \overline{a_m D_r a_s};$$

aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\overline{a_m D_s a_r} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial \overline{a_m a_r}}{\partial q_s} + \frac{\partial \overline{a_m a_s}}{\partial q_r} - \frac{\partial \overline{a_r a_s}}{\partial q_m}\right].$$

Dieser Ausdruck besteht aus den partiellen Derivirten der Coefficienten der quadratischen Function

$$T = \tfrac{1}{2}\,\Sigma \overline{a_r a_s}\, q'_r q'_s,$$

welche die Energie der Bewegung ausdrückt. Zur Abkürzung wollen wir denselben mit $(r s m)$ bezeichnen. Es ist also:

$$\overline{a_m D_s a_r} = (r s m). \tag{2}$$

Dabei sei bemerkt, dass

$$(rsm) = (srm),\ (rrm) = \frac{\partial \overline{a_m a_r}}{\partial q_r} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial a_r^2}{\partial q_m},$$

$$(rmr) = (mrr) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial a_r^2}{\partial q_m},\ (rrr) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial a_r^2}{\partial q_r}.$$

Mit Hilfe der Formel (2) und der Derivirten q'_1, q'_2, q'_3 der Coordinaten nach der Zeit kann man nun leicht die Projectionen der bei der Bewegung des Punktes m auf einer beliebigen Trajectorie MM_1 (Fig. 45) auftretenden geometrischen Derivirten $\overline{D_t a_r}$ auf die Parameter bestimmen.

Die Variationsverschiebung $a_r \delta q_r = MM'$ wird bei der Bewegung des Punktes m auf MM_1 während der Zeit dt zu einer geometrischen Function der Zeit. Setzt man voraus, dass ihr Endpunkt M' auf der Fläche $q_r + \delta q_r$ bleibt, so bleibt δq_r constant; die geometrische Derivirte von $a_r \delta q_r$ nach der Zeit ist daher $\overline{D_t a_r} \,.\, \delta q_r$; sie muss aber nach §. 37 der geometrischen Variation der Geschwindigkeit v nach q_r, d. h. der Grösse $\overline{D_r v} \,.\, \delta q_r$ gleich sein; folglich ist:

$$\overline{D_t a_r} = \overline{D_r v}. \tag{3}$$

Die Derivirte q'_r der Coordinate q_r nach der Zeit ändert sich nicht, wenn diese Coordinate die Variation δq_r erhält.

Denn wenn $M_1 M'_1$ die Lage ist, welche die Verschiebung MM' zur Zeit $t + dt$ einnimmt, so erhält die Coordinate q_r im Punkte M'_1 den Werth $q_r + \Delta_t q_r + \delta q_r$, wo Δ_t das dem Zeitzuwachs dt entsprechende Increment bedeutet; für den Punkt M' aber hat die Coordinate q_r den Werth $q_r + \delta q_r$; daher erhält die Coordinate $q_r + \delta q_r$ beim Uebergange vom Punkte M' nach M'_1 das Increment $\Delta_t q_r$, d. h. dasselbe, welches q_r beim Uebergange von M nach M_1 erhält. Die übrigen Coordinaten bleiben aber während der ganzen Zeit dt für die Punkte M_1 und M'_1 dieselben, weil $M_1 M'_1$ eine Coordinatenlinie ist. Da also alle drei Coordinaten beim Uebergange von M' nach M'_1 dieselben Incremente erhalten, die sie beim Uebergange von M nach M_1 bekommen, so sind infolge dessen die Componenten der Geschwindigkeit im Punkte M' nach den Richtungen der reciproken Parameter gleich den Derivirten q'_1, q'_2, q'_3, multiplicirt resp. mit den geänderten reciproken Parametern

$$\overline{a_1} + \overline{\Delta_r a_1},\quad \overline{a_2} + \overline{\Delta_r a_2},\quad \overline{a_3} + \overline{\Delta_r a_3},$$

d. h. mit ihren Werthen im Punkte M'; folglich ist die Summe

$$\overline{q'_1 \Delta_r a_1} + \overline{q'_2 \Delta_r a_2} + \overline{q'_3 \Delta_r a_3}$$

das geometrische Increment, welches die Geschwindigkeit v infolge der Variationsverschiebung MM' des Punktes M erhält. Dividirt man dasselbe mit δq_r und geht zur Grenze über, d. h. setzt man $\delta q_r = 0$, so erhält man die geometrische Derivirte:

$$\overline{D_r v} = \overline{q'_1 D_r a_1} + \overline{q'_2 D_r a_2} + \overline{q'_3 D_r a_3}. \tag{4}$$

Nach Formel (3) ist also

$$\overline{D_t a_r} = \overline{q'_1 D_r a_1} + \overline{q'_2 D_r a_2} + \overline{q'_3 D_r a_3},$$

woraus folgt:

$$\overline{a_m D_t a_r} = q'_1 \cdot \overline{a_m D_r a_1} + q'_2 \cdot \overline{a_m D_r a_2} + q'_3 \cdot \overline{a_m D_r a_3}. \tag{5}$$

Dies lässt sich nach Formel (2) schreiben:

$$\overline{a_m D_t a_r} = (1rm)\, q'_1 + (2rm)\, q'_2 + (3rm)\, q'_3. \tag{5'}$$

Diese Formel liefert die Projectionen der geometrischen Derivirten $\overline{D_t a_r}$ auf die Parameter a_1, a_2, a_3 in Form von

linearen Functionen in Bezug auf die Derivirten q'_1, q'_2, q'_3; es wird nämlich:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_1}\cdot\overline{a_1 D_t a_r} &= \frac{1}{a_1}\,[(1r1)\,q'_1 + (2r1)\,q'_2 + (3r1)\,q'_3] \\
\frac{1}{a_2}\cdot\overline{a_2 D_t a_r} &= \frac{1}{a_2}\,[(1r2)\,q'_1 + (2r2)\,q'_2 + (3r2)\,q'_3] \qquad (6) \\
\frac{1}{a_3}\cdot\overline{a_3 D_t a_r} &= \frac{1}{a_3}\,[(1r3)\,q'_1 + (2r3)\,q'_2 + (3r3)\,q'_3].
\end{aligned}
$$

Durch die Substitution $r = 1, 2, 3$ ergeben sich 9 Formeln für die Projectionen der drei geometrischen Derivirten

$$\overline{D_t a_1},\ \overline{D_t a_2},\ \overline{D_t a_3}$$

auf die Parameter a_1, a_2, a_3.

84. Mit Hilfe der Formeln (2) kann man leicht die Projectionen der Derivirten $\overline{D_s a_r}$ auf die directen Parameter h_1, h_2, h_3 erhalten. Man beachte, dass die Längen

$$a_1\cdot\overline{h_k h_1},\ a_2\cdot\overline{h_k h_2},\ a_3\cdot\overline{h_k h_3}$$

die Componenten des directen Parameters h_k nach den Richtungen der reciproken Parameter a_1, a_2, a_3 sind;*) multiplicirt man daher die Grössen

$$\overline{a_1 D_s a_r},\ \overline{a_2 D_s a_r},\ \overline{a_3 D_s a_r}$$

resp. mit

$$\overline{h_k h_1},\ \overline{h_k h_2},\ \overline{h_k h_3}$$

und bildet die Summe dieser Producte, so erhält man $\overline{h_k D_s a_r}$, und es wird also nach Formel (2):

$$\overline{h_k D_s a_r} = \overline{h_k h_1}\,(rs1) + \overline{h_k h_2}\,(rs2) + \overline{h_k h_3}\,(rs3). \qquad (7)$$

Da das geometrische Product $\overline{h_k a_r}$ gleich Eins ist, wenn $k = r$, aber gleich Null, wenn k nicht gleich r ist, so folgt:

$$\frac{\delta(\overline{h_k a_r})}{\delta q_s} = 0,\ \text{d. h.}\ \overline{h_k D_s a_r} + \overline{a_r D_s h_k} = 0\,;$$

---

*) Bedeuten nämlich r_1, r_2, r_3 die Componenten des Parameters h_1 in den Axen a_1, a_2, a_3, so ist $h_1 = r_1 \cos(h_1 a_1)$, $h_1 \cos(h_1 h_2) = r_2 \cos(h_2 a_2)$, $h_1 \cos(h_1 h_3) = r_3 \cos(h_3 a_3)$; beachtet man nun, dass $\overline{h_1 a_1} = 1$, $\overline{h_2 a_2} = 1$, $\overline{h_3 a_3} = 1$, so folgt $a_1 h_1^2 = r_1$, $a_2 \overline{h_1 h_2} = r_2$, $a_3 \overline{h_1 h_3} = r_3$; ähnliche Formeln lassen sich für h_2 und h_3 ableiten.

folglich ist

$$\overline{a_r D_s h_k} = - \overline{h_k D_s a_r}$$

und

$$\overline{a_r D_s h_k} = - [\overline{h_k h_1}(rs1) + \overline{h_k h_2}(rs2) + \overline{h_k h_3}(rs3)]. \quad (8)$$

Aus Formel (7) ergeben sich als Projectionen der Derivirten $\overline{D_s a_r}$ auf die directen Parameter:

$$\frac{1}{h_1}\overline{h_1 D_s a_r},\ \frac{1}{h_2}\overline{h_2 D_s a_r},\ \frac{1}{h_3}\overline{h_3 D_s a_r},$$

und aus Formel (8) als Projectionen der Derivirten $\overline{D_s h_k}$ auf die reciproken Parameter:

$$\frac{1}{a_1}\overline{a_1 D_s h_k},\ \frac{1}{a_2}\overline{a_2 D_s h_k},\ \frac{1}{a_3}\overline{a_3 D_s h_k}.$$

Die Formeln (7) geben auch die Componenten der Derivirten $\overline{D_s a_r}$ nach den reciproken Parametern:

$$a_1 \cdot \overline{h_1 D_s a_r},\ a_2 \cdot \overline{h_2 D_s a_r},\ a_3 \cdot \overline{h_3 D_s a_r},$$

und die Formeln (8) die Componenten der Derivirten $\overline{D_s h_k}$ nach den directen Parametern:

$$h_1 \cdot \overline{a_1 D_s h_k},\ a_2 \cdot \overline{h_2 D_s h_k},\ a_3 \cdot \overline{h_3 D_s h_k}.$$

Multiplicirt man die Grössen

$$\overline{a_1 D_s h_k},\ \overline{a_2 D_s h_k},\ \overline{a_3 D_s h_k}$$

mit

$$\overline{h_m h_1},\ \overline{h_m h_2},\ \overline{h_m h_3}$$

und addirt die Producte, so folgt:

$$\overline{h_m D_s h_k} = - [\overline{h_k h_1} \cdot \sum_r \overline{h_m h_r}(rs1) + \overline{h_k h_2} \cdot \sum_r \overline{h_m h_r}(rs2)$$

$$+ \overline{h_k h_3} \cdot \sum_r \overline{h_m h_r}(rs3), \quad (9)$$

wo $\sum_r$ eine Summation nach dem Index r bedeutet. Nach dieser Formel lassen sich die Projectionen der Derivirten $\overline{D_s h_k}$ auf die directen Parameter

$$\frac{1}{h_1}\overline{h_1 D_s h_k},\ \frac{1}{h_2}\overline{h_2 D_s h_k},\ \frac{1}{h_3}\overline{h_3 D_s h_k}$$

und ihre Componenten nach den reciproken Parametern

$$a_r \cdot \overline{h_1 D_s h_k},\ a_2 \cdot \overline{h_2 D_s h_k},\ a_3 \cdot \overline{h_3 D_s h_k}$$

bestimmen.

Sind die Projectionen und Componenten der geometrischen Derivirten $\overline{D_s a_r}$ und $\overline{D_s h_k}$ auf den directen und reciproken Parametern bekannt, so kann man auch nach den Formeln des §. 66 die Längen dieser geometrischen Grössen berechnen.

Aus Formel (5) folgt noch:

$$\overline{h_k D_t a_r} = q'_1 \sum_m \overline{h_k h_m}(1rm) + q'_2 \sum_m \overline{h_k h_m}(2rm) + q'_3 \sum_m \overline{h_k h_m}(3rm), \tag{10}$$

wo $\sum_m$ eine Summation nach dem Index m bedeutet. Nach dieser Formel lassen sich die Projectionen der geometrischen Derivirten $\overline{D_t a_r}$ auf die directen Parameter

$$\frac{1}{h_1} \cdot \overline{h_1 D_t a_r}, \quad \frac{1}{h_2} \cdot \overline{h_2 D_t a_r}, \quad \frac{1}{h_3} \cdot \overline{h_3 D_t a_r},$$

sowie die Componenten auf den reciproken Parametern

$$a_1 \cdot \overline{h_1 D_t a_r}, \quad a_2 \cdot \overline{h_2 D_t a_r}, \quad a_3 \cdot \overline{h_3 D_t a_r}$$

bestimmen. Da aber $\frac{d\overline{h_k a_r}}{dt} = 0$ ist, so folgt:

$$\overline{a_r D_t h_k} + \overline{h_k D_t a_r} = 0;$$

also:

$$\overline{a_r D_t h_k} = -\overline{h_k D_t a_r};$$

der Ausdruck (10) giebt daher auch die Projectionen der geometrischen Derivirten $\overline{D_s h_k}$ auf die reciproken Parameter, nämlich

$$\frac{1}{a_1} \cdot \overline{a_1 D_t h_k}, \quad \frac{1}{a_2} \cdot \overline{a_2 D_t h_k}, \quad \frac{1}{a_3} \cdot \overline{a_3 D_t h_k}$$

und die Componenten nach den directen Parametern:

$$h_1 \cdot \overline{a_1 D_t h_k}, \quad h_2 \cdot \overline{a_2 D_t h_k}, \quad h_3 \cdot \overline{a_3 D_t h_k}.$$

Ferner findet man

$$\overline{h_m D_t h_k} = \overline{h_m h_1} \cdot \overline{a_1 D_t h_k} + \overline{h_m h_2} \cdot \overline{a_2 D_t h_k} + \overline{h_m h_3} \cdot \overline{a_3 D_t h_k} \tag{11}$$

und hieraus ergeben sich die Projectionen der geometrischen Derivirten $\overline{D_t h_k}$ auf die directen Parameter

$$\frac{1}{h_1} \cdot \overline{h_1 D_t h_k}, \quad \frac{1}{h_2} \cdot \overline{h_2 D_t h_k}, \quad \frac{1}{h_3} \cdot \overline{h_3 D_t h_k},$$

und ihre Componenten nach den reciproken Parametern:

$$a_1 \cdot \overline{h_1 D_t h_k}, \quad a_2 \cdot \overline{h_2 D_t h_k}, \quad a_3 \cdot \overline{h_3 D_t h_k}.$$

85. Im Falle eines orthogonalen Coordinatensystems hat man:

$$\frac{\partial \overline{a_r a_s}}{\partial q_m} = 0,$$

wenn r nicht gleich s ist; dagegen wird für $r = s$:

$$\frac{\partial \overline{a_r a_s}}{\partial q_m} = \frac{\partial a_r^2}{\partial q_m} = 2 a_r \frac{\partial a_r}{\partial q_m};$$

hiermit erhält man nach Formel (2):

$$\overline{a_r D_s a_r} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial a_r}{\partial q_s}, \quad \overline{a_r D_r a_r} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial a_r^2}{\partial q_r}, \quad \overline{a_m D_r a_r} = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial a_r^2}{\partial q_m}$$

und $\overline{a_m D_s a_r} = 0$, wenn alle drei Indices m, s, r verschieden sind.

Da $a_r = \frac{1}{h_r}$, wobei a_r und h_r dieselbe Richtung haben, so ist:

$$\overline{a_r D_s a_r} = \frac{1}{h_r^2} \cdot \overline{h_r D_s a_r} = -\frac{1}{h_r^2} \cdot \overline{a_r D_s h_r} = -\frac{1}{h_r^3} \frac{\partial h_r}{\partial q_s}$$

$$\overline{a_m D_r a_r} = \frac{1}{h_m^2} \cdot \overline{h_m D_r a_r} = -\frac{1}{h_m^2} \cdot \overline{a_r D_s h_m} = \frac{1}{h_r^3} \frac{\partial h_r}{\partial q_m};$$

folglich wird:

$$\overline{h_r D_s h_r} = h_r \frac{\partial h_r}{\partial q_s}, \quad \overline{h_r D_r h_m} = -\frac{h_m^2}{h_r} \frac{\partial h_r}{\partial q_m}.$$

86. Die geometrische Derivirte $\overline{D_r a_r}$ setzt sich zusammen aus $\frac{\partial a_r}{\partial q_r}$, der geometrischen Derivirten nach der Länge a_r, und aus der geometrischen Derivirten nach der Richtung, die gleich der Strecke a_r ist, multiplicirt mit der Winkelderivirten, die wir mit Θ_r bezeichnen wollen. Da $\Theta_r \delta q_r$ der Contingenzwinkel derjenigen Coordinatenlinie ist, die vom Parameter a_r berührt wird, so stellt das Verhältniss

$$\frac{\Theta_r \delta q_r}{a_r \delta q_r} = \frac{\Theta_r}{a_r}$$

die erste Krümmung dieser Linie im Punkte (q_1, q_2, q_3) dar. Wir werden diese Krümmung mit c_r bezeichnen; es ist also:

$$\overline{D_r a_r} = \frac{\partial a_r}{\partial q_r} + \overline{a_r^2 c_r}.$$

Die geometrische Derivirte $\overline{D_s a_r}$ ist bei ungleichen Indices s und r ebenfalls zusammengesetzt aus $\frac{\partial a_r}{\partial q_s}$, der geometrischen Derivirten nach der Länge a_r, und aus der geometrischen Derivirten nach der Richtung, die gleich der Strecke a_r ist, multiplicirt mit der Winkelderivirten. Das Product aus der letzteren in δq_s ist das Winkeldifferential des Parameters a_r nach der Veränderlichen q_s. Und dieses Differential kann man ansehen als den unendlich kleinen Winkel zwischen der Richtung von a_r und der Richtung, welche dieser Parameter annimmt, wenn sein Anfangspunkt sich um unendlich wenig in der vom Parameter a_s berührten Coordinatenlinie verschiebt. Der Abbé Aoust hat vorgeschlagen, diesen Winkel den *schiefen Contingenzwinkel* (angle de contingence inclinée) und sein Verhältniss zu der Verschiebung des Anfangspunktes des Parameters a_r in der Richtung a_s die *schiefe Krümmung der von a_r tangirten Curve* zu nennen.*) Bezeichnen wir diese Krümmung mit γ_{rs}, so ist $a_r a_s \gamma_{rs}$ die Derivirte von a_r nach der Richtung bezüglich der Variablen q_s; also ist:

$$\overline{D_s a_r} = \frac{\partial a_r}{\partial q_s} + \overline{a_r a_s \gamma_{rs}}.$$

Bezeichnen wir mit γ_{sr} die schiefe Krümmung der vom Parameter a_s tangirten Coordinatenlinie, so ist $a_s a_r \gamma_{sr}$ die Derivirte von a_s nach der Richtung bezüglich q_r.

Die schiefen Krümmungen γ_{rs} und γ_{sr} lassen sich durch Längen darstellen, die auf den Richtungen $a_r a_s \gamma_{rs}$ und $a_s a_r \gamma_{sr}$ aufgetragen werden; sie haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass *ihre Projectionen auf die Normale derjenigen Fläche* (q_m), *welche von den Parametern a_r und a_s berührt wird, einander gleich sind.* Denn diese Projectionen sind gleich den auf dieselbe Richtung bezogenen Projectionen der geometrischen Derivirten $\overline{D_s a_r}$ und $\overline{D_r a_s}$, welche einander geometrisch gleich sind. Also ist:

$$\gamma_{rs} \cos(\gamma_{rs} h_m) = \gamma_{sr} \cos(\gamma_{sr} h_m). \tag{12}$$

*) Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. Annali di Matematica pura ed applicata. T. VI. 1864. — Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque.

87. Gesetzt, der Punkt M bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf der Coordinatenfläche (q_m); dann besteht während der ganzen Zeit der Bewegung die Relation

$$\overline{h_m v} = 0,$$

aus welcher folgt:

$$\overline{h_m v_1} + \overline{v D_t h_m} = 0.$$

Ist nun ϱ der Krümmungsradius der Bahn im Punkte M, so sind $\frac{v^2}{\varrho}$ und $\frac{dv}{dt}$ die Componenten der Beschleunigung v_1 in der ersten Hauptnormale und in der Tangente; also ist:

$$\overline{h_m v_1} = h_m \frac{v^2}{\varrho} \cos(\varrho h_m) + h_m \frac{dv}{dt} \cos(v h_m).$$

Da aber $\cos(h_m v) = 0$, so bleibt:

$$\overline{h_m v_1} = h_m \frac{v^2}{\varrho} \cos(\varrho h_m);$$

also:

$$h_m \frac{v^2}{\varrho} \cos(\varrho h_m) + \overline{v D_t h_m} = 0;$$

folglich

$$\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho h_m) = - \frac{1}{h_m v^2} \cdot \overline{v D_t h_m}. \tag{13}$$

Hierin hängt die rechte Seite nur von den Coordinaten q_1, q_2, q_3 und von deren ersten Derivirten nach der Zeit (s. §. 83) ab, d. h. von der Grösse und Richtung der Geschwindigkeit v; folglich behält sie bei derselben Geschwindigkeit v einen und denselben Werth für alle Bewegungen auf der Fläche (q_m). Daher hat $\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho h_m)$ denselben Werth für alle Curven auf der Fläche (q_m), die im Punkte M die Richtung der Geschwindigkeit v zur gemeinsamen Tangente haben. Bezeichnet man jene Grösse mit c, so ist $\pm c$ die erste Krümmung im Punkte M des Durchschnitts der Fläche (q_m) mit einer zu ihr normalen, durch h_m und v hindurchgehenden Ebene. Wir stellen $\pm c$ durch eine, auf dem ersten Krümmungsradius dieses Schnittes aufgetragene Strecke dar. Diese Strecke hat denselben Sinn wie h_m, wenn $c > 0$ und den entgegengesetzten, wenn $c < 0$. In dem einen, wie im andern Falle wollen wir c die Krümmung des Normalschnitts der

Fläche (q_m) nennen. Diese Curve ist concav gegen den Parameter h_m, wenn $c > 0$, und convex, wenn $c < 0$.

Die Formel (13) giebt:

$$c = -\frac{1}{h_m v^2} \cdot \overline{v D_t h_m};$$

da aber

$$\overline{v D_t h_m} = q'_r \cdot \overline{a_r D_t h_m} + q'_s \cdot \overline{a_s D_t h_m}$$

und

$$\overline{a_r D_t h_m} = -\overline{h_m D_t a_r}, \quad \overline{a_s D_t h_m} = -\overline{h_m D_t a_s},$$

so wird:

$$c = \frac{1}{h_m v^2} (q'_r \cdot \overline{h_m D_t a_r} + q'_s \cdot \overline{h_m D_t a_s}).$$

Nach den Formeln (10) hat man:

$$\overline{h_m D_t a_r} = q'_r \cdot \overline{h_m D_r a_r} + q'_s \cdot \overline{h_m D_s a_r},$$

$$\overline{h_m D_t a_s} = q'_r \cdot \overline{h_m D_r a_s} + q'_s \cdot \overline{h_m D_s a_s},$$

während

$$\overline{h_m D_r a_s} = \overline{h_m D_s a_r}$$

[s. Formel (1)] ist; folglich:

$$c = \frac{1}{h_m v^2} \cdot (q'^2_r \cdot \overline{h_m D_r a_r} + 2 q'_r q'_s \cdot \overline{h_m D_s a_r} + q'^2_s \cdot \overline{h_m D_s a_s}). \quad (14)$$

Somit ist die Krümmung c als eine quadratische homogene Function von q'_r, q'_s ausgedrückt, deren Coefficienten sich aus Formel (7) ergeben.

Für $q'_s = 0$ ist c die Krümmung des Schnittes der Fläche (q_m) mit der durch h_m und a_r gehenden Ebene. Bedeutet c_{mr} diese Krümmung und setzt man in Formel (13) $v = a_r q'_r$, so folgt

$$c_{mr} = \frac{1}{h_m a_r^2} \cdot \overline{h_m D_r a_r} \quad \text{und daher} \quad \overline{h_m D_r a_r} = h_m a_r^2 c_{mr};$$

also findet man: (15)

$$c_{ms} = \frac{1}{h_m a_s^2} \cdot \overline{h_m D_s a_s} \quad \text{und} \quad \overline{h_m D_s a_s} = h_m a_s^2 c_{ms},$$

wo c_{ms} die Krümmung des Schnittes der Fläche (q_m) mit der durch h_m und a_s gehenden Ebene bedeutet.

Nach Formel (12) ist die Projection der geometrischen

Derivirten $\overline{D_s a_r}$ oder $\overline{D_r a_s}$ auf h_m gleich der Projection der partiellen Derivirten $a_r a_s \gamma_{rs}$ oder $a_s a_r \gamma_{sr}$ auf h_m, also:

$$\overline{h_m D_s a_r} = h_m a_r a_s \gamma_{rs} \cos(h_m \gamma_{rs}) = h_m a_r a_s k_{rs},$$

wo

$$k_{rs} = \gamma_{rs} \cos(h_m \gamma_{rs}) = \gamma_{sr} \cos(h_m \gamma_{sr});$$

die Formel (14) kann daher geschrieben werden:

$$c = c_{mr}\left(\frac{a_r q'_r}{v}\right)^2 + 2k_{rs}\left(\frac{a_r q'_s}{v}\right)\left(\frac{a_s q'_s}{v}\right) + c_{ms}\left(\frac{a_s q'_s}{v}\right)^2. \quad (16)$$

Bedeuten φ_r und φ_s die von der Richtung v mit den Parametern a_r und a_s gebildeten Winkel und Θ den Winkel $(a_r a_s)$, so hat man

$$\frac{a_r q'_r}{v} = \frac{\sin \varphi_s}{\sin \Theta}, \quad \frac{a_s q'_s}{v} = \frac{\sin \varphi_r}{\sin \Theta},$$

wodurch die Formel (16) übergeht in:

$$c = \frac{1}{\sin^2 \Theta}(c_{mr} \sin^2 \varphi_s + 2k_{rs} \sin \varphi_s \sin \varphi_r + c_{ms} \sin^2 \varphi_r).$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes kann man die Krümmung eines beliebigen Normalschnitts der Fläche (q_m) bestimmen, wenn die Krümmungen c_{mr} und c_{ms} der Normalschnitte in den Ebenen $h_m a_r$ und $h_m a_s$ und die schiefe Krümmung γ_{rs} bekannt sind.

88. Die Krümmung im Punkte M einer beliebigen Curve auf der Fläche (q_m), für welche die Ebene der ersten Krümmung zu dieser Fläche nicht normal ist, bestimmt sich mit Hilfe der Krümmung c des Schnittes der Fläche (q_m) mit einer durch den Parameter h_m gehenden und die erstere Curve im Punkte M berührenden Ebene. Man hat hierzu, wie im vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde,

$$\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho h_m) = c,$$

und wenn ϱ' den Krümmungsradius des Normalschnitts bezeichnet, so ist $c = \pm \frac{1}{\varrho'}$ und $\cos(\varrho h_m) = \pm \cos(\varrho \varrho')$; dabei hat man in beiden Ausdrücken das obere Zeichen für $c > 0$ und das untere für $c < 0$ zu nehmen. Jedenfalls ist:

$$\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho \varrho') = \frac{1}{\varrho'} \text{ oder } \varrho = \varrho' \cos(\varrho \varrho').$$

Durch die letzte Formel beweist sich der bekannte Meunier'sche Satz:

Man erhält den Radius der ersten Krümmung einer beliebigen, auf einer gegebenen Fläche liegenden Curve, wenn man den Krümmungsradius des Schnittes der Fläche mit einer normalen, durch die Tangente der gegebenen Curve gehenden Ebene auf die Ebene der ersten Krümmung dieser Curve projicirt.

Der Krümmungsradius der die gegebene Curve im Punkte M berührenden geodätischen Linie ist gleich dem Krümmungsradius ϱ' des Normalschnitts. Wir haben früher (§. 41) gesehen, dass ϱ die Projection des geodätischen Krümmungsradius g auf die Ebene der ersten Krümmung ist; daher hat man:

$$\varrho = g \sin(\varrho\varrho').$$

Aus dieser Formel und dem Meunier'schen Satze folgt:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho'^2} + \frac{1}{g^2};$$

d. h. *das Quadrat der ersten Krümmung der gegebenen Curve ist gleich der Summe der Quadrate der Krümmung des Normalschnitts und der geodätischen Krümmung.*

89. Bezeichnet man mit c_r die Krümmung der Coordinatenlinie $(q_m q_s)$ und trägt man diese Grösse auf dem entsprechenden Krümmungsradius auf, so hat man nach dem Satze von Meunier:

$$c_{mr} = c_r \cos(c_r h_m), \quad c_{sr} = c_r \cos(c_r h_s);$$

woraus folgt:

$$c_r^2 = \frac{1}{\sin^2(h_m h_s)} [c_{mr}^2 + c_{sr}^2 - 2 c_{mr} c_{sr} \cos(h_m h_s)].$$

Diese Formeln dienen zur Bestimmung der Grösse und Richtung der ersten Krümmung einer der Coordinatenlinien $(q_m q_s)$ mit Hilfe der Krümmungen der Schnitte der Fläche (q_m) und (q_s) mit Ebenen, die durch den reciproken Parameter a_r und die directen Parameter h_m, h_s gehen. Für die geodätische Krümmung G_{mr} der Curve $(q_m q_s)$ auf der Fläche (q_m) hat man

$$G_{mr} = c_r \sin(c_r h_m) = \frac{c_{mr} \cos(h_m h_s) - c_{sr}}{\sin(h_m h_s)}$$

und für die geodätische Krümmung derselben Curve auf der Fläche (q_s):

$$G_{sr} = c_r \sin(c_r h_s) = \frac{c_{sr} \cos(h_m h_s) - c_{mr}}{\sin(h_m h_s)}.$$

90. Wir wollen nun mit Hilfe der Formel (16) untersuchen, wie sich die Krümmung c mit der Aenderung des entsprechenden Normalschnitts der Fläche (q_m) ändert.

Trägt man die Länge $\sqrt{\varrho'}$ auf der Tangente dieses Schnittes im Punkte M auf, nimmt die Richtungen a_r und a_s als Axen eines geradlinigen Coordinatensystems und bezeichnet die Coordinaten des Endpunktes jener Strecke mit x und y, so ist:

$$x = \frac{\sin \varphi_s}{\sin \Theta} \sqrt{\varrho'}, \quad y = \frac{\sin \varphi_r}{\sin \Theta} \sqrt{\varrho'};$$

man erhält dann aus Formel (16) die Gleichung:

$$c_{mr} x^2 + 2k_{rs} xy + c_{ms} y^2 = \pm 1, \tag{17}$$

welche eine Linie zweiter Ordnung mit dem Centrum im Punkte M darstellt. Diese Linie ist: 1) eine Ellipse, wenn $c_{mr} c_{ms} - k_{rs}^2 > 0$, 2) eine Hyperbel, wenn $c_{mr} c_{ms} - k_{rs}^2 < 0$ und sie zerfällt 3) in zwei Gerade, wenn $c_{mr} c_{ms} - k_{rs}^2 = 0$. Das Gesetz der Vertheilung der Radienvectoren, die vom Punkte M nach dieser Curve führen, drückt zugleich auch das Vertheilungsgesetz der Krümmung c in den verschiedenen Normalschnitten aus. Die Linie (17) nennen wir die *Indicatrix der Krümmung im Punkte M.**)

Die Krümmungen der durch die Axen der Indicatrix gelegten Normalschnitte nennt man *Hauptkrümmungen der Fläche.* Die Ebenen dieser Schnitte stehen auf einander senkrecht.

Im Falle 1) haben die Krümmungen c_{mr}, c_{ms} und c dieselben Vorzeichen; daher sind alle Normalschnitte im Punkte M nach derselben Seite hin concav, nämlich nach der Seite des Parameters h_m, wenn $c > 0$, und nach der entgegengesetzten

---

*) Dupin nennt *Indicatrix* in einem gegebenen Punkte M die Schnittlinie der Fläche mit einer, zur Tangentenebene des Punktes M parallelen und derselben unendlich nahen Ebene. Da die Linie (17) der Dupin'schen Indicatrix ähnlich und mit ihr ähnlich gelegen ist, so kann man sie auch als Indicatrix der Krümmung ansehen.

Seite, wenn $c < 0$. Die grösste Krümmung entspricht der kleinen Axe der Ellipse, die kleinste der grossen Axe. Auf der rechten Seite der Gleichung (17) ist das Zeichen $+$ zu nehmen, wenn $c_{mr} > 0$, $c_{ms} > 0$, und $-$, wenn $c_{mr} < 0$, $c_{ms} < 0$.

Im Falle 2) giebt es Normalschnitte, für die $c = 0$ ist. Die Spuren dieser Normalschnitte in der Ebene $a_r a_s$ bestimmen sich aus der Gleichung:

$$c_{mr} x^2 + 2 k_{rs} xy + c_{ms} y^2 = 0. \tag{18}$$

Diese Schnitte theilen die Fläche (q_m) derart in zwei Felder, dass in dem einen $c > 0$ und im andern $c < 0$, d. h. dass das eine Feld gegen den Parameter h_m concav, das andere convex gekrümmt ist. Die Indicatrix des ersten Feldes ist

$$c_{mr} x^2 + 2 k_{rs} xy + c_{ms} y^2 = +1,$$

die des zweiten

$$c_{mr} x^2 + 2 k_{rs} xy + c_{ms} y^2 = -1.$$

Diese beiden Hyperbeln haben gemeinschaftliche Asymptoten (18) und gemeinschaftliche Axen, welche die Spuren der Hauptschnitte in der Ebene $a_r a_s$ sind.

Im Falle 3) endlich wird die Krümmung c zu Null, wenn die Spur des Schnittes in der Ebene $a_r a_s$ die doppelte Gerade

$$c_{mr} x^2 + 2 k_{rs} xy + c_{ms} y^2 = 0$$

ist. Für die übrigen Schnitte dagegen hat die Krümmung c dasselbe Vorzeichen, wie c_{mr} und c_{ms}. Alle Schnitte sind gegen h_m concav, wenn $c > 0$ und convex, wenn $c < 0$. Im ersteren Falle repräsentirt die Gleichung der Indicatrix die beiden parallelen Geraden:

$$\left(c_{mr}^{\frac{1}{2}} x + \frac{k_{rs}}{c_{mr}^{\frac{1}{2}}} y - 1\right) \left(c_{mr}^{\frac{1}{2}} x + \frac{k_{rs}}{c_{mr}^{\frac{1}{2}}} y + 1\right) = 0,$$

im zweiten aber die parallelen Geraden:

$$\left[(-c_{mr})^{\frac{1}{2}} x + \frac{k_{rs}}{(-c_{mr})^{\frac{1}{2}}} y - 1\right] \left[(-c_{mr})^{\frac{1}{2}} x + \frac{k_{rs}}{(-c_{mr})^{\frac{1}{2}}} y + 1\right] = 0.$$

91. Um die einem gegebenen Krümmungsradius ϱ' oder einer gegebenen Krümmung c entsprechenden Schnitte zu finden, hat man die folgenden zwei Gleichungen nach x und y aufzulösen:

$$
\left.
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 2xy\cos\Theta &= \pm \frac{1}{c}, \\
c_{mr}x^2 + 2k_{rs}xy + c_{ms}y^2 &= \pm 1;
\end{aligned}
\right\} \qquad (19)
$$

die so gefundenen Werthe von x und y bestimmen in der Ebene $a_r a_s$ diejenigen Punkte, durch welche die Ebenen der gesuchten Schnitte hindurchgehen müssen. Die Gleichungen (19) geben

$$(c - c_{mr})\,x^2 + 2\,(c\cos\Theta - k_{rs})\,xy + (c - c_{ms})\,y^2 = 0$$

als Gleichung der Spuren jener Ebenen in der Ebene $a_r a_s$. Bei den den Hauptkrümmungen entsprechenden Schnitten müssen diese Spuren zusammenfallen, wozu erforderlich ist, dass

$$(c - c_{mr})\,(c - c_{ms}) - (c\cos\Theta - k_{rs})^2 = 0,$$

oder dass:

$$\sin^2\Theta\,.\,c^2 - (c_{mr} + c_{ms} - 2k_{rs}\cos\Theta)\,c + c_{mr}c_{ms} - k^2_{rs} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Hauptkrümmungen. Bezeichnet man dieselben mit C und C', so ist:

$$C + C' = \frac{c_{mr} + c_{ms} - 2k_{rs}\cos\Theta}{\sin^2\Theta}, \qquad (20)$$

$$CC' = \frac{c_{mr}\,c_{ms} - k^2_{rs}}{\sin^2\Theta}. \qquad (21)$$

Die erste dieser beiden Grössen heisst die *sphärische Krümmung der Fläche*, die zweite das *Krümmungsmass der Fläche.*

Mit Hilfe der Formeln (15) lassen sich diese Grössen durch die Coordinatenparameter und deren Derivirte nach den Coordinaten ausdrücken; es wird nämlich:

$$C + C' = \frac{a^2_r\cdot\overline{h_m D_s a_s} + a^2_s\cdot\overline{h_m D_r a_r} - 2\,\overline{a_r a_s}\cdot\overline{h_m D_r a_s}}{h_m\,(a^2_r a^2_s - \overline{a_r a}^2_s)}, \qquad (22)$$

$$CC' = \frac{\overline{h_m D_r a_r}\cdot\overline{h_m D_s a_s} - (\overline{h_m D_r a_s})^2}{h^2_m\,(a^2_r a^2_s - \overline{a_r a}^2_s)}. \qquad (23)$$

Die Gleichungen der Spuren der Hauptschnitte sind:

$$
\left.
\begin{aligned}
(C - c_{mr})\,x + (C\cos\Theta - k_{rs})\,y &= 0, \\
(C' - c_{mr})\,x + (C'\cos\Theta - k_{rs})\,y &= 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (24)
$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Geraden auf einander senkrecht stehen.

Vertauscht man die Coordinaten x, y mit rechtwinkligen x', y' in Bezug auf die Geraden (24) als Axen, so nimmt dadurch die Gleichung (17) der Indicatrix die Form an:

$$Cx'^2 + C'y'^2 = \pm 1;$$

bezeichnet nun φ den Winkel, welchen die Ebene eines beliebigen Normalschnittes mit der Ebene des Schnittes von der Krümmung C bildet, so ergiebt sich für die Krümmung c die Formel

$$c = C \cos^2 \varphi + C' \sin^2 \varphi,$$

welche Euler gefunden hat.

Haben C und C' entgegengesetzte Zeichen, so wird die Krümmung c, welche einem Winkel φ entspricht, dessen Tangente der Bedingung

$$\tan \varphi = \pm \sqrt{-\frac{C}{C'}}$$

genügt, zu Null; und die jenem Werthe von c entsprechenden Spuren in der Ebene $x'\, y'$ werden zu Asymptoten der Indicatrix.

92. Ist die Indicatrix eine Ellipse, so kann es auf der Fläche (q_m) Punkte geben, für welche die Hauptkrümmungen C und C' einander gleich sind; ein solcher Punkt heisst *Nabelpunkt* (umbilicus) oder *Kreispunkt*. In diesem Punkte geht die Indicatrix in einen Kreis über, und die Krümmung c jedes durch diesen Punkt gelegten Normalschnittes ist eine und dieselbe. Der diesen Kreispunkt enthaltende Theil der Fläche (q_m) von zwei unendlich kleinen Dimensionen hat mit einer Kugelfläche Aehnlichkeit, und mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von höherer als der zweiten Ordnung kann man ihn als Theil einer Kugelfläche betrachten, deren Radius gleich dem Krümmungshalbmesser eines der Normalschnitte ist.

Für einen Kreispunkt ist (17) die Gleichung eines Kreises und es ist dann

$$c_{mr} = c_{ms}, \quad k_{rs} = c_{mr} \cos \Theta,$$

was wegen der Formeln (15) die beiden Gleichungen

$$\overline{h_m D_r a_r} : \overline{h_m D_s a_s} : \overline{h_m D_r a_s} = a_r^2 : a_s^2 : \overline{a_r a_s}$$

liefert; aus diesen Gleichungen kann man die Coordinaten q_r, q_s der Kreispunkte ableiten.

93. Nimmt man an, dass die Geschwindigkeit v die Richtung der durch die erste der Gleichungen (24) dargestellten Geraden hat, so sind die in jener Gleichung vorkommenden x und y den Componenten der Verschiebung vdt nach den Richtungen a_r und a_s, d. h. den Grössen $a_r dq_r$ und $a_s dq_s$ proportional; es besteht daher die Differentialgleichung

$$(C - c_{mr})\, a_r dq_r + (C \cos \Theta - k_{rs})\, a_s dq_s = 0$$

zwischen den beiden Coordinaten q_r und q_s, während q_m constant ist.

Das Integral dieser Gleichung, das wir mit

$$F(q_r, q_s) = \alpha \tag{25}$$

bezeichnen (worin α eine Constante), ist die Gleichung einer auf der Fläche (q_m) gelegenen Linie von der Eigenschaft, dass die Tangente in jedem ihrer Punkte (q_r, q_s) die erste der Gleichungen (24) zur Gleichung hat, d. h. dass diese Tangente die Spur eines der Hauptnormalschnitte der Fläche (q_m) im Berührungspunkte ist. Infolge dessen umhüllt die Linie (25) alle in der Ebene $a_r a_s$ liegenden Spuren der ihren verschiedenen Punkten entsprechenden Hauptschnitte. Eine solche Linie nennt man *Krümmungslinie* der Fläche (q_m).

Die zweite der Gleichungen (24) giebt die Differentialgleichnng:

$$(C' - c_{mr})\, a_r dq_r + (C' \cos \Theta - k_{rs})\, a_s dq_s = 0,$$

deren Integral

$$f(q_r, q_s) = \beta$$

(wo β eine Constante ist) eine andere, zur ersten orthogonale Krümmungslinie ist. Man kann somit die Grössen α und β als orthogonale Coordinaten eines Punktes auf der Fläche (q_m) betrachten.

94. Bei der Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen Linie auf der Fläche (q_m) erzeugt die Normale der Fläche in diesem Punkte, oder die Richtung des Parameters h_m, eine geradlinige Fläche. Dieselbe ist im allgemeinen windschief und nur in dem Falle abwickelbar, wenn die Trajectorie des Punktes eine Krümmungslinie ist.

Zum Beweise bestimmen wir die Winkelderivirte des Parameters h_m, d. h. die Winkelgeschwindigkeit seiner Bewegung, die wir mit ω bezeichnen. Die Projection der geometrischen Derivirten $D_t h_m$ auf die Ebene $a_r a_s$ ist gleich der Winkelgeschwindigkeit ω, multiplicirt mit dem Parameter h_m; ihre Richtung ist dieselbe wie die von ω; also ist:

$$h_m a_r \, \omega \cos(\omega a_r) = \overline{a_r D_t h_m} = -\overline{h_m D_t a_r},$$

$$h_m a_s \, \omega \cos(\omega a_s) = \overline{a_s D_t h_m} = -\overline{h_m D_t a_s};$$

nach den Formeln (10) und (15) hat man aber:

$$\overline{h_m D_t a_r} = q'_r \cdot \overline{h_m D_r a_r} + q'_s \cdot \overline{h_m D_s a_r}$$

$$= h_m a_r (c_{mr} x + k_{rs} y) \cdot \frac{v}{\sqrt{\varrho'}},$$

$$\overline{h_m D_t a_s} = q'_r \cdot \overline{h_m D_r a_s} + q'_s \cdot \overline{h_m D_s a_s}$$

$$= h_m a_s (k_{rs} x + c_{ms} y) \cdot \frac{v}{\sqrt{\varrho'}};$$

also

$$\omega \cos(\omega a_r) = -(c_{mr} x + k_{rs} y) \frac{v}{\sqrt{\varrho'}},$$

$$\omega \cos(\omega a_s) = -(k_{rs} x + c_{ms} y) \frac{v}{\sqrt{\varrho'}},$$

was man auch schreiben kann:

$$\omega \cos(\omega a_r) = -\frac{v}{2\sqrt{\varrho'}} \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \quad \omega \cos(\omega a_s) = -\frac{v}{2\sqrt{\varrho'}} \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \tag{26}$$

wenn man setzt:

$$\varpi = c_{mr} x^2 + 2 k_{rs} xy + c_{ms} y^2.$$

Die Formeln (26) zeigen, dass die Projection von ω auf die Ebene $a_r a_s$ dem Differentialparameter der Function ϖ parallel ist. Und da diese Function die linke Seite der Gleichung (17) der Indicatrix ist, so muss ihr Parameter die Normale der Indicatrix im Punkte (x, y) sein; daher ist ω senkrecht zu der Tangente der Indicatrix in diesem Punkte. Die Gerade, welche das Centrum der Indicatrix mit dem Punkte (x, y) verbindet, d. h. die Richtung der Geschwindigkeit v bildet mit der durch dasselbe Centrum gehenden Parallele zu ω im allgemeinen einen gewissen Winkel, der nur dann gleich Null ist, wenn die Geschwindigkeit v die Richtung einer der Axen

der Indicatrix, d. h. die der Tangente an eine der Krümmungslinien hat. Ist dieser Winkel nicht Null, so liegen v und $D_t h_m$, d. h. die Anfangs- und Endgeschwindigkeit von h_m nicht in einer Ebene; deswegen erzeugt h_m, d. h. die Normale der Fläche (q_m), bei seiner Bewegung eine windschiefe Fläche. Hat aber v die Richtung einer der Axen der Indicatrix, so hat ω dieselbe Richtung; in diesem Falle liegen v und $D_t h_m$ in einer Ebene; wenn also der Anfangspunkt des Parameters h_m, d. h. derjenige Punkt, in dem die Normale der Fläche (q_m) errichtet ist, eine der Krümmungslinien beschreibt, so erzeugt diese Normale eine abwickelbare Fläche.

95. Ist das Coordinatensystem der q_1, q_2, q_3 orthogonal, so ist

$$\overline{h_m h_r} = 0, \quad \overline{h_m h_s} = 0, \quad \overline{a_m D_s a_r} = 0$$

und mithin

$$\overline{h_m D_s a_r} = \overline{h_m h_r} \cdot \overline{a_r D_s a_r} + \overline{h_m h_s} \cdot \overline{a_s D_s a_r} + h_m{}^2 \cdot \overline{a_m D_s a_r} = 0;$$

also ist $k_{rs} = 0$, und die Gleichung der Indicatrix nimmt die Form an:

$$c_{mr} x^2 + c_{ms} y^2 = \pm 1.$$

Dieselbe zeigt, dass die Richtungen der Parameter h_r und h_s oder der Coordinatenaxen die Axen der Indicatrix sind; folglich berühren sie die Krümmungslinien in jedem Punkte der Fläche (q_m); daher sind die Coordinatenlinien $(q_r q_m)$ und $(q_s q_m)$ Krümmungslinien der Fläche (q_m). *Wenn also drei Flächen (q_1), (q_2), (q_3) orthogonal sind, so schneiden sich zwei von ihnen mit der dritten in den Krümmungslinien der letzteren.* Diese Eigenschaft eines orthogonalen Systems von Flächen hat Dupin gefunden.*)

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, dass in dem vorliegenden Falle c_{mr} und c_{ms} die Hauptkrümmungen der Fläche (q_m) sind. Die Formeln (15) und (2) geben:

$$c_{mr} = -\frac{h_m}{a_r}\frac{\partial a_r}{\partial q_m}, \quad c_{ms} = -\frac{h_m}{a_s}\frac{\partial a_s}{\partial q_m};$$

da nun

$$a_r = \frac{1}{h_r}, \quad a_s = \frac{1}{h_s},$$

*) Développements de Géométrie. Paris 1813, pag. 239.

so ist:

$$c_{mr} = \frac{h_m}{h_r}\frac{\partial h_r}{\partial q_m}, \quad c_{ms} = \frac{h_m}{h_s}\frac{\partial h_s}{\partial q_m},$$

oder

$$c_{mr} = h_m \frac{\partial \log h_r}{\partial q_m}, \quad c_{ms} = h_m \frac{\partial \log h_s}{\partial q_m}.$$

Diese Ausdrücke der Hauptkrümmungen durch die Parameter in einem orthogonalen Systeme rühren von Lamé her.*)

96. Das System der elliptischen Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3 (s. §. 56) ist ein orthogonales und der Dupin'sche Satz gilt daher für dasselbe; folglich sind die Krümmungslinien des Ellipsoids (λ_1) die Schnittcurven desselben mit den confocalen Hyperboloiden (λ_2) und (λ_3). Die Hauptkrümmungen des Ellipsoids in einem seiner Punkte (λ_2, λ_3) sind:

$$c_{12} = -\frac{h_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}},$$

$$c_{13} = -\frac{h_1}{2(\lambda_1 - \lambda_3)} = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3}\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}}.$$

Da $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, so sind die Grössen c_{12} und c_{13} negativ; folglich ist nach §. 90 die Krümmung c jedes Normalschnittes ebenfalls negativ; daher ist das Ellipsoid in allen seinen Punkten convex nach der Seite des Punktes h_1, d. h. concav nach dem Centrum hin.

Ebenso findet man für die Hauptkrümmungen des einmanteligen Hyperboloids (λ_2):

$$c_{21} = \frac{h_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad c_{23} = -\frac{h_2}{2(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Die erste Krümmung ist positiv, die zweite negativ; deswegen ist das einmantelige Hyperboloid in jedem Punkte convex-concav. Die Krümmung c wird zu Null, wenn die Spur des Normalschnittes in der Tangentenebene mit der Spur des der Krümmung c_{21} entsprechenden Hauptschnittes einen Winkel φ bildet, dessen Tangente durch die Formel

$$\tan\varphi = \pm\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2}}$$

bestimmt ist. Solcher Geraden giebt es zwei; sie sind die geradlinigen Erzeugenden des Hyperboloids (λ_2).

---

*) Leçons sur les coordonnées curvilignes. pag. 51.

Für das zweimantelige Hyperboloid endlich sind die Krümmungen

$$c_{31} = \frac{h_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad c_{32} = \frac{h_3}{2(\lambda_2 - \lambda_3)},$$

also beide positiv; daher ist das Hyperboloid (λ_3) concav nach der Seite des Parameters h_3 und convex nach dem Centrum zu.

Für die Kreispunkte auf dem Ellipsoid (λ_1) muss $c_{12} = c_{13}$ sein, woraus folgt: $\lambda_2 = \lambda_3$. Da nun $-a_2$ zwischen λ_2 und λ_3 liegt (s. §. 56), so muss nothwendig $\lambda_2 = \lambda_3 = -a_2$ sein; folglich liegen die Kreispunkte in der Ebene $y = 0$ und zwar in den Schnittpunkten der Ellipse

$$\frac{x^2}{\lambda_1 + a_1} + \frac{z^2}{\lambda_1 + a_3} = 1$$

mit der Focalhyperbel

$$\frac{x^2}{a_1 - a_2} - \frac{z^2}{a_2 - a_3} = 1.$$

Das einmantelige Hyperboloid kann keine Kreispunkte haben, da c_{21} und c_{23} überall entgegengesetzte Zeichen haben.

Die Kreispunkte auf dem zweimanteligen Hyperboloid (λ_3) sind der Bedingung unterworfen:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -a_3;$$

sie liegen daher in der Ebene $z = 0$, im Schnitte der Focalellipse

$$\frac{x^2}{a_1 - a_3} + \frac{y^2}{a_2 - a_3} = 1$$

mit der Hyperbel

$$\frac{x^2}{\lambda_3 + a_1} + \frac{y^2}{\lambda_3 + a_2} = 1.$$

In dem Werke von Monge: „Application de l'analyse à la Géométrie" findet man eine bildliche Darstellung der Krümmungslinien auf dem Ellipsoid.

Die Krümmung c_3 der Krümmungslinie $(\lambda_1 \lambda_2)$ ist durch die Formel

$$c_3^2 = c_{13}^2 + c_{23}^2 = \frac{h_1^2}{4(\lambda_1 - \lambda_3)^2} + \frac{h_2^2}{4(\lambda_2 - \lambda_3)^2}$$

gegeben (s. §. 89) und die Krümmung c_2 der Krümmungslinie $(\lambda_1 \lambda_3)$ durch die Formel:

$$c_2^2 = c_{12}^2 + c_{32}^2 = \frac{h_1^2}{4(\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{h_3^2}{4(\lambda_2 - \lambda_3)^2}.$$

XI. Capitel.

Projectionen und Componenten der Beschleunigungen verschiedener Ordnungen auf den Coordinatenparametern. — Anwendung auf die Bestimmung der ersten und zweiten Krümmung der Bahn eines beweglichen Punktes.

97. Die Formeln, welche zur Bestimmung der Geschwindigkeit vermittelst deren Projectionen und Componenten auf den Coordinatenparametern dienen (VIII. Capitel), lassen sich auch auf die Beschleunigungen verschiedener Ordnungen ausdehnen.

Es seien:

$$a_1 q_{n,1}\,,\quad a_2 q_{n,2}\,,\quad a_3 q_{n,3}$$

die Componenten der Beschleunigung v_n nach den reciproken Parametern a_1, a_2, a_3 und

$$\frac{1}{a_1} p_{n,1}\,,\quad \frac{1}{a_2} p_{n,2}\,,\quad \frac{1}{a_3} p_{n,3}$$

die Projectionen von v_n auf dieselben Parameter. Die aus den drei ersteren Grössen gebildete quadratische Form

$$T_n = \tfrac{1}{2} \Sigma \overline{a_r a_s}\, q_{n,r}\, q_{n,s}\,, \tag{1}$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf die Indices $r = 1, 2, 3$, $s = 1, 2, 3$ bezieht, ist gleich $\frac{1}{2} v_n^2$, d. h. gleich der Hälfte des Quadrats der Beschleunigung v_n; wir wollen diese Grösse die Energie $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nennen. Dieselbe lässt sich auch durch die conjugirte quadratische Form

$$\mathrm{T}_n = \tfrac{1}{2} \Sigma \overline{h_r h_s}\, p_{n,r}\, p_{n,s} \tag{2}$$

darstellen, wobei die Relationen bestehen:

$$p_{n,r} = \frac{\partial T_n}{\partial q_{n,r}}\,,\quad q_{n,r} = \frac{\partial \mathrm{T}_n}{\partial p_{n,r}}\,.$$

Also ist

$$\tfrac{1}{2} v_n^2 = T_n = \mathrm{T}_n\,,$$

woraus sich für die Beschleunigung der Werth $v_n = \sqrt{2\,T_n} = \sqrt{2\mathrm{T}_n}$ als eine Function der Grössen $q_{n,r}$ oder $p_{n,r}$ ergiebt.

Die Grössen

$$\frac{1}{h_1} q_{n,1}\,,\quad \frac{1}{h_2} q_{n,2}\,,\quad \frac{1}{h_3} q_{n,3}$$

sind die Projectionen der Beschleunigung v_n auf die directen Parameter h_1, h_2, h_3 und

$$h_1 p_{n,1}\,,\quad h_2 p_{n,2}\,,\quad h_3 p_{n,3}$$

sind die Componenten derselben nach diesen Parametern. Somit bestimmt jede der Formeln (1) und (2) die Grösse der Beschleunigung v_n, während die Formeln

$$v_n \cos(v_n a_r) = \frac{1}{a_r} p_{n,r} = \frac{1}{a_r} \frac{\partial T_n}{\partial q_{n,r}}, \qquad (3)$$
$$v_n \cos(v_n h_r) = \frac{1}{h_r} q_{n,r} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial T_n}{\partial p_{n,r}}$$

ihre Richtung bestimmen.

98. Es ist nicht schwer, Formeln für die succesive Berechnung der Grössen

$$p_{1,m},\ p_{2,m}, \ldots\ p_{n,m}, \ldots .$$
$$q_{1,m},\ q_{2,m}, \ldots\ q_{n,m}, \ldots .$$

aufzustellen.

Die Formel für die Differentiation eines geometrischen Productes giebt:

$$\overline{a_m v_{n+1}} = \frac{d\,\overline{a_m v_n}}{dt} - \overline{v_n D_t a_m},$$

d. h.

$$p_{n+1,m} = \frac{d\,p_{n,m}}{dt} - \sum_r q_{n,r} \cdot \overline{a_r D_t a_m}; \qquad (4)$$

es ist aber:

$$p_{n,m} = \frac{\partial T_n}{\partial q_{n,m}} = \sum_r \overline{a_m a_r} \cdot q_{n,r}$$

und daher:

$$\frac{d\,p_{n,m}}{dt} = \sum_r \overline{a_m a_r} \cdot q'_{n,r} + \sum_r q_{n,r} (\overline{a_m D_t a_r} + \overline{a_r D_t a_m});$$

folglich wird

$$p_{n+1,m} = \sum_r \overline{a_m a_r} \cdot q'_{n,r} + \sum_r q_{n,r} \cdot \overline{a_m D_t a_r}, \qquad (5)$$

oder, mit Berücksichtigung der Formeln (6) im X. Capitel:

$$p_{n+1,m} = \sum_r \overline{a_m a_r} \cdot q'_{n,r} + \sum_r q_{n,r} \sum_i (irm) q'_i. \qquad (6)$$

Nach dieser Formel lassen sich die Grössen $p_{n+1,1}$, $p_{n+1,2}$, $p_{n+1,3}$, durch welche die Projectionen der Beschleunigung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung auf die reciproken Parameter bestimmt sind, berechnen, wenn man die Grössen $q_{n,1}$, $q_{n,2}$, $q_{n,3}$, welche die Componenten der Beschleunigung n^{ter} Ordnung nach denselben Parametern bestimmen, und die ersten Derivirten der Coordinaten nach der Zeit q'_1, q'_2, q'_3 kennt, welche die Com-

ponenten der Geschwindigkeit nach den reciproken Parametern bestimmen. Für die Beschleunigung erster Ordnung v_1 ergiebt sich aus Formel (6):

$$p_{1,m} = \sum_r \overline{a_m a_r} \cdot q_r'' + \sum_r \sum_i (irm) q'_i q'_r. \qquad (7)$$

Für $q_{n+1,m}$ kann man eine ähnliche Formel wie (6) erhalten.

Da nämlich

$$\overline{h_m v_{n+1}} = \frac{d\overline{h_m v_n}}{dt} - \overline{v_n D_t h_m},$$

so ist

$$q_{n+1,m} = \frac{dq_{n,m}}{dt} - \overline{v_n D_t h_m}; \qquad (8)$$

es ist aber

$$\overline{v_n D_t h_m} = \sum_r q_{n,r} \overline{a_r D_t h_m} = -\sum_r q_{n,r} \cdot \overline{h_m D_t a_r};$$

folglich hat man nach Formel (8):

$$q_{n+1,m} = q'_{n,m} + \sum_r q_{n,r} \cdot \overline{h_m D_t a_r}, \qquad (9)$$

wo $\overline{h_m D_t a_r}$ eine lineare Function der Derivirten q'_1, q'_2, q'_3 ist [s. Formel (10), X. Capitel]. Auch ist es leicht, $q_{n+1,m}$ vermittelst der Grössen $p_{n,m}$ auszudrücken. Da nämlich

$$q_{n,m} = \sum_r \overline{h_m h_r} p_{n,r}, \quad \overline{v_n D_t h_m} = \sum_r p_{n,r} \cdot \overline{h_r D_t h_m},$$

so lässt sich Formel (9) auch schreiben:

$$q_{n+1,m} = \sum_r \overline{h_m h_r} \cdot p'_{n,r} + \sum_r p_{n,r} \cdot \overline{h_m D_t h_r}, \qquad (10)$$

wo $\overline{h_m D_t h_r}$ nach Formel (11) im X. Capitel eine lineare Function der Derivirten q'_1, q'_2, q'_3 ist.

99. Die Formeln (6) und (10) lassen sich in anderer Gestalt darstellen, die sich leichter dem Gedächtniss einprägt. Für die Beschleunigung erster Ordnung hat man

$$p_{1,m} = p'_m - \overline{v D_t a_m},$$

während Formel (3) des X. Capitels ergiebt:

$$\overline{D_t a_m} = \overline{D_m v};$$

also ist:

$$\overline{v D_t a_m} = \overline{v D_m v} = \frac{v \partial v}{\partial q_m} = \frac{\partial T}{\partial q_m}.$$

Nach §. 83 hat man hier bei der Differentiation von T nach q_m die übrigen Coordinaten und die Derivirten aller drei Coordinaten nach der Zeit, d. h. q'_1, q'_2, q'_3, als constant anzusehen. Also ist

$$p_{1,m} = p'_m - \frac{\partial T}{\partial q_m} . \qquad (11)$$

Nach Formel (7) hat man:

$$\frac{\partial p_{1,m}}{\partial q'_r} = 2 \sum_i (irm)\, q'_i = 2 \overline{a_m D_t a_r};$$

folglich

$$\overline{a_r D_t a_m} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial p_{1,r}}{\partial q'_m};$$

hiermit kann die Formel (4) für $n = 1$ geschrieben werden:

$$p_{2,m} = p'_{1,m} - \tfrac{1}{2} \sum_r q_{1,r} \frac{\partial p_{1,r}}{\partial q'_m} .$$

Da aber

$$q_{1,r} = \frac{\partial T_1}{\partial p_{1,r}},$$

so ist:

$$\sum_r q_{1,r} \frac{\partial p_{1,r}}{\partial q'_m} = \sum_r \frac{\partial T_1}{\partial p_{1,r}} \frac{\partial p_{1,r}}{\partial q'_m} = \frac{\partial T_1}{\partial q'_m};$$

also

$$p_{2,m} = p'_{1,m} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} . \qquad (12)$$

In der Abhandlung: „Sur les accélérations de divers ordres“*) hat der Verfasser gezeigt, dass allgemein

$$p_{n,m} = p'_{n-1,m} - \frac{1}{n} \frac{\partial T_{n-1}}{\partial q_m^{(n-1)}};$$

für $n > 2$ kann man jedoch diese Formel durch eine für die Berechnung bequemere ersetzen. Aus Formel (5) folgt für $n \geqq 1$

$$\overline{a_m D_t a_r} = \frac{\partial p_{n+1,m}}{\partial q_{n,r}},$$

und man hat folglich für $n > 1$:

$$\overline{a_r D_t a_m} = \frac{\partial p_{n,r}}{\partial q_{n-1,m}};$$

wodurch der Ausdruck (4) übergeht in

$$p_{n+1,m} = p'_{n,m} - \sum_r q_{n,r} \frac{\partial p_{n,r}}{\partial q_{n-1,m}}:$$

---

*) Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg, VII[me] série, T. VIII, No. 5.

es ist aber:

$$\sum_r q_{n,r} \frac{\partial p_{n,r}}{\partial q_{n-1,m}} = \sum_r \frac{\partial \mathrm{T}_n}{\partial p_{n,r}} \frac{\partial p_{n,r}}{\partial q_{n-1,m}} = \frac{\partial T_n}{\partial q_{n-1,m}};$$

folglich wird:

$$p_{n+1,m} = p'_{n,m} - \frac{\partial T_n}{\partial q_{n-1,m}}, \quad \text{für } n > 1. \tag{13}$$

Auf ähnliche Weise lässt sich leicht beweisen, dass

$$q_{n+1,m} = q'_{n,m} - \frac{\partial \mathrm{T}_n}{\partial p_{n-1,m}}, \quad \text{für } n \geq 1. \tag{14}$$

Für $n = 1$ ist:

$$q_{2,m} = q'_{1,m} - \frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial p_m}. \tag{15}$$

In die Formel (11) kann man statt T die ihm conjugirte Form T einführen. Hierzu beachte man, dass nach der bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen

$$2T = \sum_r q'_r p_r$$

ist; daraus folgt:

$$2\frac{\partial T}{\partial q_m} = \sum_r q'_r \frac{\partial p_r}{\partial q_m} = \sum_r \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial q_m};$$

nun ist aber:

$$\frac{\partial T}{\partial q_m} = \sum_r \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial q_m} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_m}.$$

Subtrahirt man dies von dem vorigen, so folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial q_m} = -\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_m},$$

und daher lässt sich die Formel (11) durch die folgende ersetzen:

$$p_{1,m} = p'_m + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_m}. \tag{16}$$

Nach Formel (11) ist $p_{1,m}$ eine Function von den Coordinaten und deren Derivirten erster und zweiter Ordnung nach der Zeit; nach Formel (16) aber ist dieselbe Grösse als Function der Coordinaten, der Grössen p_1, p_2, p_3 und der Derivirten p'_m ausgedrückt.

100. Mit Hilfe der in den vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Formeln lassen sich die allgemeinsten Ausdrücke

für alle Grössen ableiten, die auf die Bestimmung der ersten und zweiten Krümmung einer Curve Bezug haben, deren Punkte durch irgend welche krummlinige Coordinaten bestimmt sind.

Die Projectionen der Beschleunigung erster Ordnung v_1 auf die Tangente und auf die erste Hauptnormale sind: $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{v^2}{\varrho}$, wo ϱ den Radius der ersten Krümmung bedeutet; daher ist:

$$v_1^2 = \frac{v^4}{\varrho^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 .$$

Führt man hier statt der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung v_1 die Energie erster und zweiter Ordnung $\frac{1}{2}v^2 = T$ und $\frac{1}{2}v_1^2 = T_1$ ein, so ergiebt sich:

$$4TT_1 = \frac{(2T)^3}{\varrho^2} + \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 ;$$

hieraus erhält man für den Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{(2T)^{\frac{3}{2}}}{\left[4TT_1 - \left(\frac{dT}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{17}$$

wo statt T und T_1 die quadratischen Functionen zu setzen sind:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{a_r a_s}\, q'_r q'_s, \quad T_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{a_r a_s}\, q_{1,r}\, q_{1,s}.$$

Somit ist der Radius der ersten Krümmung als Function der Coordinaten, der Derivirten erster Ordnung derselben nach der Zeit und der Grösse $q_{1,r}$ dargestellt, welche letztere ausser den vorhergehenden noch die Derivirten zweiter Ordnung q''_r enthalten. Man kann, indem man wie im §. 29 verfährt, noch zwei weitere Ausdrücke für ϱ erhalten.

Aus der Formel

$$\frac{v^3}{\varrho} = vv_1 \sin(vv_1)$$

leitet man ab:

$$\frac{v^6}{\varrho^2} = v^2 v_1^2 - v^2 v_1^2 \cos^2(vv_1) = \begin{vmatrix} v^2 & \overline{vv_1} \\ \overline{vv_1} & v_1^2 \end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{(2T)^3}{\varrho^2} = \begin{vmatrix} \sum_r p_r q'_r, & {}_r p_{1,r} q'_r \\ {}_r p_r q_{1,r}, & \sum_r p_{1,r} q_{1,r} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_{12} & p_{13} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q'_2 & q'_3 \\ q_{12} & q_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_{13} & p_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q'_3 & q'_1 \\ q_{31} & q_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_{11} & p_{12} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_{11} & q_{12} \end{vmatrix};$$

es ist aber:

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_{12} & p_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_r \overline{a_2 a_r} q'_r, & \sum_r \overline{a_3 a_r} q'_r \\ \sum_r \overline{a_2 a_r} q_{1,r}, & \sum_r \overline{a_3 a_r} q_{1,r} \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{a_2 a_2}, & \overline{a_2 a_3} \\ \overline{a_3 a_2}, & \overline{a_3 a_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q'_2 & q'_3 \\ q_{12} & q_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{a_2 a_3}, & \overline{a_2 a_1} \\ \overline{a_3 a_3}, & \overline{a_3 a_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q'_3 & q'_1 \\ q_{13} & q_{11} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \overline{a_2 a_1}, & \overline{a_2 a_2} \\ \overline{a_3 a_1}, & \overline{a_3 a_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q'_1 & q'_2 \\ q_{11} & q_{12} \end{vmatrix},$$

wo man nach §. 66 hat:

$$\begin{vmatrix} \overline{a_2 a_2}, & \overline{a_2 a_3} \\ \overline{a_3 a_2}, & \overline{a_3 a_3} \end{vmatrix} = a_2^2 a_3^2 (1 - \alpha_1^2) = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \Delta \overline{h_1 h_1},$$

$$\begin{vmatrix} \overline{a_2 a_3}, & \overline{a_2 a_1} \\ \overline{a_3 a_3}, & \overline{a_3 a_1} \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3^2 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3) = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \Delta \overline{h_1 h_2},$$

$$\begin{vmatrix} \overline{a_2 a_1}, & \overline{a_2 a_2} \\ \overline{a_3 a_1}, & \overline{a_3 a_2} \end{vmatrix} = a_1 a_2^2 a_3 (\alpha_3 \alpha_1 - \alpha_2) = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \Delta \overline{h_1 h_3};$$

setzt man daher:

$$\begin{vmatrix} q'_2 & q'_3 \\ q_{12} & q_{13} \end{vmatrix} = Q_1, \quad \begin{vmatrix} q'_3 & q'_1 \\ q_{31} & q_{11} \end{vmatrix} = Q_2, \quad \begin{vmatrix} q'_1 & q'_2 \\ q_{11} & q_{12} \end{vmatrix} = Q_3 \quad (18)$$

und

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 \Delta = A,$$

so folgt:

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_{12} & p_{13} \end{vmatrix} = A(\overline{h_1 h_1} Q_1 + \overline{h_1 h_2} Q_2 + \overline{h_1 h_3} Q_3);$$

ebenso findet man:

$$\begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_{13} & p_{11} \end{vmatrix} = A(\overline{h_2 h_1} Q_1 + \overline{h_2 h_2} Q_2 + \overline{h_2 h_3} Q_3),$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_{11} & p_{12} \end{vmatrix} = A(\overline{h_3 h_1} Q_1 + \overline{h_3 h_2} Q_2 + \overline{h_3 h_3} Q_3);$$

mithin wird:

$$\frac{(2\,T)^3}{\varrho^2} = A\,\Sigma\,\overline{h_r h_s}\,Q_r Q_s,$$

woraus folgt:

$$\varrho = \frac{(2\,T)^{\frac{3}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}\,(\Sigma\,\overline{h_r h_s}\,Q_r Q_s)^{\frac{1}{2}}}. \tag{19}$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$\varrho = \frac{(2\,T)^{\frac{3}{2}}}{H^{\frac{1}{2}}\,(\Sigma\,\overline{a_r a_s}\,P_r P_s)^{\frac{1}{2}}}, \tag{20}$$

wo $H = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \Delta'$ und

$$P_1 = \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_{12} & p_{13} \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_{13} & p_{11} \end{vmatrix}, \quad P_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_{11} & p_{12} \end{vmatrix}.$$

101. Wir wollen nun die Formeln für die Cosinus der Winkel ableiten, welche die Richtung von ϱ, d. h. die erste Hauptnormale, mit den reciproken und directen Parametern bildet.

Da

$$\overline{a_m v_1} = p_{1,m} \text{ und } \bar{v}_1 = \frac{\bar{v}^2}{\varrho} + \frac{\overline{dv}}{dt},$$

so ist

$$a_m \frac{v^2}{\varrho} \cos(\varrho a_m) + a_m \frac{dv}{dt} \cos(v a_m) = p_{1,m}$$

und

$$a_m \frac{v^3}{\varrho} \cos(\varrho a_m) + p_m \frac{dv}{dt} = v p_{1,m};$$

hieraus folgt mit Berücksichtigung der Formel (17), wenn man $v = \sqrt{2\,T}$ einsetzt:

$$\cos(\varrho a_m) = \frac{2\,T p_{1,m} - p_m \dfrac{dT}{dt}}{a_m (2\,T)^{\frac{1}{2}} \left[4\,T T_1 - \left(\dfrac{dT}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Hierin ist:

$$p_{1,m} = \frac{\partial T_1}{\partial q_{1,m}} \text{ und } \frac{dT}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{dt} = \sum_r \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_r} q'_r + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} p'_r\right).$$

Da aber $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} = q'_r$, so ist:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_r \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_r} + p'_r\right) q'_r.$$

Nach Formel (16) ist aber $\frac{\partial T}{\partial q_r} + p'_r = p_{1,r}$; folglich wird

$$\frac{dT}{dt} = \sum_r q'_r p_{1,r};$$

hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\partial \frac{dT}{dt}}{\partial q_{1,m}} = \sum_r q'_r \frac{\partial p_{1,r}}{\partial q_{1,m}}.$$

Nun ist aber $\frac{\partial p_{1,r}}{\partial q_{1,m}} = \overline{a_r a_m}$, also ist:

$$\frac{\partial \frac{dT}{dt}}{\partial q_{1,m}} = \sum_r \overline{a_r a_m} q'_r = p_m;$$

folglich:

$$2Tp_{1,m} - p_m \frac{dT}{dt} = 2T \frac{\partial T_1}{\partial q_{1,m}} - \frac{\partial \frac{dT}{dt}}{\partial q_{1,m}} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial \left[4TT_1 - \left(\frac{dT}{dt}\right)^2\right]}{\partial q_{1,m}}$$

und

$$\cos(\varrho a_m) = \frac{1}{a_m (2T)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \left[4TT_1 - \left(\frac{dT}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\partial q_{1,m}} = \frac{2T}{a_m} \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial q_{1,m}},$$

oder, nach Formel (19):

$$\cos(\varrho a_m) = \frac{1}{a_m} \left(\frac{A}{2T}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Sigma \overline{h_r h_s} Q_r Q_s}{\partial q_{1,m}}.$$

Setzt man hierin $m = 1, 2, 3$, so ergeben sich die Cosinus der drei Winkel, welche die Richtung des Radius der ersten Krümmung mit den Richtungen der reciproken Parameter bildet.

Auf dieselbe Weise kann man Ausdrücke für die Cosinus derjenigen Winkel finden, welche die Richtung von ϱ mit den directen Parametern h_1, h_2, h_3 bildet. Man erhält dafür die allgemeine Formel:

$$\cos(\varrho h_m) = \frac{2T}{h_m} \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial p_{1,m}} = \frac{1}{h_m} \left(\frac{H}{2T}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Sigma \overline{a_r a_s} P_r P_s}{\partial p_{1,m}}.$$

Die Grössen Q_1, Q_2, Q_3 (Gleichung 18) genügen den Bedingungsgleichungen:

$$q'_1 Q_1 + q'_2 Q_2 + q'_3 Q_3 = 0,$$

$$q_{11} Q_1 + q_{12} Q_2 + q_{13} Q_3 = 0,$$

welche ausdrücken, dass diejenige Strecke, deren Projectionen auf die Axen a_1, a_2, a_3 gleich

$$\frac{1}{a_1} A^{\frac{1}{2}} Q_1, \ \frac{1}{a_2} A^{\frac{1}{2}} Q_2, \ \frac{1}{a_3} A^{\frac{1}{2}} Q_3 \tag{21}$$

sind, auf der Geschwindigkeit v und auf der Beschleunigung v_1 senkrecht steht. Diese Strecke hat, wie aus Formel (19) ersichtlich, die Länge $\frac{v^3}{\varrho}$ und ist dem Inhalt des über v und v_1 als Seiten construirten Parallelogramms gleich. Ein Beobachter, der in der Richtung der Geschwindigkeit v steht und auf den Mittelpunkt der ersten Krümmung hinschaut, hat die Richtung der fraglichen Strecke zur rechten Seite. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur die vorstehenden Formeln auf ein geradliniges, rechtwinkliges Coordinatensystem anzuwenden.

102. Wir wollen nun noch die allgemeinen Ausdrücke für den Radius r der zweiten Krümmung und für die Cosinus der von ihm mit den directen und reciproken Coordinaten-Parametern gebildeten Winkel ableiten.

Bezeichnet man die Projectionen von r auf die reciproken Parameter mit $\frac{1}{a_1} R_1$, $\frac{1}{a_2} R_2$, $\frac{1}{a_3} R_3$, so hat man, weil r auf v und v_1 senkrecht steht:

$$q'_1 R_1 + q'_2 R_2 + q'_3 R_3 = 0,$$
$$q_{11} R_1 + q_{12} R_2 + q_{13} R_3 = 0;$$

nach der Formel (10) §. 28 für die Projection der Beschleunigung zweiter Ordnung v_2 auf r ergiebt sich ferner:

$$q_{21} R_1 + q_{22} R_2 + q_{23} R_3 = \frac{v^3}{\varrho}.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$R_1 = \frac{v^3 Q_1}{\varrho D}, \ R_2 = \frac{v^3 Q_2}{\varrho D}, \ R_3 = \frac{v^3 Q_3}{\varrho D}, \tag{22}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} q'_1 & q'_2 & q'_3 \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{vmatrix} = Q_1 q_{21} + Q_2 q_{22} + Q_3 q_{23}.$$

Die Formel, welche das Quadrat irgend einer Strecke

durch ihre Projectionen auf die Coordinatenaxen ausdrückt, giebt:

$$r^2 = \Sigma \overline{h_k h_i} R_k R_i;$$

hieraus folgt mit Beachtung der Formeln (22) und (19):

$$r^2 = \frac{v^6}{\varrho^2 D^2} \Sigma \overline{h_k h_i} \, Q_k Q_i = \frac{A}{D^2} (\Sigma \overline{h_k h_i} \, Q_k Q_i)^2$$

und folglich:

$$r = \pm \frac{A^{\frac{1}{2}}}{D} \Sigma \overline{h_k h_i} Q_k Q_i, \tag{23}$$

wo das Zeichen $+$ zu nehmen ist, wenn $D > 0$, und —, wenn $D < 0$. Im ersteren Falle haben R_1, R_2, R_3, wie aus den Formeln (22) ersichtlich, dieselben Vorzeichen, wie die Grössen (21), im letzteren aber die entgegengesetzten. Daher hat der Radius der zweiten Krümmung für $D > 0$ dieselbe Richtung, wie diejenige Strecke, deren Projectionen auf die Coordinatenaxen die Grössen (21) sind, im Falle $D < 0$ aber hat er die entgegengesetzte Richtung. Folglich hat im ersten Falle die Ebene der ersten Krümmung eine positive Drehung um die Richtung der Geschwindigkeit, im zweiten aber eine negative.

Aus den Formeln (22) und (23) lassen sich Ausdrücke für die Cosinus der von der Richtung von r mit den reciproken Parametern gebildeten Winkel ableiten. Man findet nämlich die allgemeine Formel:

$$\cos (r a_m) = \pm \frac{Q_m}{a_m (\Sigma \overline{h_k h_i} \, Q_k Q_i)^{\frac{1}{2}}}. \tag{24}$$

Da nun

$$\frac{1}{h_m} (\overline{h_m h_1} \cdot R_1 + \overline{h_m h_2} \cdot R_2 + \overline{h_m h_3} \cdot R_3)$$

die Projection von r auf den directen Differentialparameter h_m ist, so wird

$$\cos (r h_m) = \frac{1}{r h_m} (\overline{h_m h_1} \cdot R_1 + \overline{h_m h_2} \cdot R_2 + \overline{h_m h_3} \cdot R_3),$$

was mit Hilfe der Formeln (22) und (23) auf den folgenden allgemeinen Ausdruck der Cosinus der von der Richtung von r mit den directen Parametern gebildeten Winkel führt:

$$\cos (r h_m) = \pm \frac{\Sigma \overline{h_m h_i} \, Q_i}{h_m (\Sigma \overline{h_k h_i} \cdot Q_k Q_i)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{1}{h_m} \frac{\partial (\Sigma \overline{h_k h_i} \, Q_k Q_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial Q_m}. \tag{25}$$

Man sieht leicht, dass:

$$Q_m = H(\overline{a_m a_1} \cdot P_1 + \overline{a_m a_2} \cdot P_2 + \overline{a_m a_3} \cdot P_3)$$

und

$$A \Sigma \overline{h_k h_i} \cdot Q_k Q_i = H \Sigma \overline{a_k a_i} \cdot P_k P_i,$$

so dass sich die Formeln (24) und (25) auch in die folgenden umformen lassen:

$$\cos(r a_m) = \pm \frac{\Sigma \overline{a_m a_i} \cdot P_i}{a_m (\Sigma \overline{a_m a_i} \cdot P_k P_i)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{1}{a_m} \frac{\partial (\Sigma \overline{a_k a_i} \cdot P_k P_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial P_m},$$

$$\cos(r h_m) = \pm \frac{P_m}{a_m (\Sigma \overline{a_k a_i}\, P_k P_i)^{\frac{1}{2}}}.$$

103. Sind die Coordinaten eines Curvenpunktes als explicite Functionen einer einzigen Veränderlichen gegeben, die als die Zeit betrachtet werden kann, so bietet die Anwendung der obigen Formeln auf specielle Fälle keine Schwierigkeit dar.

Die Gleichungen der Curve seien von der Form:

$$\varphi(q_1, q_2, q_3) = 0, \quad \psi(q_1, q_2, q_3) = 0;$$

dann kann man mit Hilfe dieser Gleichungen und ihrer Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0$$

die Grössen: $q'_m, p_m, q_{1,m}, p_{1,m}, q_{2,m}, p_{2,m}$ eliminiren; dadurch kommen statt dieser Grössen die partiellen Derivirten erster, zweiter und dritter Ordnung der Functionen φ und ψ nach den Coordineten q_1, q_2, q_3 in die Ausdrücke. Diese Elimination lässt sich folgendermassen bewirken.

Setzt man $\frac{\partial \varphi}{\partial q_m} = \varphi_m$, $\frac{\partial \psi}{\partial q_m} = \psi_m$, so erhält man wegen $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{d\psi}{dt} = 0$ die Relationen

$$\varphi_1 q'_1 + \varphi_2 q'_2 + \varphi_3 q'_3 = 0, \quad \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \psi_3 q'_3 = 0,$$

woraus folgt:

$$q'_1 : q'_2 : q'_3 = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_1 \\ \psi_3 & \psi_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix};$$

setzt man also

$$\begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = \Theta_1, \quad \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_1 \\ \psi_3 & \psi_1 \end{vmatrix} = \Theta_2, \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} = \Theta_3,$$

so ist

$$q'_1 = k\Theta_1, \quad q'_2 = k\Theta_2, \quad q'_3 = k\Theta_3, \tag{a}$$

wobei k einen beliebigen constanten oder veränderlichen Werth haben darf, da man für eine der Coordinaten eine beliebige Function der Zeit wählen kann.*) Indem man nun die Relationen (a) noch zweimal nach t differentiirt und jedesmal mit Hilfe derselben Relationen die Derivirten q'_1, q'_2, q'_3 eliminirt, gelangt man zu Ausdrücken für q_1'', q_2'', q_3'', q_1''', q_2''', q_3''' als Functionen der Coordinaten. Hierauf lassen sich die Grössen p_m, $p_{1,m}$, $q_{1,m}$, $p_{2,m}$, $q_{2,m}$ als Functionen der Coordinaten ausdrücken, und mit Hilfe dieser Grössen kann man endlich nach den Formeln der vorigen Paragraphen alle, auf die Bestimmung der ersten und zweiten Krümmung bezüglichen Grössen als Functionen der Coordinaten darstellen. Eine passende Wahl des Factors k erleichtert häufig die Elimination der Grössen q_m', $q_m''q_m'''$.

Wir empfehlen die dargelegte Methode auf folgende Specialfälle anzuwenden:

1) auf den Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung, deren Gleichungen in geradlinigen Coordinaten x, y, z sind:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0, \quad \alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 + \delta' = 0;$$

2) auf den Schnitt zweier Cylinder zweiter Ordnung:

$$q_1^2 + q_2^2 = m, \quad q_1^2 + q_3^2 = n,$$

wo q_1, q_2, q_3 die Abstände der Curvenpunkte von drei gegebenen, sich in einem Punkte schneidenden Ebenen sind;

3) auf den Durchschnitt eines Ellipsoids mit einer ihm concentrischen Kugel, wobei sich elliptische Coordinaten anwenden lassen.

104. Mit Hilfe der Formeln des §. 98 lassen sich allgemeine Ausdrücke für die Projectionen der Sehne, die den von dem Punkte in irgend einer Zeit durchlaufenen Weg unter-

---

*) Man wähle für k einen beliebigen Werth und eliminire aus den Gleichungen $q'_1 = k\Theta_1$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ die beiden Coordinaten q_2 und q_3; dadurch erhält man eine Gleichung von der Form $q'_1 = f(q_1)$, welche diejenige Function der Zeit bestimmt, die man für q_1 wählen muss, damit k den angenommenen Werth habe.

spannt, auf die directen und reciproken Parameter aufstellen. Bedeutet w die Sehne des vom Punkte in der auf t folgenden Zeit τ durchlaufenen Weges, so hat man nach der Formel des §. 30:

$$w \cos(w a_m) =$$
$$\frac{1}{a_m}\left[p_m \tau + p_{1,m}\frac{\tau^2}{2} + p_{2,m}\frac{\tau^3}{2.3} + \cdots + p_{n,m}\frac{\tau^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \cdots\right]$$
$$w \cos(w h_m) =$$
$$\frac{1}{h_m}\left[q'_m \tau + q_{1,m}\frac{\tau^2}{2} + q_{2,m}\frac{\tau^3}{2.3} + \cdots + q_{n,m}\frac{\tau^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \cdots\right]$$

wo p_m, $p_{1,m}\ldots$, $q_{1,m}$, $q_{2,m}\ldots$ nach den Formeln des §. 98 zu berechnen sind. Durch die Projectionen der Sehne w auf die directen und reciproken Parameter bestimmt sich aber die Lage des beweglichen Punktes zur Zeit $t+\tau$. Wir empfehlen diese Formeln auf Polarcoordinaten anzuwenden.

105. Wir wollen nun die Formeln des §. 98 für ein rechtwinkliges Coordinatensystem entwickeln, und die wichtigsten, sich aus ihnen ergebenden Folgerungen untersuchen. Die Bedingung der Orthogonalität der Coordinaten q_1, q_2, q_3 ist dadurch ausgedrückt, dass $\overline{a_r a_s} = 0$, wenn r nicht gleich s ist, und dass $a_r = \frac{1}{h_r}$. Man hat in diesem Falle (s. §. 85)

$$(rsr) = \overline{a_r D_s a_r} = -\frac{1}{h_r^3}\frac{\partial h_r}{\partial q_s}$$
$$(rrr) = \overline{a_r D_r a_r} = -\frac{1}{h_r^3}\frac{\partial h_r}{\partial q_r}$$
$$(rrm) = \overline{a_m D_r a_r} = \frac{1}{h_r^3}\frac{\partial h_r}{\partial q_m}$$
$$(rsm) = a_m D_s a_r = 0;$$

dadurch erhält man aus Formel (7):

$$p_{1,m} = \frac{1}{h_m^2} q''_m - \frac{1}{h_m^3}\frac{\partial h_m}{\partial q_m} q'^2_m + \frac{1}{h_r^3}\frac{\partial h_r}{\partial q_m} q'^2_r + \frac{1}{h_s^3}\frac{\partial h_s}{\partial q_m} q'^2_s$$
$$- \frac{2}{h_m^3}\frac{\partial h_m}{\partial q_r} q'_r q'_m - \frac{2}{h_m^3}\frac{\partial h_m}{\partial q_s} q'_s q'_m, \qquad (26)$$

was auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$p_{1,m} = \frac{d\left(\frac{1}{h^2_m} q'_m\right)}{dt} + \frac{1}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_m} q'^2_1 + \frac{1}{h_2^3}\frac{\partial h_2}{\partial q_m} q'^2_2$$
$$+ \frac{1}{h_3^3}\frac{\partial h_3}{\partial q_m} q'^2_3 . \qquad (27)$$

Dies lässt sich direct aus Formel (11) ableiten, indem man darin setzt:

$$p_m = \frac{1}{h_m^2} q'_m \text{ und } T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1^2} q'^2_1 + \frac{1}{h_2^2} q'^2_2 + \frac{1}{h_3^2} q'^2_3\right).$$

Aus Formel (26) folgt:

$$h_m p_{1,m} = \frac{d\left(\frac{1}{h_m} q'_m\right)}{dt} + \frac{h_m}{h_r}\frac{\partial h_r}{\partial q_m}\left(\frac{q'_r}{h_r}\right)^2 + \frac{h_m}{h_s}\frac{\partial h_s}{\partial q_m}\left(\frac{q'_s}{h_s}\right)^2$$

$$- \frac{h_r}{h_m}\frac{\partial h_m}{\partial q_r}\left(\frac{q'_r}{h_r}\right)\left(\frac{q'_m}{h_m}\right) - \frac{h_s}{h_m}\frac{\partial h_m}{\partial q_s}\left(\frac{q'_s}{h_s}\right)\left(\frac{q'_m}{h_m}\right); \quad (28)$$

hierin ist $\frac{1}{h_m} q'_m$ die Projection der Geschwindigkeit v und $h_m p_{1,m}$ die Projection der Beschleunigung v_1 auf den Parameter h_m; ferner ist $\frac{h_m}{h_r}\frac{\partial h_r}{\partial q_m}$ (s. §. 95) die Hauptkrümmung $c_{m,r}$ der Fläche (q_m), welche Krümmung zu dem Schnitt dieser Fläche mit der Ebene der Parameter h_m und h_r gehört. Setzt man daher $\frac{1}{h_m} q'_m = u_m$, so erhält man nach Formel (28) allgemein;

$$v_1 \cos(v_1 h_m) = \frac{du_m}{dt} + c_{mr} u_r^2 + c_{ms} u_s^2 - c_{rm} u_r u_m - c_{sm} u_s u_m:$$

mithin wird:

$$v_1 \cos(v_1 h_1) = \frac{du_1}{dt} + c_{12} u_2^2 + c_{13} u_3^2 - c_{21} u_2 u_1 - c_{31} u_3 u_1,$$

$$v_1 \cos(v_1 h_2) = \frac{du_2}{dt} + c_{23} u_3^2 + c_{21} u_1^2 - c_{32} u_3 u_2 - c_{12} u_1 u_2, \quad (29)$$

$$v_1 \cos(v_1 h_3) = \frac{du_3}{dt} + c_{31} u_1^2 + c_{32} u_2^2 - c_{13} u_1 u_3 - c_{23} u_2 u_3.$$

Diese Ausdrücke für die Projectionen der Beschleunigung erster Ordnung auf die Axen eines orthogonalen Coordinatensystems hat Giraudet (Thèses de mécanique) gefunden; hierauf erschienen sie in dem Werke von Lamé: „Leçons sur les coordonnées curvilignes“.

Angenommen, der Punkt m bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = 1$ auf der Coordinatenfläche (q_3); es bezeichne φ den Winkel, welchen die Richtung der Geschwindigkeit mit dem Parameter h_1 bildet und ϱ den ersten Krümmungsradius der Bahn; dann ist:

spannt, auf die directen und reciproken Parameter aufstellen. Bedeutet w die Sehne des vom Punkte in der auf t folgenden Zeit τ durchlaufenen Weges, so hat man nach der Formel des §. 30:

$$w \cos(w a_m) =$$
$$\frac{1}{a_m}\left[p_m \tau + p_{1,m}\frac{\tau^2}{2} + p_{2,m}\frac{\tau^3}{2.3} + \cdots + p_{n,m}\frac{\tau^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \cdots\right]$$
$$w \cos(w h_m) =$$
$$\frac{1}{h_m}\left[q'_m \tau + q_{1,m}\frac{\tau^2}{2} + q_{2,m}\frac{\tau^3}{2.3} + \cdots + q_{n,m}\frac{\tau^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \cdots\right]$$

wo $p_m, p_{1,m} \ldots, q_{1,m}, q_{2,m} \ldots$ nach den Formeln des §. 98 zu berechnen sind. Durch die Projectionen der Sehne w auf die directen und reciproken Parameter bestimmt sich aber die Lage des beweglichen Punktes zur Zeit $t + \tau$. Wir empfehlen diese Formeln auf Polarcoordinaten anzuwenden.

105. Wir wollen nun die Formeln des §. 98 für ein rechtwinkliges Coordinatensystem entwickeln, und die wichtigsten, sich aus ihnen ergebenden Folgerungen untersuchen. Die Bedingung der Orthogonalität der Coordinaten q_1, q_2, q_3 ist dadurch ausgedrückt, dass $\overline{a_r a_s} = 0$, wenn r nicht gleich s ist, und dass $a_r = \frac{1}{h_r}$. Man hat in diesem Falle (s. §. 85)

$$(rsr) = \overline{a_r D_s a_r} = -\frac{1}{h_r^3}\frac{\partial h_r}{\partial q_s}$$
$$(rrr) = \overline{a_r D_r a_r} = -\frac{1}{h_r^3}\frac{\partial h_r}{\partial q_r}$$
$$(rrm) = \overline{a_m D_r a_r} = \frac{1}{h_r^3}\frac{\partial h_r}{\partial q_m}$$
$$(rsm) = a_m D_s a_r = 0;$$

dadurch erhält man aus Formel (7):

$$p_{1,m} = \frac{1}{h_m^2} q''_m - \frac{1}{h_m^3}\frac{\partial h_m}{\partial q_m} q'^2_m + \frac{1}{h_r^3}\frac{\partial h_r}{\partial q_m} q'^2_r + \frac{1}{h_s^3}\frac{\partial h_s}{\partial q_m} q'^2_s$$
$$- \frac{2}{h_m^3}\frac{\partial h_m}{\partial q_r} q'_r q'_m - \frac{2}{h_m^3}\frac{\partial h_m}{\partial q_s} q'_s q'_m, \tag{26}$$

was auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$p_{1,m} = \frac{d\left(\frac{1}{h^2_m} q'_m\right)}{dt} + \frac{1}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_m} q'^2_1 + \frac{1}{h_2^3}\frac{\partial h_2}{\partial q_m} q'^2_2$$
$$+ \frac{1}{h_3^3}\frac{\partial h_3}{\partial q_m} q'^2_3 . \tag{27}$$

Dies lässt sich direct aus Formel (11) ableiten, indem man darin setzt:

$$p_m = \frac{1}{h_m^2} q'_m \text{ und } T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1^2} q_1'^2 + \frac{1}{h_2^2} q_2'^2 + \frac{1}{h_3^2} q_3'^2\right).$$

Aus Formel (26) folgt:

$$h_m p_{1,m} = \frac{d\left(\frac{1}{h_m} q'_m\right)}{dt} + \frac{h_m}{h_r} \frac{\partial h_r}{\partial q_m} \left(\frac{q'_r}{h_r}\right)^2 + \frac{h_m}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial q_m} \left(\frac{q'_s}{h_s}\right)^2$$

$$- \frac{h_r}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial q_r} \left(\frac{q'_r}{h_r}\right)\left(\frac{q'_m}{h_m}\right) - \frac{h_s}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial q_s} \left(\frac{q'_s}{h_s}\right)\left(\frac{q'_m}{h_m}\right); \qquad (28)$$

hierin ist $\frac{1}{h_m} q'_m$ die Projection der Geschwindigkeit v und $h_m p_{1,m}$ die Projection der Beschleunigung v_1 auf den Parameter h_m; ferner ist $\frac{h_m}{h_r} \frac{\partial h_r}{\partial q_m}$ (s. §. 95) die Hauptkrümmung $c_{m,r}$ der Fläche (q_m), welche Krümmung zu dem Schnitt dieser Fläche mit der Ebene der Parameter h_m und h_r gehört. Setzt man daher $\frac{1}{h_m} q'_m = u_m$, so erhält man nach Formel (28) allgemein;

$$v_1 \cos(v_1 h_m) = \frac{du_m}{dt} + c_{mr} u_r^2 + c_{ms} u_s^2 - c_{rm} u_r u_m - c_{sm} u_s u_m:$$

mithin wird:

$$v_1 \cos(v_1 h_1) = \frac{du_1}{dt} + c_{12} u_2^2 + c_{13} u_3^2 - c_{21} u_2 u_1 - c_{31} u_3 u_1,$$

$$v_1 \cos(v_1 h_2) = \frac{du_2}{dt} + c_{23} u_3^2 + c_{21} u_1^2 - c_{32} u_3 u_2 - c_{12} u_1 u_2, \qquad (29)$$

$$v_1 \cos(v_1 h_3) = \frac{du_3}{dt} + c_{31} u_1^2 + c_{32} u_2^2 - c_{13} u_1 u_3 - c_{23} u_2 u_3.$$

Diese Ausdrücke für die Projectionen der Beschleunigung erster Ordnung auf die Axen eines orthogonalen Coordinatensystems hat Giraudet (Thèses de mécanique) gefunden; hierauf erschienen sie in dem Werke von Lamé: „Leçons sur les coordonnées curvilignes“.

Angenommen, der Punkt m bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = 1$ auf der Coordinatenfläche (q_3); es bezeichne φ den Winkel, welchen die Richtung der Geschwindigkeit mit dem Parameter h_1 bildet und ϱ den ersten Krümmungsradius der Bahn; dann ist:

$$u_1 = \cos\varphi,\quad u_2 = \sin\varphi,\quad u_3 = 0,\ \frac{du_3}{dt} = 0,\ \frac{d^2u_3}{dt^2} = 0, \ldots$$

und $v_1 = \frac{1}{\varrho}$; die Richtung von v_1 fällt überdies mit der von ϱ zusammen. Hiermit gehen die Formeln (29) über in:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho}\cos(\varrho h_1) &= -\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{ds} - c_{12}\sin\varphi + c_{21}\cos\varphi\right);\\
\frac{1}{\varrho}\cos(\varrho h_2) &= \cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{ds} - c_{12}\sin\varphi + c_{21}\cos\varphi\right), \qquad (30)\\
\frac{1}{\varrho}\cos(\varrho h_3) &= c_{31}\cos^2\varphi + c_{32}\sin^2\varphi.
\end{aligned}$$

Die letzte Formel zeigt, dass die Grösse $\frac{1}{\varrho}\cos(\varrho h_3)$ nicht von dem Winkel (ϱh_3) abhängt und daher gleich der Krümmung des Durchschnittes der Fläche (q_3) mit der durch die Richtung der Geschwindigkeit gehenden Normalebene ist. Bezeichnet man diese mit $\pm\frac{1}{\varrho'}$, so ist: $\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho}\cos(\varrho\varrho')$ oder $\varrho = \varrho'\cos(\varrho\varrho')$, was den Meunier'schen Satz (§. 88) ausspricht. Zugleich hat man die Euler'sche Formel:

$$\frac{1}{\varrho'} = c_{31}\cos^2\varphi + c_{32}\sin^2\varphi,$$

aus der man auch sieht, dass die Ebenen $h_1 h_3$ und $h_2 h_3$ die Hauptnormalschnitte der Fläche (q_3) sind; hierdurch aber bestätigt sich der Satz von Dupin (S. 214).

106. Wenn die Bahn eine geodätische Linie auf der Fläche (q_3) ist, so ist der Krümmungsradius ϱ in jedem Punkte der Bahn normal zu der Fläche; es ist also $\cos(\varrho h_1) = 0$, $\cos(\varrho h_2) = 0$, und nach den Formeln (30) erhält man:

$$\frac{d\varphi}{ds} - c_{12}\sin\varphi + c_{21}\cos\varphi = 0. \qquad (31)$$

Diese Gleichung ist ein Specialfall der Gleichung, die Gauss zur Bestimmung der geodätischen Linie auf einer gegebenen Fläche aufstellt (Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. XVII).

Hier ist:

$$c_{12} = \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} = \frac{h_1}{2}\frac{\partial \log h_2^2}{\partial q_1},\quad c_{21} = \frac{h_2}{2}\frac{\partial \log h_1^2}{\partial q_2}.$$

$$ds\cos\varphi = \frac{1}{h_1}dq_1,\quad ds\sin\varphi = \frac{1}{h_2}dq_2,\quad \cot\varphi = \frac{h_2}{h_1}\frac{dq_1}{dq_2};$$

dadurch reducirt sich die Gleichung (31) auf die folgende:

$$2 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\partial \log h_2{}^2}{\partial q_1} \sin^2\varphi \, dq_1 - \frac{\partial \log h_1{}^2}{\partial q_2} \cos^2\varphi \, dq_2, \quad (32)$$

welche in einigen speciellen Fällen leicht zu integriren ist.

Wir wollen diese Gleichung auf die geodätische Linie auf einer der drei confocalen Flächen zweiter Ordnung (λ_1), (λ_2), (λ_3) anwenden, welche die Coordinatenflächen in einem elliptischen Coordinatensystem sind. Setzt man $q_1 = \lambda_1$, $q_2 = \lambda_2$, $q_3 = \lambda_3$, so folgt nach den Formeln (12) §. 57:

$$h_1{}^2 = 4 \cdot \frac{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$h_2{}^2 = 4 \cdot \frac{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)(a_3 + \lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)};$$

hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\partial \log h_1{}^2}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \frac{\partial \log h_2{}^2}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

und somit giebt die Gleichung (32):

$$2 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sin^2\varphi \, d\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cos^2\varphi \, d\lambda_2,$$

oder

$$2 \sin\varphi \cos\varphi (\lambda_1 - \lambda_2) d\varphi + \sin^2\varphi \, d\lambda_1 + \cos^2\varphi \, d\lambda_2 = 0,$$

d. h.

$$d(\lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 \cos^2\varphi) = 0.$$

Durch Integration findet man:

$$\lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 \cos^2\varphi = C, \quad (33)$$

wo C eine Constante ist. Diese bemerkenswerthe Gleichung hat Liouville gefunden.*) Verbunden mit der Gleichung

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

giebt dieselbe:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{C - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{\lambda_1 - C}{\lambda_1 - \lambda_2}};$$

ausserdem hat man:

$$ds \cos\varphi = \frac{d\lambda_1}{h_1}, \quad ds \sin\varphi = \frac{d\lambda_2}{h_2}.$$

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, par J. Liouville. T. IX, p. 401.

Aus diesen vier Formeln folgen die Gleichungen:

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} d\lambda_1}{[(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)(\lambda_1 - C)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} d\lambda_2}{[-(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(C-\lambda_2)]^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

$$ds = \frac{[(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - C)]^{\frac{1}{2}} d\lambda_1}{2[(a+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{[(\lambda_2 - \lambda_3)(C-\lambda_2)]^{\frac{1}{2}} d\lambda_2}{2[-(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)]^{\frac{1}{2}}};$$

die erstere giebt die Gleichung der geodätischen Linie auf dem zweimanteligen Hyperboloide (λ_3), und zwar:

$$\int \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} d\lambda_1}{[(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)(\lambda_2 - C)]} - \int \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} d\lambda_2}{[-(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(C-\lambda_2)]^{\frac{1}{2}}} = \text{Const.};$$

die andere Gleichung giebt die Länge dieser Linie:

$$s = \tfrac{1}{2}\int \frac{[(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - C)]^{\frac{1}{2}} d\lambda_1}{[(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)]^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{1}{2}\int \frac{[(\lambda_2 - \lambda_3)(C-\lambda_2)]^{\frac{1}{2}} d\lambda_2}{[-(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ kann man hieraus die Formeln erhalten, die für die geodätische Linie auf dem Ellipsoid (λ_1) und auf dem einmanteligen Hyperboloid (λ_2) gelten. Die hier vorkommenden Quadraturen führen auf Abel'sche Functionen.*) In dem speciellen Falle, wenn die geodätischen Linien von einem Kreispunkte ausgehen (s. §. 92), hat man $\lambda_1 = \lambda_2 = -a_1$; dann giebt Gleichung (33) $C = -a_1$, und die obigen Formeln gehen über in:

---

*) Das Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linie auf dem Ellipsoide hat Jacobi gefunden. Crelle's Journal, B. 19, p. 309.
Eine ausführliche Untersuchung der geodätischen Linie auf dem Ellipsoide mit drei ungleichen Axen findet sich in der Abhandlung von Weierstrass: „Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid", Monatsberichte der Berliner Akademie 1861.

$$\int_{-a_1}^{\lambda_1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}\, d\lambda_1}{(a_1 + \lambda_1)\, [(a_2 + \lambda_1)\, (a_3 + \lambda_1)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \int_{\lambda_1}^{-a_1} \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}\, d\lambda_2}{-(a_1 + \lambda_2)\, [(a_2 + \lambda_2)\, (a_3 + \lambda_2)]^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

$$s = \tfrac{1}{2} \int_{-a_1}^{\lambda_1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}\, d\lambda_1}{[(a_2 + \lambda_1)\, (a_3 + \lambda_1)]^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{1}{2} \int_{\lambda_2}^{-a_1} \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}\, d\lambda_2}{[(a_2 + \lambda_2)\, (a_3 + \lambda_2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Die hier vorkommenden Quadraturen lassen sich durch elliptische Integrale ausdrücken.

107. Aus der Liouville'schen Gleichung ergiebt sich folgender bemerkenswerthe Satz von Joachimsthal:

*Das Product aus dem der Tangente in irgend einem Punkte der geodätischen Linie parallelen Halbmesser in das Perpendikel, das auf die die Fläche in demselben Punkte berührende Ebene gefällt werden kann, ist constant.**)

Im §. 57 haben wir gesehen, dass die Halbaxen der Schnittcurve der Fläche (λ_3) mit der der Tangentenebene jener Fläche im Punkte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ parallelen Ebene den Differentialparametern h_1, h_2 parallel und den Differenzen $\lambda_1 - \lambda_3$, $\lambda_2 - \lambda_3$ gleich sind; bezeichnet man also mit r denjenigen Halbmesser dieses Schnittes, welcher mit der dem Parameter h_1 parallelen Halbaxe den Winkel φ bildet, so findet man:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\sin^2\varphi}{\lambda_2 - \lambda_3} = \frac{\lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 \cos^2\varphi - \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)\, (\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Nimmt man nun an, dass r der Tangente an die geodätische Linie im Punkte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ parallel ist, so gilt die Gleichung (33); es ist also:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{C - \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)\, (\lambda_2 - \lambda_3)} \text{ und } \frac{1}{r} = \frac{(C - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}}{[(\lambda_1 - \lambda_3)\, (\lambda_2 - \lambda_3)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Die vom Centrum auf die Tangentenebene von (λ_3) gefällte Senkrechte (s. §. 57) ist:

---

*) Crelle's Journal B. 26.

$$\delta_3 = \tfrac{1}{2} h_3 = \frac{[(a_1 + \lambda_3)\,(a_2 + \lambda_3)\,(a_3 + \lambda_3)]^{\frac{1}{2}}}{[(\lambda_1 - \lambda_3)\,(\lambda_2 - \lambda_3)]^{\frac{1}{2}}};$$

also wird:

$$r\delta_3 = \left[\frac{(a_1 + \lambda_3)\,(a_2 + \lambda_3)\,(a_3 + \lambda_3)}{(C - \lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Grösse hat constanten Werth, d. h. sie ist eine und dieselbe für alle Punkte der geodätischen Linie. Man kann den Joachimsthal'schen Satz auch direct beweisen und dann aus ihm die Gleichung der geodätischen Linie ableiten.*)

108. Für eine nichtgeodätische Curve gilt die Gleichung (31) nicht. Wenn man durch den Punkt (q_1, q_2, q_3) zu ihr die tangirende geodätische Linie zieht und mit $\frac{d_1\varphi}{ds}$ den Werth von $\frac{d\varphi}{ds}$ für die letztere Curve bezeichnet, so ist

$$\frac{d\varphi - d_1\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} - c_{12}\sin\varphi + c_{21}\cos\varphi$$

die geodätische Krümmung der ersteren Curve (s. §. 41). Bezeichnet man diese Krümmung mit G, so kann man die beiden ersten der Formeln (30) in der Form darstellen:

$$\frac{1}{\varrho}\cos(\varrho h_1) = -G\sin\varphi,\quad \frac{1}{\varrho}\cos(\varrho h_2) = G\cos\varphi, \qquad (34)$$

was mit der früher bewiesenen Eigenschaft der geodätischen Krümmung übereinstimmt (s. §. 41).

109. Betrachten wir noch die Projectionen der Beschleunigung zweiter Ordnung auf die Differentialparameter h_1, h_2, h_3 eines orthogonalen Coordinatensystems. Die Ausdrücke für diese Projectionen ergeben sich entweder aus den Formeln (6) oder aus der Formel (12).

Die Gleichung (12) giebt

$$p_{21} = \frac{dp_{11}}{dt} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial T_1}{\partial q'_1},$$

wo

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(h_1^2 p_{11}^2 + h_2^2 p_{12}^2 + h_3^2 p_{13}^2).$$

Da aber

$$\frac{\partial T_1}{\partial q'_1} = h_1^2 p_{11}\frac{\partial p_{11}}{\partial q'_1} + h_2^2 p_{12}\frac{\partial p_{12}}{\partial q'_1} + h_3^2 p_{13}\frac{\partial p_{13}}{\partial q'_1}$$

*) Salmon: Treatise on the Analytic Geometry of three dimensions. 3. edition. p. 354.

und

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial q'_1} = -\frac{2}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_1} q'_1 - \frac{2}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} q'_2 - \frac{2}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} q'_3$$
$$= -\frac{2}{h_1^3}\frac{dh_1}{dt}$$

ist, so wird:

$$p_{21} = \frac{dp_{11}}{dt} + \frac{1}{h_1} p_{11} \frac{dh_1}{dt} - \tfrac{1}{2}\left(h_2^2 p_{12} \frac{\partial p_{12}}{\partial q'_1} + h_3^2 p_{13} \frac{\partial p_{13}}{\partial q'_1}\right).$$

Setzt man nun

$$h_1 p_{11} = v_{11}, \quad h_2 p_{12} = v_{12}, \quad h_3 p_{13} = v_{13},$$

so folgt:

$$h_1 p_{21} = \frac{dv_{11}}{dt} - \frac{h_1}{2}\left(v_{12}\frac{\partial v_{12}}{\partial q'_1} + v_{13}\frac{\partial v_{13}}{\partial q'_1}\right)$$
$$= \frac{dv_{11}}{dt} - \frac{h_1}{4}\frac{\partial (v_{12}^2 + v_{13}^2)}{\partial q'_1}.$$

Dies drückt die Projection der Beschleunigung zweiter Ordnung v_2 auf den Parameter h_1 aus. Ebenso erhält man die Projectionen von v_2 auf die beiden anderen Parameter. Setzt man also

$$v_2 \cos(v_2 h_1) = v_{21}, \quad v_2 \cos(v_2 h_2) = v_{22}, \quad v_2 \cos(v_2 h_3) = v_{23},$$

so hat man:

$$\begin{aligned} v_{21} &= \frac{dv_{11}}{dt} - \frac{h_1}{4}\frac{\partial (v_{12}^2 + v_{13}^2)}{\partial q'_1}, \\ v_{22} &= \frac{dv_{12}}{dt} - \frac{h_2}{4}\frac{\partial (v_{13}^2 + v_{11}^2)}{\partial q'_2}, \\ v_{23} &= \frac{dv_{13}}{dt} - \frac{h_3}{4}\frac{\partial (v_{11}^2 + v_{12}^2)}{\partial q'_3}, \end{aligned} \tag{35}$$

wo sich v_{11}, v_{12}, v_{13} nach den Formeln (29) ausdrücken lassen. Für die partiellen Derivirten dieser Ausdrücke nach q'_1, q'_2, q'_3 ergeben sich nach (26) die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{11}}{\partial q'_2} &= -\frac{2h_1}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} q'_1 + \frac{2h_1}{h_2^3}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} q'_2 = \frac{2}{h_2}(c_{12}u_2 - c_{21}u_1), \\ \frac{\partial v_{11}}{\partial q'_3} &= -\frac{2h_1}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} q'_1 + \frac{2h_1}{h_3^3}\frac{\partial h_3}{\partial q_1} q'_3 = \frac{2}{h_3}(c_{13}u_3 - c_{31}u_1), \\ \frac{\partial v_{12}}{\partial q'_1} &= -\frac{2h_2}{h_2^3}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} q'_2 + \frac{2h_2}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} q'_1 = \frac{2}{h_1}(c_{21}u_1 - c_{12}u_2), \\ \frac{\partial v_{12}}{\partial q'_3} &= -\frac{2h_2}{h_2^3}\frac{\partial h_3}{\partial q_3} q'_2 + \frac{2h_2}{h_3^3}\frac{\partial h_3}{\partial q_2} q'_3 = \frac{2}{h_3}(c_{23}u_3 - c_{32}u_2), \\ \frac{\partial v_{13}}{\partial q'_1} &= -\frac{2h_3}{h_3^3}\frac{\partial h_3}{\partial q_1} q'_3 + \frac{2h_3}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} q'_1 = \frac{2}{h_1}(c_{31}u_1 - c_{13}u_3), \\ \frac{\partial v_{13}}{\partial q'_2} &= -\frac{2h_3}{h_3^3}\frac{\partial h_3}{\partial q_2} q'_3 + \frac{2h_3}{h_2^3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3} q'_2 = \frac{2}{h_2}(c_{32}u_2 - c_{23}u_3). \end{aligned} \tag{36}$$

110. Nehmen wir, wie in §. 108, wieder an, der Punkt m bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = 1$ auf der Fläche (q_3); dann ist:

$$u_1 = \cos\varphi, \quad u_2 = \sin\varphi, \quad u_3 = 0,$$

und die Formeln (36) geben:

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial q'_2} = \frac{2}{h_2}(c_{12}\sin\varphi - c_{21}\cos\varphi), \quad \frac{\partial v_{11}}{\partial q'_3} = -\frac{2}{h_3}c_{31}\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial q'_1} = \frac{2}{h_1}(c_{21}\cos\varphi - c_{12}\sin\varphi), \quad \frac{\partial v_{12}}{\partial q'_3} = -\frac{1}{h_3}c_{32}.\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial v_{13}}{\partial q'_1} = \frac{2}{h_1}c_{31}\cos\varphi, \quad \frac{\partial v_{13}}{\partial q'_2} = \frac{2}{h_2}c_{32}\sin\varphi;$$

mit Beachtung der Formeln (30) und (34) ergiebt sich dann aus (35):

$$v_{21} = -\frac{dG}{ds}\sin\varphi - G^2\cos\varphi - cc_{31}\cos\varphi,$$

$$v_{22} = \frac{dG}{ds}\cos\varphi - G^2\sin\varphi - cc_{32}\sin\varphi,$$

$$v_{23} = \frac{dc}{ds} + G(c_{31} - c_{32})\sin\varphi\cos\varphi,$$

wo $c = \frac{1}{\varrho}\cos(\varrho\, h_3)$ die Krümmung des Normalschnitts der Fläche (q_3) in der Ebene ist, die mit der Ebene $(h_1 h_3)$ den Winkel φ bildet. Aus diesen Ausdrücken für die Projectionen der Beschleunigung zweiter Ordnung auf die Coordinatenaxen ergiebt sich ein bemerkenswerther Ausdruck für die zweite Krümmung.

Die Formeln (23) des §. 102 und (20) §. 101 liefern für die zweite Krümmung den Ausdruck:

$$\frac{1}{r} = \pm\frac{\varrho^2}{(2T)^3}A^{\frac{1}{2}}D = \pm\frac{\varrho^2}{v^6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{vmatrix},$$

der im vorliegenden Falle übergeht in:

$$\frac{1}{r} = \pm\varrho^2\left[-c\frac{dG}{ds} + G\frac{dc}{ds} + \frac{1}{\varrho^2}(c_{31} - c_{32})\sin\varphi\cos\varphi\right].$$

Es ist aber:

$$c\frac{dG}{ds} - G\frac{dc}{ds} = c^2\frac{d\left(\frac{G}{c}\right)}{ds},$$

und wenn man mit ψ den Winkel bezeichnet, den der erste Krümmungsradius ϱ mit der Ebene $(h_1 h_2)$ bildet, so ist:

$$\frac{G}{c} = \cot\psi, \quad c = \pm \frac{1}{\varrho} \sin\psi;$$

somit findet man endlich folgenden bemerkenswerthen Ausdruck für die zweite Krümmung:

$$\frac{1}{r} = \pm \left[\frac{d\psi}{ds} + (c_{31} - c_{32}) \sin\varphi \cos\varphi\right].$$

Für die geodätische Linie ist der Winkel ψ immer gleich $\frac{\pi}{2}$, also $\frac{d\psi}{ds} = 0$ und

$$\frac{1}{r} = \pm (c_{31} - c_{32}) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Man hat überhaupt für jede Curve, bei der die Ebene der ersten Krümmung in allen Punkten mit der Fläche (q_3) einen constanten Winkel bildet, die Relation $\frac{d\psi}{ds} = 0$. Für die Krümmungslinien der Fläche (q_3) muss $\sin\varphi = 0$ oder $\cos\varphi = 0$ gesetzt werden; dann ist:

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{d\psi}{ds} \text{ und } \frac{ds}{r} = \pm d\psi,$$

d. h. *der Torsionswinkel einer Krümmungslinie ist gleich dem Differential des Winkels, den die Ebene der ersten Krümmung mit der Fläche bildet, auf welcher die Krümmungslinie liegt.* Dieser Satz rührt von Lancret her.*)

XII. Capitel.

Allgemeine Ausdrücke für die Projectionen des Differentialparameters erster Ordnung und seiner geometrischen Derivirten auf die Coordinatenparameter. — Allgemeine Ausdrücke für die Derivirten von Punktfunctionen nach der Zeit und für die Incremente von Punktfunctionen.

111. Ist φ eine Function des Punktes m, der sich mit der Geschwindigkeit und den Beschleunigungen $v, v_1, v_2, \ldots$

*) Mémoires de l'Institut, Recueil des Savants étrangers 1806: Mémoire sur les courbes à double courbure.

bewegt, so wird der Differentialparameter erster Ordnung P dieser Function eine geometrische Function der Zeit t sein und er hat daher im allgemeinen geometrische Derivirte verschiedener Ordnungen $P_1, P_2, \ldots$, die von der Bewegung des Punktes m abhängig sind. Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Grösse und die Richtung des Parameters P selbst, sowie seiner Derivirten $P_1, P_2, \ldots$ bestimmen lassen, wenn φ als eine bekannte Function $\varphi(q_1, q_2, q_3)$ der Coordinaten des Punktes m gegeben ist.

Wie in §. 52 gezeigt wurde, sind die Componenten des Parameters P nach den directen Parametern h_1, h_2, h_3:

$$h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1},\ h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2},\ h_3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_3},$$

oder $h_1 \varphi_1, h_2 \varphi_2, h_3 \varphi_3$, wenn zur Abkürzung $\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} = \varphi_r$ gesetzt wird. Bildet man also aus diesen Grössen die quadratische Function

$$\Theta = \tfrac{1}{2} \Sigma \overline{h_r h_s}\, \varphi_r \varphi_s, \tag{1}$$

so findet man $P = \sqrt{2\Theta}$ als Werth des Parameters. Ferner hat man nach den Formeln des §. 66 die Gleichungen

$$a_1 P \cos(Pa_1) = \varphi_1,\ a_2 P \cos(Pa_2) = \varphi_2,\ a_3 P \cos(Pa_3) = \varphi_3 \tag{2}$$

zur Bestimmung der Projectionen von P auf die reciproken Coordinatenparameter a_1, a_2, a_3 oder auf die Coordinatenaxen. Setzt man

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_r} = \sum_s \overline{h_r h_s}\, \varphi_s = \psi_r,$$

so erhält man als Componenten des Parameters P nach diesen Axen die Ausdrücke $a_1 \psi_1, a_2 \psi_2, a_3 \psi_3$, aus welchen sich die zu (1) conjugirte Form

$$\Theta = \tfrac{1}{2} \Sigma \overline{a_r a_s}\, \psi_r \psi_s \tag{3}$$

zusammensetzen lässt.

Endlich hat man die Formeln

$$h_1 P \cos(Ph_1) = \psi_1,\ h_2 P \cos(Ph_2) = \psi_2,\ h_3 P \cos(Ph_3) = \psi_3 \tag{4}$$

zur Bestimmung der Projectionen von P auf die directen Parameter h_1, h_2, h_3.

In analoger Weise kann man mit $h_1 \varphi_{n,1}, h_2 \varphi_{n,2}, h_3 \varphi_{n,3}$ die Componenten der geometrischen Derivirten P_n nach den

directen Parametern h_1, h_2, h_3, mit $a_1\psi_{n,1}$, $a_2\psi_{n,2}$, $a_3\psi_{n,3}$ die Componenten von P_n nach den reciproken Parametern a_1, a_2, a_3 bezeichnen; setzt man dann $\frac{1}{2}P_n^2 = \Theta_n$, so ist:

$$\Theta_n = \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{h_r h_s}\,\varphi_{n,r}\varphi_{n,s} = \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{a_r a_s}\,\psi_{n,r}\psi_{n,s},$$

$$\varphi_{n,r} = \frac{\partial\Theta_n}{\partial\psi_{n,r}},\quad \psi_{n,r} = \frac{\partial\Theta_n}{\partial\varphi_{n,r}};$$

$$a_1\, P_n\cos(P_n a_1) = \varphi_{n,1},\quad a_2\, P_n\cos(P_n a_2) = \varphi_{n,2},$$
$$a_3\, P_n\cos(P_2 a_3) = \varphi_{n,3},$$
$$h_1\, P_n\cos(P_n h_1) = \psi_{n,1},\quad h_2\, P_n\cos(P_n h_2) = \psi_{n,2},$$
$$h_3\, P_n\cos(P_n h_3) = \psi_{n,3}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich Grösse und Richtung von P_n bestimmen, wenn die Grössen $\varphi_{n,1}$, $\varphi_{n,2}$, $\varphi_{n,3}$ bekannt sind.

Zur successiven Berechnung der Grössen $\varphi_{1,m}$, $\varphi_{2,m}$, $\varphi_{3,m}$,$\cdots$ lassen sich ähnliche Formeln aufstellen, wie die in §. 98 zur successiven Berechnung der Grössen $p_{1,m}$, $p_{2,m}$,... abgeleiteten Formeln.

Zunächst hat man nach der Formel für die Differentiation eines geometrischen Productes:

$$\overline{P_1 a_m} = \frac{d\,\overline{Pa_m}}{dt} - \overline{PD_t a_m},$$

d. h.

$$\varphi_{1,m} = \varphi'_m - \overline{PD_t a_m},$$

wo

$$\varphi'_m = \frac{\partial\varphi_m}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial\varphi_m}{\partial q_2}q'_2 + \frac{\partial\varphi_m}{\partial q_3}q'_3$$

und

$$\overline{PD_t a_m} = \psi_1\cdot\overline{a_1 D_t a_m} + \psi_2\cdot\overline{a_2 D_t a_m} + \psi_3\cdot\overline{a_3 D_t a_m}:$$

Der letztere Ausdruck nimmt nach Formel (5) §. 83 die Gestalt an:

$$\psi_1\sum_i(im1)\,q'_i + \psi_2\sum_i(im2)\,q'_i + \psi_3\,\Sigma(im3)\,q'_i;$$

setzt man also

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial q_i} - \sum_r(imr)\,\psi_r = b_{i,m},$$

so ergiebt sich $\varphi_{1,m}$ als lineare Function der Derivirten der Coordinaten nach der Zeit, nämlich:

$$\varphi_{1,m} = b_{1,m}q'_1 + b_{2,m}q'_2 + b_{3,m}q'_3 = \sum_i b_{i,m}q'_i.$$

Hieraus folgt:

$$\varphi_{1,1} = \sum_i b_{i,1} q'_i, \quad \varphi_{1,2} = \sum_i b_{i,2} q'_i, \quad \varphi_{1,3} = \sum_i b_{i,3} q'_i. \quad (5)$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $b_{i,m} = b_{m,i}$; denn

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_m \partial q_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_m} \text{ und } (imr) = (mir).$$

Allgemein hat man:

$$\varphi_{n+1,m} = \varphi'_{n,m} - \overline{P_n D_t a_m} = \varphi'_{n,m} - \sum_r \psi_{n,r} \overline{a_r D_t a_m}; \quad (6)$$

da nun $\varphi_{n,m} = \sum_r \overline{a_r a_m} \psi_{n,r}$, so ist:

$$\varphi'_{n,m} = \sum_r \overline{a_r a_m} \psi'_{n,r} + \sum_r \psi_{n,r} (\overline{a_r D_t a_m} + \overline{a_m D_t a_r});$$

dadurch geht die Formel (6) über in

$$\varphi_{n+1,m} = \sum_r \overline{a_r a_m} \psi'_{n,r} + \sum_r \psi_{n,r} \overline{a_m D_t a_r}, \quad (7)$$

oder

$$\varphi_{n+1,m} = \sum_r \overline{a_r a_m} \psi'_{n,r} + \sum_r \psi_{n,r} \sum_i (irm) q'_i. \quad (8)$$

Die Formel (7) liefert:

$$\overline{a_m D_t a_r} = \frac{\partial \varphi_{n+1,m}}{\partial \psi_{n,r}};$$

also ist auch

$$\overline{a_r D_t a_m} = \frac{\partial \varphi_{n,r}}{\partial \psi_{n-1,m}},$$

und folglich lässt sich die Formel (6) auch schreiben:

$$\varphi_{n+1,m} = \varphi'_{n,m} - \sum_r \frac{\partial \Theta_n}{\partial \varphi_{n,r}} \frac{\partial \varphi_{n,r}}{\partial \psi_{n-1,m}}$$

oder

$$\varphi_{n+1,m} = \varphi'_{n,m} - \frac{\partial \Theta_n}{\partial \psi_{n-1,m}}. \quad (9)$$

Nach Formel (7) oder (9) kann man die Grössen $\varphi_{2,m}$, $\varphi_{3,m}, \cdots$ nach einander berechnen.

112. Mit Hilfe der Geschwindigkeit v, der Beschleunigungen $v_1, v_2, \cdots$, des Parameters P und seiner geometrischen Derivirten $P_1, P_2, \cdots$ lässt sich ein allgemeiner Ausdruck für die Derivirte einer beliebigen Punktfunction φ nach der Zeit aufstellen.

Auf Grund des Satzes in §. 51 ist die derivirte Function von φ nach irgend einer Verschiebung ds gleich der Projection des Parameters P auf die Richtung von ds; also ist:

$$d\varphi = P\cos(Pds)\,ds.$$

Ist nun s der Weg, den der Punkt zur Zeit t bei einer, durch die Geschwindigkeit v und die Beschleunigungen v_1, $v_2, \cdots$ bestimmten Bewegung zurückgelegt hat, so ist $ds = vdt$ und

$$d\varphi = P\cos(Pv)\,vdt;$$

also hat man $\frac{d\varphi}{dt} = \overline{Pv}$; hieraus folgt

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \overline{Pv_1} + \overline{P_1 v}$$

und allgemein

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = \overline{Pv_{n-1}} + (n-1)\,\overline{P_1 v_{n-2}} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\,\overline{P_2 v_{n-3}} +$$
$$+ \cdots + P_{n-1}v. \qquad (10)$$

Das dem Zeitincremente τ entsprechende Increment der Function φ lässt sich nach der Taylor'schen Formel durch die Reihe

$$\varDelta\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\tau + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot\frac{\tau^2}{2} + \cdots + \frac{d^n\varphi}{dt^n}\,\frac{\tau^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} + \cdots$$

ausdrücken, wobei die Coefficienten der Potenzen von τ nach Formel (10) zu bestimmen sind.

Ist φ eine gegebene Function der Coordinaten q_1, q_2, q_3, so findet man durch unmittelbare Differentiation $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$ ausgedrückt durch die partiellen Derivirten von φ nach den Coordinaten und durch die Derivirten der Coordinaten nach der Zeit. Zuweilen ist es jedoch nöthig, jedes Glied des Ausdrucks (10) einzeln zu bestimmen; dies lässt sich mit Hilfe der Formeln des vorhergehenden Paragraphen und der Formeln zur Bestimmung der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen verschiedener Ordnungen (XI. Capitel) immer erreichen.

113. Wenn sich der Punkt m auf der Niveaufläche (φ) bewegt, so hat man für jede Zeit τ die Relation $\varDelta\varphi = 0$; dies erfordert aber, dass

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \cdots \frac{d^n\varphi}{dt^n} = 0 \cdots$$

Diese Gleichungen bestimmen die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen der Bewegung des Punktes. Die erste ist identisch mit $\overline{Pv} = 0$ und zeigt, dass die Geschwindigkeit v

auf dem Differentialparameter P senkrecht stehen muss. Die zweite giebt:

$$\overline{Pv_1} + \overline{P_1 v} = 0. \tag{11}$$

Da nun die Beschleunigung erster Ordnung v_1 die geometrische Summe der Tangentialbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ und der in die Richtung des Radius ϱ der ersten Krümmung fallenden Beschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ ist, so hat man:

$$\overline{Pv_1} = P \cos(Pv) \frac{dv}{dt} + P \cos(P\varrho) \frac{v^2}{\varrho}.$$

Hierin verschwindet das erste Glied rechts, weil v auf P senkrecht steht; also ist $\overline{Pv_1} = P \cos(P\varrho) \cdot \frac{v^2}{\varrho}$, und die Gleichung (11) geht über in die folgende:

$$P \cos(P\varrho) \cdot \frac{v^2}{\varrho} + \overline{P_1 v} = 0, \tag{12}$$

welche die Beziehung ausdrückt, die zwischen der Geschwindigkeit und dem Radius ϱ der ersten Krümmung besteht. Aus dieser Gleichung lässt sich ein allgemeiner Ausdruck für die erste Krümmung einer beliebigen, auf der Niveaufläche (φ) gelegenen Curve ableiten.

Man beachte zunächst, dass das Glied $\overline{P_1 v}$ nur von der Grösse und Richtung der Geschwindigkeit v abhängt, da die Componenten von P_1 nach den Parametern h_1, h_2, h_3, d. h. die Grössen $h_1 \varphi_{1,1}$, $h_2 \varphi_{1,2}$, $h_3 \varphi_{1,3}$ die höheren Derivirten der Coordinaten nach der Zeit nicht enthalten (wie aus den Formeln (5) hervorgeht); folglich hat $\overline{P_1 v}$ denselben Werth für zwei Curven auf der Fläche (φ), die eine gemeinsame Tangente in dem Punkte M haben, durch welchen der Punkt m bei seiner Bewegung auf einer jener Curven zur Zeit t mit der Geschwindigkeit v hindurchgeht. Nimmt man nun an, dass eine jener Curven der Schnitt der Fläche (φ) mit der durch die Richtung von v gehenden Normalebene sei, und bedeutet c ihre erste Krümmung, die mit $+$ oder $-$ zu nehmen ist, je nachdem die Curve concav oder convex nach dem Parameter P ist, so hat man nach Gleichung (12):

$$Pcv^2 + \overline{P_1 v} = 0. \tag{13}$$

Subtrahirt man dies von Gleichung (12), die sich auf die zweite Curve beziehen möge, so findet man

$$P\cos(P\varrho)\frac{v^2}{\varrho} - Pcv^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$c = \frac{1}{\varrho}\cos(P\varrho) \text{ oder } c = \frac{1}{\varrho}\cos(c\varrho),$$

indem man c durch eine auf P abgetragene Strecke darstellt. Diese Formel drückt den Meunier'schen Satz aus, der in §. 88 für eine der Coordinatenflächen bewiesen wurde.

Das geometrische Product $\overline{P_1 v}$ geht in die Summe

$$\overline{a_1 P_1}\cdot q'_1 + \overline{a_2 P_1}\cdot q'_2 + \overline{a_3 P_1}\cdot q'_3$$

über, welche mit Zuziehung der Formeln (5) sich durch die quadratische Function

$$\Sigma b_{rs} q'_r q'_s$$

der Derivirten erster Ordnung der Coordinaten nach der Zeit ausdrücken lässt. Nach Formel (13) erhält man dann zur Bestimmung der Krümmung des Normalschnitts der gegebenen Fläche die allgemeine Formel:

$$c = -\frac{1}{Pv^2}\Sigma b_{rs} q'_r q'_s.$$

In der Abhandlung: *Directe Methode zur Bestimmung der Differentialparameter erster und zweiter Ordnung und der Krümmung einer Fläche in beliebigen orthogonalen oder schiefwinkligen Coordinaten**) hat der Verfasser gezeigt, wie man, gestützt auf diese Formel, allgemeine Ausdrücke für die Hauptkrümmungen, die sphärische Krümmung und das Krümmungsmass einer Fläche finden und wie man die Differentialgleichungen der Krümmungslinien ableiten kann. In dem einfachsten speciellen Falle, wenn φ eine Function von drei geradlinigen, rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ist, hat man:

$$P\cos(Px) = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad P\cos(Py) = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad P\cos(Pz) = \frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

*) Beilage zum 8. Bande der Memoiren der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Nr. 4 (russ.); auch in franz. Spr.: Mém. de l'Ac. de St. Petersb. 1865, VIIme série, T. VIII. Nr. 16.

$$P_1 \cos(P_1 x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} x' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} z',$$

$$P_1 \cos(P_1 y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} x' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} z',$$

$$P_1 \cos(P_1 z) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} x' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z';$$

und

$$c = -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z'^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} y'z' + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} z'x' + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} x'y'}{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} (x'^2 + y'^2 + z'^2)},$$

wo

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}.$$

114. Eine Punktfunction kann zu gleicher Zeit auch Function der Zeit sein; so kann sich z. B. die Temperatur eines sich erwärmenden oder sich abkühlenden Körpers in einem gegebenen Zeitpunkt beim Uebergange von einem Punkte des Körpers zu einem anderen, aber auch in einem gegebenen Punkte mit der Aenderung der Zeit ändern. Dasselbe gilt von der Dichtigkeit einer nichthomogenen, in Bewegung begriffenen Flüssigkeit. Derartige Functionen haben die Form

$$\varphi(q_1, q_2, q_3, t),$$

wo die Coordinaten q_1, q_2, q_3 des betreffenden Punktes und die Zeit t als unabhängige Variable betrachtet werden können.

Nimmt man t als constant an, so hat man im Punkte m (q_1, q_2, q_3) eine Niveaufläche (φ) und einen Differentialparameter P. Bei der Aenderung von t ändert sich die Niveaufläche in dem gegebenen Punkte (q_1, q_2, q_3); infolge dessen ändert sich auch der Parameter P sowohl nach Grösse, als auch nach Richtung. Gesetzt, die Function φ erhalte im Punkte (q_1, q_2, q_3) zur Zeit $t + \tau$ den Werth $\varphi + \Delta_t \varphi$ und $\overline{P}$ den Werth $\overline{P} + \overline{\Delta_t P}$, wo $\overline{\Delta_t P}$ das geometrische Increment von $\overline{P}$ ist. Dieses Increment ist (s. §. 52) der Differentialparameter der Differenz

$$\Delta_t \varphi = (\varphi + \Delta_t \varphi) - \varphi,$$

und daher ist die auf der Richtung von $\overline{\Delta_t P}$ aufgetragene Strecke $\frac{\Delta_t P}{\tau}$ der Parameter der Function $\frac{\Delta_t \varphi}{\tau}$. Da dies auch

für ein unendlich kleines τ gilt, so ist der Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\overline{\Delta_t P}}{\tau}$, d. h. die partielle geometrische Derivirte von $\overline{P}$ nach t, die wir mit $(\overline{D_t P})$ bezeichnen, der Differentialparameter des Grenzwerthes von $\frac{\Delta_t \varphi}{\tau}$, welcher letztere die partielle Derivirte von φ nach t ist. Diese partielle Derivirte werden wir mit $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ bezeichnen, zur Unterscheidung von der Derivirten $\frac{d\varphi}{dt}$, bei der vorausgesetzt wird, dass die Coordinaten q_1, q_2, q_3 Functionen der Zeit sind. Die partielle Derivirte zweiter Ordnung von φ nach t, die wir mit $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ bezeichnen, hat zum Differentialparameter die partielle geometrische Derivirte von $(\overline{D_t P})$ nach t, die wir mit $(\overline{D_t^2 P})$ bezeichnen und welche die partielle geometrische Derivirte zweiter Ordnung von $\overline{P}$ nach t ist u. s. w. Aendert sich bei constanten q_1, q_2, q_3 die Zeit t, so bleibt der Anfangspunkt des Parameters P fest, während sein Endpunkt sich mit der Geschwindigkeit und den Beschleunigungen

$$(\overline{D_t P}), \quad (\overline{D_t^2 P}), \cdots$$

bewegt. Die Beschleunigung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dieser Bewegung, d. h. die Grösse $(\overline{D_t^n P})$, ist der Differentialparameter der partiellen Derivirten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von φ nach t, die wir mit $\left(\frac{d^n \varphi}{dt^n}\right)$ bezeichnen.

Nehmen wir nun an, der Punkt m bewege sich mit der Geschwindigkeit und den Beschleunigungen v, v_1, v_2, $\cdots$ und gelange zur Zeit $t+\tau$ nach dem Punkte m' $(q_1 + \Delta q_1,$ $q_2 + \Delta q_2,$ $q_3 + \Delta q_3)$. Im Punkte m' hat man zwei Differentialparameter, von denen der eine zu der Function

$$\varphi(q_1 + \Delta q_1, \; q_2 + \Delta q_2, \; q_3 + \Delta q_3, \; t),$$

der andere zu der Function

$$\varphi(q_1 + \Delta q_1, \; q_2 + \Delta q_2, \; q_3 + \Delta q_3, \; t + \tau)$$

gehört. Bezeichnet man den ersteren mit $\overline{P'}$, den zweiten mit $\overline{P''}$, so treten, wenn $\overline{P}$ in $\overline{P'}$ übergeht, die im §. 111 be-

trachteten geometrischen Derivirten des Parameters $\overline{P}$ auf, welche wir hier der Bequemlichkeit halber mit

$$\overline{D_1 P},\quad \overline{D_1^2 P},\cdots$$

bezeichnen wollen.

Geht dagegen $\overline{P}$ in $\overline{P''}$ über, so ergiebt sich eine andere Reihe geometrischer Derivirten, die wir mit

$$\overline{D_t P},\quad \overline{D_t^2 P},\cdots$$

bezeichnen. Man kann, wie in §. 36, leicht sehen, dass für jede geometrische Function $\overline{u}$ allgemein die folgenden Relationen gelten:

$$\overline{D_t u} = \overline{D_1 u} + \overline{(D_t u)} \text{ und } \overline{D_1^p (D_t^q u)} = \overline{(D_t^q D_1^p u)},$$

d. h. 1) dass die totale geometrische Derivirte von $\overline{u}$ nach der Zeit gleich der geometrischen Summe aus der partiellen Derivirten nach dem Zeichen D_1 und aus der partiellen Derivirten nach der Zeit ist; 2) dass die Vertauschung der Reihenfolge der geometrischen Differentiationen nach den Zeichen D_1 und D_t das Resultat der Differentiation nicht ändert. Auf Grund dieser Sätze hat man

$$\overline{D_t P} = \overline{D_1 P} + \overline{(D_t P)}$$

und allgemein:

$$\overline{D_t^n P} = \overline{D_1^n P} + \overline{n D_1^{(n-1)} (D_t P)}$$
$$+ \overline{\frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} D_1^{n-2} (D_t^2 P)} + \cdots + \overline{(D_t^n P)}.$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich leicht die allgemeinen Ausdrücke für die totalen analytischen Derivirten $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \cdots$ aufstellen, d. h. für solche derivirte Functionen, bei denen Zeit und Coordinaten zugleich variiren. Diese Ausdrücke sind:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \overline{Pv} + \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \overline{Pv_1} + \overline{v D_1 P} + \overline{2 v D_t P} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{14}$$

. . . .

Hiermit ergiebt sich dann der Ausdruck für das Increment

der Function φ, welches dem Zeitincremente τ entspricht, nach der Formel:

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\tau^2 + \cdots$$

115. Ist die Grösse φ von einem Punktsysteme $m, m', m'', \cdots$ derart abhängig, dass sie für jede Lage dieses Systems in einem gewissen Raume (A) einen bestimmten Werth hat, der sich bei der Bewegung eines, einiger, oder aller Punkte des Systems continuirlich zu ändern vermag, so ist eine solche Grösse eine Function des Punktsystems $m, m', m'', \cdots$ Sind die Punkte $m', m'', \cdots$ fest, so kann sich φ nur infolge der Bewegung des Punktes m ändern und ist somit eine Function nur dieses Punktes allein. Durch diesen Punkt geht eine gewisse Niveaufläche (φ) hindurch und die Function φ hat in diesem Punkte einen Differentialparameter P. Dasselbe gilt auch von den übrigen Systempunkten. Die Function φ hat also in jedem der Systempunkte $m, m', m'', \cdots$ eine besondere Niveaufläche und einen besonderen Differentialparameter. Es seien $P, P', P'', \cdots$ die den Punkten $m, m', m'', \cdots$ entsprechenden Parameter von φ. Eine Verschiebung des Punktes m allein giebt für φ ein partielles Differential, das wir mit $d_m\varphi$ bezeichnen wollen; ebenso giebt die Verschiebung des Punktes m' allein das partielle Differential $d_{m'}\varphi$; dasselbe gilt von den übrigen Punkten; die gleichzeitige Verschiebung aller Punkte endlich liefert das totale Differential $d\varphi$, das der Summe der partiellen gleich ist, d. h. man hat:

$$d\varphi = d_m\varphi + d_{m'}\varphi + \cdots$$

Bedeuten nun $v, v_1, v_2, \cdots$ die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen bei der Verschiebung des Punktes m, $v', v'_1, v'_2, \cdots$ die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen bei der Verschiebung von m', u. s. w., so hat man, wie oben gezeigt wurde:

$$d_m\varphi = \overline{Pv}\cdot dt, \quad d_{m'}\varphi = \overline{P'v'}\cdot dt, \cdots$$

folglich:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \overline{Pv} + \overline{P'v'} + \cdots = \Sigma\overline{Pv}, \tag{15}$$

und allgemein:

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = \Sigma\overline{Pv_{n-1}} + (n-1)\,\Sigma\overline{P_1 v_{n-2}}$$

$$+ \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}\,\Sigma\overline{P_2 v_{n-3}} + \cdots\, \Sigma\overline{P_{n-1}v}. \qquad (16)$$

Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich der Ausdruck für das Increment

$$\varDelta\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\tau + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\tau^2 + \cdots$$

bilden, welches die Function φ infolge einer beliebigen Bewegung der Punkte m, m', m'', $\cdots$ in der Zeit τ erhält.

Ist φ als Function der Coordinaten der Punkte m, m', m'', $\cdots$ gegeben, so ergeben sich die Parameter P, P', P'', $\cdots$ und deren geometrische Derivirte nach den in §. 112 dargelegten Regeln.

Beispiele: 1) Der Abstand r zweier Punkte m und m' von einander ist eine Function dieser Punkte. Gesetzt, m' sei fest, so ist r eine Function des Punktes m allein. Die diesem Punkte entsprechende Niveaufläche (r) ist eine Kugel vom Radius r, deren Mittelpunkt in m' liegt; der Parameter P ist gleich 1 und auf r in dem Sinne gerichtet, wohin r wächst, d. h. von m' nach m.

Betrachtet man aber r als Function des Punktes m' allein, so ist die Niveaufläche eine Kugel vom Radius r mit dem Mittelpunkte in m, und der Parameter P' ist gleich 1 und auf r von m nach m' hin gerichtet.

Nach Formel (15) hat man also:

$$\frac{dr}{dt} = v\cos(vr) - v'\cos(v'r), \qquad (17)$$

wo der Sinn des Abstandes r von m' nach m genommen ist; diese Formel stimmt mit dem in §. 18 Bewiesenen überein. Die Formel (17) giebt nun:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = v_1\cos(v_1, r) - v'_1\cos(v'_1, r) + \overline{P_1 v} + \overline{P'_1 v'};$$

da aber $\overline{P} = -\overline{P'}$, so ist $\overline{P_1} = -\overline{P'_1}$ und P_1 stellt offenbar die Winkelderivirte von r dar, die von m' nach m gerichtet ist. Ausserdem ist $\overline{v} - \overline{v'} = \overline{r_1}$; folglich $\overline{P_1 v} + \overline{P'_1 v'} = \overline{r_1 P_1}$; aber die Projection von r_1 auf P_1, das auf r senkrecht steht, ist $\overline{rP_1}$; folglich ist $\overline{P_1 v} + \overline{P'_1 v'} = rP_1^2$. Somit wird endlich:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = v_1 \cos(v_1, r) - v'_1 \cos(v'_1, r) + \overline{rP_1^2}. \qquad (18)$$

2) Es mögen $r, r', r'', \cdots r^{n-1}$ die Abstände zwischen $n+1$ Systempunkten bezeichnen, nämlich die Strecken mm', $m'm''$, $m''m'''$, $\cdots m^{(n-1)}m^{(n)}$. Die Summe dieser Abstände

$$\varphi = r + r' + r'' + \cdots + r^{(n-1)}$$

ist eine Function der Punkte $m, m', m'', \cdots m^{(n)}$. Die dem Punkte m entsprechende Niveaufläche ist eine Kugel vom Radius r mit dem Centrum in m'; der Parameter im Punkte m ist $P = 1$ und auf r von m' nach m gerichtet. Ebenso ist für den letzten Punkt $m^{(n)}$ die Niveaufläche (φ) eine Kugel vom Radius $r^{(n-1)}$, deren Centrum in $m^{(n-1)}$ liegt und deren Parameter $P^n = 1$ die Richtung von $m^{(n-1)}$ nach $m^{(n)}$ hat.

Nimmt man an, dass alle Systempunkte mit Ausnahme von m' fest sind, so ist φ eine Function des Punktes m' allein, und die Niveaufläche (φ) für diesen Punkt ist $r + r' =$ Const., d. h. ein durch Rotation um die Gerade mm'' entstandenes Ellipsoid, dessen Meridian eine Ellipse mit den Brennpunkten m und m'' ist; der Parameter P' liegt somit in der Ebene $mm'm''$, halbirt den Winkel $mm'm''$ und ist nach derselben Seite hin gerichtet, wie eine, die Summe $r + r'$ vergrössernde Verschiebung des Punktes m', nämlich nach der convexen Seite des Ellipsoids. Da P' die geometrische Summe der partiellen Parameter der beiden Functionen r und r' ist, welche gleich 1 und längs mm' und $m''m'$ gerichtet sind, so ist $P' = 2\cos\frac{1}{2}(mm'm'')$. Ebenso bestimmen sich die Parameter der Function φ, welche den übrigen, zwischen m und $m^{(n)}$ liegenden Punkten entsprechen.

Fallen die beiden Punkte m und $m^{(n)}$ in einen zusammen, d. h. ist $r + r' + r'' + \cdots + r^{(n-1)}$ der Perimeter eines geschlossenen Polygons, so müssen die Parameter P und $P^{(n)}$ durch einen einzigen P ersetzt werden, der den Winkel $m'mm^{(n-1)}$ halbirt und gleich $2\cos\frac{1}{2}(m'mm^{(n-1)})$ ist.

Wählt man für φ den halben Umfang p eines Dreieckes ABC, dessen Seiten a, b, c sind, so schneiden sich die Parameter von φ, welche den diesen Seiten gegenüberliegenden Eckpunkten A, B, C entsprechen, im Mittelpunkte des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises und sind resp. gleich:

$$2\left[\frac{p(p-a)}{bc}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 2\left[\frac{p(p-b)}{ca}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 2\left[\frac{p(p-c)}{ab}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Man bestimme ferner die Parameter der Functionen:

$$\varphi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \cdots \quad \text{und} \quad \varphi = r^2 + r'^2 + r''^2 + \cdots,$$

wo r, r', $r'' \cdots$ die Abstände der Punkte m, m', $m'' \cdots$ von einander sind.

116. Die Function φ eines Punktsystems kann zu gleicher Zeit auch eine Function der Zeit t sein, d. h. kann bei unveränderter Lage des Punktsystems mit der Zeit variiren. Als Beispiel kann die Function eines Systems von Punkten dienen, von denen einer oder mehrere gewissen Bewegungen unterworfen sind, d. h. deren Coordinaten als Functionen der Zeit gegeben sind. Es seien r und r' die Abstände der Punkte m und m' von einem Punkte O, der sich gleichförmig auf der geraden Linie AB bewegt; die Function $\varphi = r + r'$ der beiden Punkte m und m' ändert sich dann mit der Zeit bei einer gegebenen Lage der Punkte m und m' infolge der Bewegung von O.

Gesetzt, die Punkte m, m', O seien auf ein rechtwinkliges, geradliniges Coordinatensystem bezogen, und es bedeuten x, y, z die Coordinaten des Punktes m, x', y', z' die des Punktes m' zur Zeit t, α, β, γ die des Punktes O zur Zeit $t = 0$; ferner seien a, b, c die Projectionen der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes O auf die Coordinatenaxen; dann hat man:

$$\varphi = [(x-\alpha-at)^2 + (y-\beta-bt)^2 + (z-\gamma-ct)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$+ [(x'-\alpha-at)^2 + (y'-\beta-bt)^2 + (z'-\gamma-ct)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Sind $P, P', \cdots$ die Parameter der Function φ zur Zeit t und

$$\overline{P} + \overline{\varDelta_t P}, \quad \overline{P'} + \overline{\varDelta_t P'}, \ldots$$

die Parameter der Function $\varphi + \varDelta_t\varphi$ zur Zeit $t + \tau$ bei derselben Lage der Punkte $m, m', \cdots$, so sind $\overline{\varDelta_t P}$, $\overline{\varDelta_t P'}, \cdots$ die Parameter der Function $\varDelta_t\varphi$, und

$$\overline{\frac{1}{\tau}\varDelta_t P}, \quad \overline{\frac{1}{\tau}\varDelta_t P'}, \cdots$$

die Parameter der Function $\frac{1}{\tau}\varDelta_t\varphi$, welche auf den Richtungen

$\overline{\varDelta_t P}$, $\overline{\varDelta_t P'}$, $\cdots$ resp. aufzutragen sind; mithin sind die partiellen geometrischen Derivirten $\overline{(D_t P)}$, $\overline{(D_t P')}$, $\cdots$ der Parameter P, P', $\cdots$ die Parameter der partiellen Derivirten $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Wie in §. 114 findet man:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Sigma \overline{Pv} + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma \overline{Pv_1} + \Sigma \overline{v D_1 P} + \Sigma \overline{2v(D_t P)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \qquad (19)$$

. . . .

wo $D_1 P$, $D_1 P'$, ... die partiellen Derivirten der Parameter P, P', ... bedeuten, die unter der Annahme gebildet sind, dass φ sich nur infolge der Bewegung der Punkte m, m', ... ändert und dass es für die Lage des Systems zur Zeit $t + \tau$ denselben Werth hat, welchen es für die Lage zur Zeit t hatte.

Aus den Formeln (19) lässt sich das Increment zusammensetzen, welches die Function φ in der Zeit τ erhält, und zwar nach der Formel:

$$\varDelta \varphi = \frac{d\varphi}{dt} \tau + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{\tau^2}{2} + \cdots$$

XIII. Capitel.

Bedingungen der möglichen Bewegungen.

117. Die Bewegung eines Punktes oder eines Systems von Punkten kann gewissen Bedingungen unterworfen sein, infolge deren die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Bewegung nicht mehr willkürlich sind. Man nennt dann die Punkte *unfrei*. Eine den gegebenen Bedingungen genügende Bewegung heisst eine *mögliche Bewegung* oder eine *mögliche Verschiebung*. Die Lage, welche der Punkt oder das Punktsystem infolge solcher Bewegungen annimmt, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen einer solchen Bewegung heissen seine *mögliche Lage, möglichen Geschwindigkeiten, möglichen Beschleunigungen*.

Derartige Bedingungen kommen bei der Betrachtung der Bewegungen von Punkten vor, die physischen Körpern an-

gehören; sie sind die Folge gewisser Hypothesen über die mechanische Beschaffenheit der Körper, wie z. B. vollkommene Undurchdringlichkeit, Unausdehnbarkeit, Incompressibilität, vollkommene Starrheit, vollkommene Biegsamkeit. Die physischen Ursachen, durch welche die Punkte unfrei werden, nennt man *Zwang*, wenn es sich um einen einzigen Punkt handelt, und *mechanische Verbindungen der Punkte untereinander*, wenn man mehrere Punkte betrachtet. Die Bedingungen für die, von einem Zwange oder einer mechanischen Verbindung der Punkte herrührenden möglichen Verschiebungen treten im allgemeinen in Form von Gleichungen oder (die Gleichheit nicht ausschliessenden) Ungleichungen auf, welche die Eigenschaft ausdrücken, dass eine oder mehrere bekannte Functionen der betreffenden Punkte für jede mögliche Bewegung nicht abnehmen dürfen, d. h. entweder ihren Werth beibehalten oder wachsen müssen. Wir wollen dies an einigen speciellen Fällen näher erläutern.

Gesetzt, der Punkt m befinde sich auf einer gegebenen Fläche und könne in den einen der beiden durch dieselbe getrennten Räume nicht eindringen; er kann sich also nur auf der Fläche selbst oder in demjenigen Raume bewegen, in welchen einzudringen die Fläche ihn nicht hindert. Ist $V = \text{Const.}$ die Gleichung dieser Fläche, so sind $+V$ und $-V$ Functionen des Punktes m, und $V = \text{Const.}$ ist eine Niveaufläche für diese Functionen. Der Differentialparameter der einen dieser beiden Functionen im Punkte m ist nach der Seite hin gerichtet, wohin der Punkt m sich verschieben kann, der Differentialparameter der anderen nach der entgegengesetzten Seite. Bezeichnen wir mit φ denjenigen der beiden Werthe $+V$ und $-V$, dem der erstere Parameter angehört, so haben wir für die möglichen Verschiebungen des Punktes m die Bedingung $\varDelta\varphi = 0$ oder $\varDelta\varphi > 0$, welche man in der kürzeren Bezeichnungsweise $\varDelta\varphi \geqq 0$ zusammenfassen kann.*)

Ist $\varDelta\varphi$ das dem Zeitincremente τ entsprechende Increment

*) Man könnte auch $-\varphi$ statt φ betrachten und als Bedingung aufstellen $\varDelta(-\varphi) \leqq 0$; der Gleichförmigkeit halber werden wir jedoch immer diejenige von den beiden Functionen wählen, welche wachsen soll.

von φ und lässt sich dasselbe nach ganzen positiven Potenzen von τ entwickeln, so hat man

$$\frac{d\varphi}{dt}\cdot\tau+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot\frac{\tau^2}{2}+\cdots\geqq 0$$

als Bedingung für jede mögliche Verschiebung des Punktes m während der Zeit τ. Da diese Bedingung auch für unendlich kleine τ bestehen muss, so ist einer der beiden folgenden Fälle nothwendig und hinreichend für eine mögliche Verschiebung: 1) dass alle successiven Derivirten $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \cdots$ gleich Null sind oder 2) dass die erste nicht verschwindende unter ihnen positiv ist. Beachtet man nun die in §. 114 gefundenen Ausdrücke dieser Derivirten durch die Geschwindigkeit, die Beschleunigungen, die Differentialparameter der Function φ und die Derivirten dieser Parameter, so ergiebt sich im ersten Falle eine unbegrenzte Reihe von Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt}=0,\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}=0,\cdots,$$

denen die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen irgend einer möglichen Bewegung des Punktes m genügen müssen. Im zweiten Falle ergeben sich, wenn $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$ die erste nicht verschwindende Derivirte ist, die $n-1$ Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt}=0,\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}=0,\cdots,\ \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}}=0$$

als zwischen der Geschwindigkeit v und den $n-2$ Beschleunigungen $v_1, v_2, v_3, \cdots v_{n-2}$ bestehende Bedingungen und ausserdem die Ungleichung $\frac{d^n\varphi}{dt^n}>0$, welche ausser jenen Grössen noch die Beschleunigung v_{n-1} enthält; die übrigen Beschleunigungen $v_n, v_{n+1}, \cdots$ unterliegen keiner Bedingung mehr. Es kann auch vorkommen, dass der Punkt weder nach der einen noch nach der andern Seite von der Fläche $V=$ Const. abweichen kann. Dann ist die Gleichung $\Delta V=0$ die Bedingung der möglichen Bewegungen; dieselbe liefert dann die unbegrenzte Reihe von Gleichungen

$$\frac{dV}{dt}=0,\ \frac{d^2V}{dt^2}=0,\cdots,$$

welche zwischen der Geschwindigkeit und den Beschleunigungen bestehen müssen.

Beispiele.

a) Ein vollkommen biegsamer und unausdehnbarer Faden sei mit einem Ende unbeweglich im Punkte O befestigt und angespannt; sein anderes Ende repräsentirt dann einen Punkt, der sich nur entweder auf der Oberfläche der aus O als Mittelpunkt mit einem Radius gleich der Länge des Fadens beschriebenen Kugel oder innerhalb dieser Kugel bewegen kann. Die Oberfläche der Kugel stellt gleichsam eine undurchdringliche Hülle dar, durch welche der Punkt verhindert wird, aus dem inneren Raume der Kugel herauszutreten.

Bezeichnet man nun mit r den Abstand Om, so sind $+r$ und $-r$ zwei Functionen, für welche die Kugeloberfläche ein Niveau ist. Die Parameter dieser Functionen sind gleich 1 und sind längs der Geraden Om, der eine nach dem Aussenraume, der andere nach dem Inneren der Kugel gerichtet. Da der letztere der Function $-r$ entspricht, so müssen wir $\varphi = -r$ setzen; folglich ergiebt sich als Bedingung einer möglichen Bewegung des Punktes: $\Delta(-r) \geqq 0$. Diese Relation liefert zunächst als Bedingung, der die Geschwindigkeit unterworfen ist: $-\frac{dr}{dt} \geqq 0$, was dasselbe aussagt, wie $-v\cos(vr) \geqq 0$; man sieht hieraus, dass die Richtung der Geschwindigkeit v mit der Richtung von r, wenn man dieselbe im Sinne von O nach m rechnet, einen stumpfen oder einen rechten Winkel bilden muss. Wenn $-v\cos vr > 0$ ist, so unterliegen die Beschleunigungen $v_1, v_2, \ldots\ldots$ gar keiner Bedingung; im Falle $-v\cos(vr) = 0$ aber, d. h. wenn die Geschwindigkeit v die Kugel tangirt, muss die Beschleunigung erster Ordnung die Bedingung erfüllen: $-\frac{d^2r}{dt^2} \geqq 0$, welche in die folgende übergeht (s. §. 114):

$$-v_1\cos(v_1 r) - \frac{v^2}{r} \geqq 0.$$

Bezeichnet man mit ϱ den Radius der ersten Krümmung der Bahn des Punktes m, so hat man die Gleichung:

$$v_1\cos(v_1 r) = \frac{v^2}{\varrho}\cos(r\varrho) + \frac{dv}{dt}\cos(rv);$$

hierin ist aber das letzte Glied gleich Null, weil v auf r senkrecht steht. Daher nimmt die obige Bedingungsgleichung die Gestalt an:

$$\varrho \leqq -r\cos(r\varrho).$$

Man sieht hieraus, dass der erste Krümmungsradius der Bahn nicht grösser sein darf als der Radius des Kreises, in dem die Kugel von der Ebene der ersten Krümmung geschnitten wird. Im Falle $\varrho = -r\cos(r\varrho)$ muss die Bedingung $-\frac{d^3r}{dt^3} \geqq 0$ erfüllt sein, welche ausser der Geschwin-

digkeit v und der Beschleunigung v_1 noch die Beschleunigung zweiter Ordnung v_2 enthält, u. s. f.

b) Ein vollkommen starrer Körper lässt sich als ein System von Punkten betrachten, deren gegenseitige Abstände sich bei der Bewegung des Körpers nicht ändern. Soll einer der Punkte des Körpers, O, unbeweglich bleiben, so kann jeder andere Punkt m desselben sich nur auf der Oberfläche einer um O mit dem Radius Om beschriebenen Kugel bewegen; bezeichnet man daher den Abstand Om mit r, so ist $\varDelta r = 0$ für eine mögliche Bewegung des Punktes m; daraus ergiebt sich aber für die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen die unbegrenzte Reihe von Bedingungen:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = 0, \ldots$$

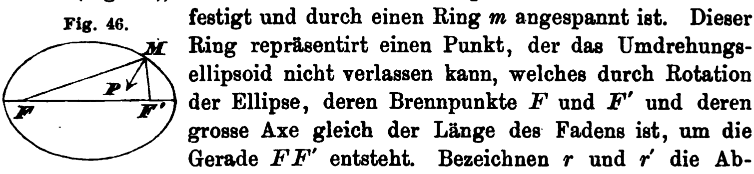
Die beiden ersten Gleichungen geben:

$$\cos(vr) = 0, \quad \varrho = -r\cos(r\varrho).$$

Dies zeigt, dass die Geschwindigkeit die Kugel, auf der der Punkt m sich bewegt, berühren muss und dass der Kreis, in welchem die Ebene der ersten Krümmung der Bahn jene Kugel schneidet, der Kreis der ersten Krümmung ist.

c) Denken wir uns einen vollkommen unausdehnbaren und biegsamen Faden (Fig. 46), der mit seinen beiden Endpunkten in F und F' befestigt und durch einen Ring m angespannt ist. Dieser Ring repräsentirt einen Punkt, der das Umdrehungsellipsoid nicht verlassen kann, welches durch Rotation der Ellipse, deren Brennpunkte F und F' und deren grosse Axe gleich der Länge des Fadens ist, um die Gerade FF' entsteht. Bezeichnen r und r' die Abstände Fm und $F'm$, so muss man $\varphi = -r - r'$ setzen, um eine Function des Punktes m zu erhalten, welche bei einer möglichen Bewegung nicht abnehmen darf; also ist im vorliegenden Falle die Bedingung für die möglichen Bewegungen: $-\varDelta r - \varDelta r' \geqq 0$. Der Differentialparameter der Function $-r-r'$ ist $P = 2\cos\frac{1}{2}(FmF')$ und ist nach dem Innern des Ellipsoids gerichtet (s. Beisp. 2, §. 115). Jede mögliche Geschwindigkeit muss einen spitzen oder einen rechten Winkel mit dieser Richtung bilden.

Fig. 46.



118. Die Fläche (φ), auf der der Punkt m liegt, kann sich mit der Zeit ändern und dabei zu jeder Zeit t der Verschiebung des Punktes m nach demjenigen der beiden durch die Fläche getrennten Räume, für welchen $\varDelta\varphi < 0$ ist, ein Hinderniss entgegensetzen. Geht t in $t+\tau$ über, so nimmt (φ) eine andere Lage an; hierbei muss die Lage, welche der Punkt m einnimmt, sowohl im Falle seiner Ruhe, als auch im Falle seiner Bewegung, zur Zeit $t+\tau$ derart sein, dass

φ ein positives oder der Null gleiches Increment $\Delta\varphi$ erhält; folglich ist wiederum $\Delta\varphi \geqq 0$ oder

$$\frac{d\varphi}{dt}\tau + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot\frac{\tau^2}{2} + \cdots \geqq 0$$

die Bedingung einer möglichen Bewegung. Hieraus ergiebt sich im Falle $\Delta\varphi = 0$ die unbegrenzte Reihe von Gleichungen $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \cdots$, welche zwischen der Geschwindigkeit und den Beschleunigungen bestehen. Im Falle aber $\Delta\varphi > 0$ ist, erhält man eine beschränkte Anzahl von Gleichungen und die Ungleichung, welche die Bedingung ausdrückt, dass die erste nicht verschwindende der Derivirten $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \cdots$ positiv sein muss. Alle diese Bedingungen lassen sich nach der in §. 114 dargelegten Methode entwickeln.

Gesetzt, z. B., der Punkt m sei durch einen Faden mit einem anderen Punkte O verbunden, welcher letztere sich mit einer nach Grösse und Richtung constanten Geschwindigkeit a bewegt; infolge dessen muss der Punkt m auf der Oberfläche einer Kugel bleiben, deren Radius gleich der Länge des Fadens ist und deren Mittelpunkt O eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt. In jeder Lage der Kugel kann der Punkt m nur entweder auf der Oberfläche oder innerhalb der Kugel liegen. Bedeutet r den Abstand Om, so muss man $\varphi = -r$ setzen; somit ist die Bedingung für eine mögliche Geschwindigkeit

$$-v\cos(vr) - \frac{\partial r}{\partial t} \geqq 0,$$

wobei r im Sinne von O nach m gerechnet ist. Man sieht leicht, dass $-\frac{\partial r}{\partial t} = a\cos(ar)$ ist, und folglich lässt sich die vorstehende Gleichung auch in der Form schreiben:

$$-v\cos(vr) + a\cos(ar) > 0.$$

Im Falle

$$-v\cos(vr) + a\cos(ar) = 0$$

hat man als Bedingung für die Beschleunigung erster Ordnung:

$$-v_1\cos(v_1 r) - v\Theta\cos(v\Theta) + a\Theta\cos(a\Theta) \geqq 0,$$

wenn Θ die Winkelderivirte von r ist.

119. Die möglichen Bewegungen eines Punktes können zwei oder mehr Bedingungen von der Form $\Delta\varphi \geqq 0$ unterworfen sein.

Beispiele:

a) Man denke sich einen Punkt m mit zwei festen Punkten A und B durch biegsame, unausdehnbare Fäden Am und Bm verbunden. Sind die Fäden angespannt, so befindet sich der Punkt m auf der Schnittcurve der beiden Kugeln, deren Mittelpunkte A und B und deren Radien Am und Bm sind. Bezeichnet nun r den Abstand des Punktes m von A und r' den von B, so hat man für eine mögliche Bewegung des Punktes m die beiden Bedingungen:

$$\Delta(-r) \geqq 0, \quad \Delta(-r') \geqq 0.$$

Ist $\Delta(-r) = 0$ und $\Delta(-r') = 0$, so bewegt sich der Punkt m auf der Schnittcurve der Kugeln. Ist aber $\Delta(-r) > 0$ und $\Delta(-r') = 0$, so dringt der Punkt m in das Innere der Kugel vom Radius Am ein, bleibt aber auf der Oberfläche der anderen Kugel. Ist dagegen $\Delta(-r) = 0$ und $\Delta(-r') > 0$, so kann der Punkt die zweite Kugelfläche verlassen und muss auf der ersteren bleiben; im Falle $\Delta(-r) > 0$ und $\Delta(-r') > 0$ endlich kann der Punkt beide Kugeloberflächen verlassen.

Wenn die Kugelmittelpunkte A und B in gewissen Bewegungen begriffen sind, so werden die Abstände $-r$ und $-r'$ Functionen des Punktes und der Zeit der Bewegung, und wiederum sind $\Delta(-r) \geqq 0$, $\Delta(-r') \geqq 0$ die Bedingungen der Möglichkeit der Bewegung.

b) Der Punkt m sei durch Fäden mit drei Punkten A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, verbunden. Sind die Fäden angespannt, so liegt m im Durchschnitt der drei Kugeln, deren Mittelpunkte A, B, C und deren Radien die Längen der Fäden sind. Bezeichnen r, r', r'' die Abstände des Punktes m von A, B, C, so hat man für eine mögliche Bewegung des Punktes m die drei Bedingungen:

$$\Delta(-r) \geqq 0, \quad \Delta(-r') \geqq 0, \quad \Delta(-r'') \geqq 0.$$

Doch muss man hier den Fall

$$\Delta(-r) = 0, \quad \Delta(-r') = 0, \quad \Delta(-r'') = 0 \qquad \text{(a)}$$

ausschliessen, wenn die Punkte A, B, C fest sind; denn der Punkt m kann sich nicht bewegen, wenn er auf allen drei Kugel bleiben soll. Haben dagegen die Punkte A, B, C gewisse gegebene Bewegungen, so ist die Bewegung des Punktes m unter der Bedingung (a) möglich.

120. Ist φ eine Function des Systems der Punkte m, m', m'', ... und kann diese Function infolge der mechanischen Verbindungen der Punkte unter einander nicht abnehmen, so muss jede mögliche Bewegung des Punktsystems der Bedingung $\Delta\varphi \geqq 0$ genügen. Dies führt wieder entweder auf die unbegrenzte Reihe von Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \cdots$$

als Bedingungen, die zwischen der Geschwindigkeit und den successiven Beschleunigungen bestehen müssen, oder auf die $n-1$ Gleichungen $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \cdots \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}} = 0$, verbunden mit der einen Ungleichung $\frac{d^n\varphi}{dt^n} > 0$, als Bedingungen, welche zwischen der Geschwindigkeit v und den $n-1$ Beschleunigungen bestehen, wobei $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$ die erste nicht verschwindende der Derivirten $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \cdots$ ist. Dabei kann φ eine Function der Punkte und der Zeit sein. Diese Bedingungen lassen sich immer nach den in §. 115 und §. 116 dargelegten Regeln entwickeln. Es können auch mehrere Bedingungen von der Form $\Delta\varphi \geqq 0$ zugleich auftreten.

Beispiele.

a) Sind zwei Punkte m und m' durch einen biegsamen und unausdehnbaren Faden verbunden, so können sie, wenn der Faden angespannt ist, sich nicht so verschieben, dass ihr Abstand wächst; bezeichnet man also diesen Abstand mit r, so hat man für eine mögliche Bewegung die Bedingung $\Delta(-r) \geqq 0$, aus der sich zunächst als Bedingung für die möglichen Geschwindigkeiten v und v' ergiebt:

$$-v\cos(vr) + v'\cos(v'r) \geqq 0$$

[s. §. 115, Form. (17)]; wenn nun

$$-v\cos(vr) + v'\cos(v'r) = 0$$

ist, so hat man ferner als Bedingung für die Beschleunigungen erster Ordnung v_1 und v'_1:

$$-v_1\cos(v_1 r) + v'_1\cos(v'_1 r) - r P_1{}^2 \geqq 0,$$

[s. §. 115, Form. (18)].

b) Für die mögliche Bewegung zweier, einem vollkommen starren Körper angehöriger Punkte m und m', ist die Bedingung $\Delta r = 0$, aus der sich die unbegrenzte Reihe von Gleichungen ergiebt:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = 0, \ldots$$

c) Die Mittelpunkte m und m' zweier vollkommen starrer, einander berührender Kugeln repräsentiren zwei Punkte, deren Abstand r nicht abnehmen kann; daher ist $\Delta r \geqq 0$ die Bedingung für eine mögliche Bewegung dieser Punkte. Dieselbe giebt für die Geschwindigkeiten die Bedingung:

$$v \cos(v r) - v' \cos(v' r) \geqq 0.$$

Ist

$$v \cos(v r) - v' \cos(v' r) = 0,$$

so hat man noch die Bedingung für die Beschleunigungen erster Ordnung:

$$v_1 \cos(v_1 r) - v'_1 \cos(v'_1 r) + r P_1{}^2 \geqq 0.$$

d) Es sei $m\, m'\, m''\, m'''\, m''''$ ein *Seilpolygon*, d. h. ein vollkommen biegsames, unausdehnbares Seil, welches die Gestalt eines Polygons hat und dessen Seiten $mm', m'm'', m''m''', m'''m''''$ sind. Die äussersten Punkte und die Ecken dieses Polygons bilden ein System von Punkten, deren Abstände

$$mm' = r, \quad m'm'' = r', \quad m''m''' = r'', \quad m'''m'''' = r'''$$

nicht wachsen können; folglich müssen die möglichen Bewegungen dieser Punkte den folgenden Bedingungen genügen:

$$\varDelta(-r) \geqq 0, \quad \varDelta(-r') \geqq 0, \quad \varDelta(-r'') \geqq 0, \quad \varDelta(-r''') \geqq 0.$$

e) Wenn das Polygon $m\, m'\, m''\, m'''\, m''''$ eine aus unausdehnbaren und unbiegsamen geradlinigen Gliedern $m m', m' m'', m'' m''', m''' m''''$ bestehende Kette darstellt, und diese Glieder sich um die Punkte m', m'', m''' drehen können, so hat man als Bedingungen für die möglichen Bewegungen der Punkte die Gleichungen:

$$\varDelta r = 0, \quad \varDelta r' = 0, \quad \varDelta r'' = 0, \quad \varDelta r''' = 0.$$

f) Wenn endlich die Ecken m', m'', m''' des Seilpolygons $m m' m'' m''' m''''$ Ringe sind, welche an dem Seile entlang gleiten können, so hat man für die möglichen Bewegungen der Punkte m, m', m'', m''', m'''' die eine Bedingung:

$$\varDelta(-r - r' - r'' - r''') \geqq 0.$$

Bestimmt man für die Function $-r - r' - r'' - r'''$ die Differentialparameter und deren geometrische Derivirte, wie dies in §. 115, Beisp. 2 gezeigt wurde, so lassen sich hieraus leicht die Bedingungen für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erhalten.

121. Die möglichen Bewegungen eines unfreien Punktes oder eines Systems von unfreien Punkten sind von zweierlei Art: *befreiende* und *nichtbefreiende*. Befreiende Bewegung werden wir eine solche nennen, infolge deren die Punkte frei werden, und nichtbefreiende eine Bewegung, während welcher die Punkte unfrei bleiben. Befindet sich z. B. der Punkt m auf einer Fläche (φ) und sollen seine möglichen Bewegungen der Bedingung $\varDelta\varphi \geqq 0$ genügen, so wird er durch jede Bewegung, für die $\varDelta\varphi > 0$ ist, frei; denn er verlässt dann die Fläche. Bei jeder Bewegung aber, für die $\varDelta\varphi = 0$ ist, bleibt er auf der Fläche, d. h. er bleibt unfrei.

Im allgemeinen ist, wenn mechanische Hindernisse oder Verbindungen erfordern, dass alle möglichen Bewegungen eines Punktes oder Punktsystems der einen Bedindung $\varDelta\varphi \geqq 0$ genügen, wo φ eine Function entweder der Punkte allein, oder der Punkte und der Zeit ist, jede Bewegung, welche $\varDelta\varphi > 0$ liefert, eine befreiende, und jede, die $\varDelta\varphi = 0$ giebt, eine nichtbefreiende Bewegung. Dies lässt sich folgendermassen beweisen.

Es sei $(M, M', M'', \cdots)$ die Lage des Systems der Punkte $(m, m', m'', \cdots)$ zur Zeit t und $(A, A', A'', \cdots)$ die Lage, welche dasselbe System zur Zeit $t + \tau$ infolge irgend einer möglichen Bewegung annimmt. Denken wir uns ferner eine Bewegung mit beliebigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, welche in der Zeit Θ das System $(m, m', m'', \cdots)$ aus der Lage $(A, A', A'', \cdots)$ in irgend eine andere Lage $(B, B', B'', \cdots)$ überführt. Für die Lage $(A, A', A'', \cdots)$ und die Zeit $t + \tau$ nimmt die Function φ den Werth $\varphi + \varDelta\varphi$ an, welcher beim Uebergange des Systems $(m, m', m'', \cdots)$ aus der Lage $(A, A', A'', \cdots)$ in $(B, B', B'', \cdots)$ ein positives oder negatives Increment $\varDelta'\varphi$ erhält. Ist nun $\varDelta\varphi > 0$, so kann man die Zeit Θ so klein wählen, dass der Absolutwerth von $\varDelta'\varphi$ kleiner als $\varDelta\varphi$ wird; dann ist $\varDelta\varphi + \varDelta'\varphi > 0$ und folglich ist $(B, B', B'', \cdots)$ eine solche Lage des Systems $(m, m', m'', \cdots)$, bei welcher der Werth von $\varphi\ (B, B', B'', \cdots t + \tau + \Theta)$ grösser ist als φ. Jede solche Lage gehört aber zu den möglichen Lagen des Systems. Wenn also $(A, A', A'', \cdots)$ eine Lage ist, die das System infolge einer Bewegung angenommen hat, für die $\varDelta\varphi > 0$, so ist jede Verschiebung des Systems aus dieser Lage in eine andere, benachbarte $(B, B', B'', \cdots)$, die hinreichend nahe gewählt wird, möglich. Mit anderen Worten: die mechanischen Verbindungen hindern nicht die Bewegung des Systems $(m, m', m'', \cdots)$ aus der Lage $(A, A', A'', \cdots)$ in irgend eine benachbarte, mit beliebigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wenn dagegen für die Bewegung, welche das System in der Zeit τ aus der Lage $(M, M', M'', \cdots)$ in $(A, A', A'' \cdots)$ überführt, $\varDelta\varphi = 0$ ist, so ist die Bewegung aus der Lage $(A, A', A'', \cdots)$ nach $(B, B', B'', \cdots)$ in der Zeit Θ nur dann

möglich, wenn $\Delta'\varphi \geqq 0$ ist, wodurch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieser Bewegung bedingt sind; also ist im Falle $\Delta\varphi = 0$ das System $(m, m', m'', \cdots)$, das sich zur Zeit $t + \tau$ in der Lage $(A, A', A'', \cdots)$ befindet, unfrei.

Im Beispiel a) des vorhergehenden Paragraphen ist die Bewegung, welche $\Delta(-r) > 0$ liefert, eine befreiende. Infolge einer solchen Bewegung hört der Faden auf angespannt zu sein und jeder der Punkte m und m' kann sich unabhängig von der Bewegung des anderen nach allen Richtungen hin bewegen. Eine Bewegung aber, für die $\Delta(-r) = 0$ wird, ist eine nichtbefreiende; der Faden bleibt gespannt und mithin bleiben die Punkte m und m' unfrei.

Für die Punkte des Beispieles b) des vorigen Paragraphen giebt es keine befreiende Bewegungen. Indem wir die Function φ, die für alle möglichen Bewegungen des Systems nicht abnehmen darf, als Repräsentanten einer einzelnen mechanischen Verbindung betrachten, wollen wir diese Verbindung eine *befestigende* nennen, wenn φ für alle möglichen Bewegungen seinen Werth behalten muss, d. h. wenn es keine befreienden Bewegungen giebt. In diesem Falle hindert nichts, φ mit $-\varphi$ zu vertauschen, sofern dies vortheilhaft erscheint; denn die Bedingung $\Delta(-\varphi) = 0$ ist dieselbe, wie $\Delta\varphi = 0$.

Wenn aber φ wachsen kann, d. h. wenn die Verbindung befreiende Bewegungen zulässt, so werden wir eine solche Verbindung eine *nichtbefestigende* nennen. Die Unveränderlichkeit des Abstandes zweier Punkte eines starren Körpers kann als Beispiel für eine befestigende Verbindung dienen; ein angespannter Faden aber, der zwei Punkte verbindet, ist eine nichtbefestigende Verbindung.

Wenn die mechanischen Verbindungen erfordern, dass mehrere Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ bei einer möglichen Bewegung den Bedingungen

$$\Delta\varphi_1 \geqq 0, \quad \Delta\varphi_2 \geqq 0, \quad \Delta\varphi_3 \geqq 0, \cdots \tag{a}$$

genügen sollen, so werden wir diese Verbindungen als die Gesammtheit mehrerer Verbindungen betrachten, welche einzeln für sich die Bedingungen (a) liefern.

Diese Voraussetzung ist bei den in der Mechanik wirklich

vorkommenden zwingenden Verbindungen gerechtfertigt. Damit bei dem gemeinsamen Bestehen dieser Verbindungen keine befreienden Bewegungen statt haben, ist erforderlich, dass mindestens eine der Verbindungen eine befestigende sei.

122. Wenn die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ nur Functionen der Systempunkte sind, d. h. als Functionen der Coordinaten dieser Punkte ausgedrückt werden können, ohne die Zeit explicit zu enthalten, so darf die Anzahl der von einander unabhängigen Functionen die dreifache Anzahl der Punkte d. h. die Zahl aller, die Lage des Systems bestimmenden Coordinaten nicht übersteigen. Ist nämlich m die Anzahl der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ und n die Anzahl aller Coordinaten und ist hierbei $m > n$, so erhält man durch Elimination der Coordinaten $m - n$ Gleichungen von der Form:

$$F_1(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m) = 0, \quad F_2(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m) = 0, \cdots$$
$$\cdots F_{m-n}(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m) = 0;$$

infolge dieser Gleichungen sind aber $m - n$ Grössen der Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ Functionen der übrigen n. Daher müssen auch in der Reihe der Bedingungen der möglichen Bewegungen

$$\Delta\varphi_1 \gtreqless 0, \quad \Delta\varphi_2 \gtreqless 0, \cdots \Delta\varphi_m \gtreqless 0$$

$m - n$ dieser Bedingungen Folgen der übrigen sein. Wenn die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ die unabhängigen Incremente $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \cdots \Delta\varphi_n$ erhalten, so ist das Increment $\Delta\varphi_{n+1}$ eine Function derselben; seine Grösse und sein Vorzeichen hängen deshalb von den Grössen $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \cdots$ ab; daher müssen, wenn die Bedingung $\Delta\varphi_{n+1} \gtreqless 0$ zugleich mit den Bedingungen

$$\Delta\varphi_1 \gtreqless 0, \quad \Delta\varphi_2 \gtreqless 0, \cdots \Delta\varphi_n \gtreqless 0, \tag{b}$$

bestehen soll, die Coefficienten der Potenzen von $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \cdots$ in dem Ausdruck für $\Delta\varphi_{n+1}$ gewissen Bedingungen genügen. Bei unendlich kleinen Werthen von $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \cdots \Delta\varphi_n$ bestimmt sich das Vorzeichen von $\Delta\varphi_{n+1}$ durch das Zeichen des Ausdruckes:

$$\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1 + \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial\varphi_n}\Delta\varphi_n,$$

und wenn dasselbe für alle, den Bedingungen (b) genügende Werthe von $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \cdots \Delta\varphi_n$ positiv sein soll, so ist er-

forderlich, dass die partiellen Derivirten $\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_2}, \cdots \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n}$ insgesammt positiv sind. Dieselbe Schlussweise gilt auch für die übrigen Functionen $\varphi_{n+2}, \cdots \varphi_m$.

Ist $m = n$ und sind alle Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ unabhängig von einander, sind überdies alle Verbindungen befestigende, so ist eine Bewegung der Systempunkte nicht möglich, d. h. die Gleichungen

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad \Delta \varphi_2 = 0, \cdots \Delta \varphi_n = 0$$

sind die Bedingungen der Unbeweglichkeit des Punktsystems. Denn in diesem Falle müssen die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ constant bleiben, und folglich müssen es auch alle Coordinaten, die man als Functionen der Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ allein ausdrücken kann. Im vorliegenden Falle hat man die Gleichungen:

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \cdots \varphi_n = c_n, \tag{c}$$

wo $c_1, c_2, \cdots c_n$ gewisse Constante sind, die sich aus der gegebenen Lage des Systems bestimmen. Es kann jedoch vorkommen, dass eine oder mehrere der Gleichungen (c) Folgen der anderen sind; dann können die Coordinaten der Punkte sich ändern, ohne die Gleichungen (c) aufzuheben; folglich ist eine Bewegung des Systems möglich. Dies tritt z. B. ein, wenn die aus den partiellen Derivirten der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ nach den Coordinaten gebildete Functionaldeterminante zu Null wird, wie aus der Theorie der Determinanten bekannt ist.

Wenn die befestigenden Verbindungen verlangen, dass n verschiedene Functionen der Zeit und der Coordinaten constant seien, so erhält man n Gleichungen, vermittelst derer alle Coordinaten als bestimmte Functionen der Zeit ausgedrückt werden; jeder Punkt kann nur eine bestimmte Bewegung haben.

Wenn die verschiedenen, von den befestigenden Verbindungen herrührenden Gleichungen die Zeit nicht explicit enthalten und wenn ihre Anzahl um Eins geringer als die Zahl aller Coordinaten, d. h. gleich $n - 1$ ist, so muss jeder Systempunkt eine bestimmte Bahn haben. Denn man kann in diesem Falle aus $n - 1$ Gleichungen alle Coordinaten, ausser dreien, die einem der Punkte angehören, eliminiren; dadurch ergeben

sich aber zwei Gleichungen für die Bahn jenes Punktes. Derartige befestigende Verbindungen heissen *vollkommene.*

Ist die Anzahl der verschiedenen, zwischen den n Coordinaten bestehenden Gleichungen gleich $n - 2$, so erhält man durch Elimination aller Coordinaten, ausser denen eines einzigen Punktes, nur eine Gleichung, nämlich die Gleichung einer Fläche, auf welcher der letzte Punkt bleiben muss; folglich ist in diesem Falle jeder Punkt der Bedingung unterworfen auf einer bestimmten Fläche zu bleiben.

Ist allgemein m die Anzahl der verschiedenen, die Zeit nicht explicit enthaltenden Gleichungen, die man durch Untersuchung der mechanischen Verbindungen erhält, und ist $m < n$, so lassen sich alle Coordinaten als Functionen von $n - m$ unabhängigen Variablen darstellen; als solche Variablen kann man dann beliebige Functionen der Zeit wählen, um eine mögliche Bewegung hervorzubringen.

123. Enthalten die Functionen φ die Zeit nicht explicit, so haben die Bedingungen der möglichen Geschwindigkeiten v, v', v'', $\cdots$ die Form:

$$\Sigma \overline{Pv} \geqq 0$$

(s. §. 115), wo P, P', $\cdots$ die Parameter der Function φ sind. Sind in diesem Falle die Geschwindigkeiten v, v', v'', $\cdots$ derart, dass sie der Gleichung

$$\Sigma \overline{Pv} = 0 \tag{a}$$

genügen, so werden auch die den ersteren entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten $-\overline{v}$, $-\overline{v'}$, $\cdots$ derselben Gleichung genügen; denn die Gleichung (a) lässt sich durch $\Sigma(-\overline{Pv}) = 0$ ersetzen. *Wenn also alle Functionen des Systems die Zeit nicht explicit enthalten und alle Derivirten dieser Functionen nach der Zeit für irgend ein System von möglichen Geschwindigkeiten zu Null werden, so erhält man ein ebenfalls mögliches System von Geschwindigkeiten, wenn man den Sinn jener Geschwindigkeiten, ohne ihre Grösse zu ändern, umkehrt.*

Hieraus folgt zugleich, *dass, wenn alle Verbindungen befestigende sind, jedes System möglicher Geschwindigkeiten in das entgegengesetzte verwandelt werden kann.*

Nehmen wir wieder an, die Zeit komme in der Function φ nicht explicit vor und es seien $(v, v', v'', \cdots)$ und $(u, u', u'', \cdots)$ zwei Systeme möglicher Geschwindigkeiten. Wenn man diese Geschwindigkeiten geometrisch addirt, so ergeben sich die neuen Geschwindigkeiten:

$$\overline{w} = \overline{v} + \overline{u}, \quad \overline{w'} = \overline{v'} + \overline{u'}, \cdots,$$

die, wie leicht zu sehen, ebenfalls möglich sind. Da nämlich $\Sigma\overline{Pv} \geqq 0$ und $\Sigma\overline{Pu} \geqq 0$ ist, so ist auch

$$\Sigma(\overline{Pv} + \overline{Pu}) \geqq 0;$$

nun ist aber $\overline{Pv} + \overline{Pu} = \overline{Pw}$; also ist $\Sigma\overline{Pw} \geqq 0$, d. h. die Geschwindigkeiten $(w, w', \cdots)$ genügen jeder der Bedingungen der möglichen Bewegungen.

Ist $\Sigma\overline{Pv} \geqq 0$ und $\Sigma\overline{Pu} = 0$, so hat man:

$$\Sigma\overline{P(\overline{v} - \overline{u})} \geqq 0,$$

d. h. die geometrischen Differenzen $\overline{v} - \overline{u}, \overline{v'} - \overline{u'}, \cdots$ repräsentiren gleichfalls ein System möglicher Geschwindigkeiten.

124. Statt der Geschwindigkeiten $v, v', v'', \cdots$ betrachtet man zuweilen die unendlich kleinen Wegstrecken, welche die Punkte mit jenen Geschwindigkeiten in derselben Zeit dt zurücklegen können, d. h. die Differentialverschiebungen

$$ds = v\,dt, \quad ds' = v'dt, \cdots$$

nach den Richtungen der Tangenten an die Trajectorien; diese Verschiebungen sind den Differentialen der zur Zeit t zurückgelegten Wege gleich (s. §. 11). Solche Verschiebungen erfüllen Bedingungen von der Form:

$$\Sigma\overline{Pds} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot dt \geqq 0$$

(s. §. 116, Form. 19). Bedingungen von dieser Form nennt man gewöhnlich Bedingungen der unendlich kleinen möglichen Verschiebungen.

Wenn die Functionen φ die Zeit nicht explicit enthalten, oder wenn sie dieselbe enthalten, aber die partiellen Derivirten $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ zur Zeit t verschwinden, so kann man annehmen, dass die möglichen Geschwindigkeiten $v, v', v'', \cdots$ gleich Null sind

und dass die mögliche Bewegung des Punktsystems nur durch die Beschleunigungen bestimmt wird. In diesem Falle müssen die Beschleunigungen erster Ordnung v_1, v'_1, $\cdots$ Bedingungen von der Form

$$\Sigma \overline{P v_1} \geqq 0$$

(s. §. 114) erfüllen, wenn die φ die Zeit nicht explicit enthalten, und Bedingungen von der Form

$$\Sigma \overline{P v_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \geqq 0,$$

im entgegengesetzten Falle [s. §. 116, Form. (19)].

Ausgehend von den Bedingungen für die möglichen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen kann man die Eigenschaften der möglichen Bewegungen von Punktsystemen untersuchen. Wir werden dies für das unveränderliche System durchführen, d. h. für ein System von Punkten, deren gegenseitige Abstände sich während der Zeit der Bewegung nicht ändern können.

XIV. Capitel.

Mögliche Bewegungen eines unveränderlichen Punktsystems.

125. Ein System von Punkten, deren gegenseitige Abstände sich während der Dauer der Bewegung nicht ändern können, heisst ein *unveränderliches System.* Dasselbe heisst frei, wenn ausser der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Abstände der Punkte weiter keine Bedingungen vorhanden sind. Betrachten wir zunächst die Eigenschaften der möglichen Bewegungen eines freien unveränderlichen Systems.

126. Wir beginnen mit der Untersuchung der Geschwindigkeiten der auf einer und derselben Geraden liegenden Punkte. Die Bedingung der Unveränderlichkeit des Abstands $\overline{u}$ zweier Punkte M und N erfordert erstens, dass die Derivirte dieser geometrischen Function nach der Länge, d. h. $\frac{du}{dt}$, gleich Null sei; folglich muss ihre totale geometrische Derivirte $\overline{u_1}$, wenn sie nicht gleich Null ist, auf $\overline{u}$ senkrecht stehen. Nimmt man

M als Anfangspunkt von $\overline{u}$ und bezeichnet mit α und β die Geschwindigkeiten der Punkte M und N, so hat man nach dem Lehrsatz des §. 18: $\overline{u_1} = \overline{\beta} - \overline{\alpha}$, was infolge der Bedingung $\frac{du}{dt} = 0$ oder $u_1 \cos(u_1 u) = 0$ übergeht in:

$$\beta \cos(\beta u) = \alpha \cos(\alpha u), \qquad (1)$$

d. h. *die Projectionen der Geschwindigkeiten zweier Punkte M und N auf ihre Verbindungslinie sind einander gleich.*

Folgerung 1. Die Geschwindigkeiten aller, in einer und derselben Geraden liegenden Punkte eines unveränderlichen Systems haben gleiche Projectionen auf diese Gerade.

Folgerung 2. Wenn die Geschwindigkeit irgend eines Punktes einer Geraden gleich Null ist oder auf der Geraden senkrecht steht, so ist auch die Geschwindigkeit jedes anderen Punktes dieser Geraden entweder gleich Null oder senkrecht zu der Geraden.

Aus den Geschwindigkeiten zweier Punkte M und N lässt sich leicht die Geschwindigkeit jedes andern Punktes der Geraden MN ableiten.

Es stelle NA (Fig. 47) die Geschwindigkeit $\overline{\beta}$ dar und AB eine der Geschwindigkeit $\overline{\alpha}$ geometrisch gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Strecke; dann repräsentirt die Strecke $\overline{NB}$ nach §. 18 die geometrische Derivirte $\overline{u_1}$. Da $u_1 \cos(u_1 u) = 0$ ist, so steht NB senkrecht auf MN. Die Winkelderivirte Θ ist gleich dem Verhältniss $\frac{u_1}{u}$. Zieht man also die Gerade MB, so ist $\Theta = \frac{NB}{MN} = \tan(BMN)$.

Fig. 47.

Um nun die Geschwindigkeit eines beliebigen in der Geraden MN liegenden Punktes P zu erhalten, ziehe man PC parallel MB und verbinde C mit A; die Strecke NC ist dann die geometrische Derivirte von PN, und da $-\overline{CA} = \overline{NA} - \overline{NC}$ so ist die der $\overline{CA}$ geometrisch gleiche Strecke $\overline{PQ}$ die Geschwindigkeit des Punktes P. Diese Geschwindigkeit hat ihren kleinsten Werth, wenn CA senkrecht auf NB steht; fällt man also von A das Perpendikel AD auf NB und zieht DO pa-

rallel BM, so findet man den Punkt O, der die kleinste Geschwindigkeit $\sigma = DA$ besitzt.

Bei dieser Construction lassen sich folgende Fälle unterscheiden.

1) Die Geschwindigkeiten $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ sind nicht parallel. Dann kann AD oder σ nicht gleich Null sein, und es giebt daher auf der Geraden MN keinen Punkt, dessen Geschwindigkeit gleich Null wäre.

2) Die Geschwindigkeiten $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ sind einander geometrisch gleich. Dann ist $NB = 0$ und $\overline{CA} = \bar{\beta} = \bar{\alpha}$; folglich sind in diesem Falle die Geschwindigkeiten aller Punkte einander geometrisch gleich.

3) Die Geschwindigkeiten $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ sind parallel, aber nicht gleich, oder gleich, aber von entgegengesetztem Sinne. Dann sind sie nothwendig senkrecht auf MN; denn der Punkt A fällt in die Gerade NB, die zu MN senkrecht ist. Da nun $AD = 0$, so ist $\sigma = 0$; mithin giebt es in diesem Falle auf der Geraden MN einen Punkt O, dessen Geschwindigkeit gleich Null ist. Man sieht leicht, dass dieser Punkt der Schnittpunkt der Geraden MN mit der Verbindungslinie der Endpunkte der Geschwindigkeiten $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ ist (Fig. 48).

Fig. 48.

4) Die Geschwindigkeit $\bar{\alpha}$ steht auf MN senkrecht. Dann ist (nach Folgerung 2) die Geschwindigkeit jedes Punktes der Geraden MN auf ihr senkrecht. Die kleinste Geschwindigkeit σ muss, da sie auf MN und NB senkrecht steht, auf der Ebene MNB senkrecht stehen.

Im zweiten Falle kann man die Geschwindigkeiten aller Punkte der Geraden MN erhalten, wenn man diese Gerade sich so bewegen lässt, dass sie zu ihrer Anfangslage parallel bleibt. Eine derartige Bewegung heisst *Translation.*

Im dritten Falle lassen sich alle Geschwindigkeiten durch *Rotation* der Geraden MN in der Ebene der Geschwindigkeiten α und β um den Punkt O hervorbringen, nämlich um den Punkt, dessen Geschwindigkeit gleich Null ist; die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation ist $\Theta = \frac{\pm \beta \pm \alpha}{u}$.

Im vierten Falle endlich lassen sich alle Geschwindigkeiten durch eine Bewegung hervorbringen, die zusammengesetzt ist aus einer Rotationsbewegung der Geraden MN um den Punkt O, welcher die kleinste Geschwindigkeit hat, mit der Winkelgeschwindigkeit $\Theta = \frac{u_1}{u}$, und aus einer Translationsbewegung, bei der alle Punkte der Geraden MN Geschwindigkeiten haben, die der Geschwindigkeit σ des Punktes O gleich sind. Eine derartige Bewegung nennt man eine *Schraubenbewegung,* weil die Gerade MN dabei eine Schraubenfläche erzeugt. Die Gerade MN bleibt nämlich der Ebene MNB fortwährend parallel und hat zu Leitlinien die Gerade σ und die Schraubenlinie, welche der Punkt N auf einem geraden Cylinder beschreibt, dessen Axe die Gerade σ und dessen Basis ein Kreis vom Radius ON in der Ebene MNB ist. Ist nun H die Ganghöhe der vom Punkte N beschriebenen Schraubenlinie, so hat man nach der bekannten Eigenschaft der Schraubenlinie

$$H : 2\pi \cdot ON = DA : ND = \sigma : ON \cdot \Theta,$$

woraus folgt:

$$H = \frac{2\pi\sigma}{\Theta}. \tag{1}$$

Diese Grösse hängt von der Lage des Punktes N nicht ab; folglich beschreiben alle Punkte der Geraden MN Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe. Sind die Länge u und die Geschwindigkeiten α und β der Endpunkte gegeben, so lassen sich die Werthe von Θ und σ leicht berechnen; man erhält nämlich:

$$\Theta = \frac{1}{u}[\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(\alpha\beta)]^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \frac{\alpha\beta\sin(\alpha\beta)}{[\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(\alpha\beta)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{2}$$

Die Lage des Punktes O ist durch die Länge

$$\pm NO = \frac{u\beta[\beta - \alpha\cos(\beta\alpha)]}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(\alpha\beta)} \tag{3}$$

bestimmt; diese Grösse muss im Sinne von N nach M hin oder im entgegengesetzten Sinne aufgetragen werden, je nachdem die Formel ein positives oder negatives Resultat liefert. Die Lage des Punktes O lässt sich auch durch das Verhältniss

$$NO_\epsilon : MO = \pm \frac{\beta\,[\beta - \alpha \cos(\beta\alpha)]}{\alpha\,[\alpha - \beta \cos(\beta\alpha)]}$$

bestimmen.

127. Infolge der Unveränderlichkeit der Abstände der Punkte von einander ändern sich auch die Winkel zwischen den Verbindungslinien nicht. Es seien A, B, A', B' Punkte des unveränderlichen Systems, r der Abstand AB, r' der Abstand $A'B'$. Wegen der Unveränderlichkeit dieser Strecken und des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist das geometrische Product $\overline{rr'} = rr' \cos(rr')$ constant; folglich ist $\frac{d\overline{rr'}}{dt} = 0$ oder

$$\overline{r_1 r'} + \overline{r r'_1} = 0. \tag{4}$$

Bezeichnet man mit α, β, α', β' die Geschwindigkeiten der Punkte A, B, A', B', so hat man:

$$\overline{r_1} = \overline{\beta} - \overline{\alpha}, \quad \overline{r'_1} = \overline{\beta'} - \overline{\alpha'}$$

(§. 18); dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$\overline{(\overline{\beta} - \overline{\alpha})\, r'} + \overline{(\overline{\beta'} - \overline{\alpha'})\, r} = 0$$

oder

$$\overline{\beta r'} + \overline{\beta' r} = \overline{\alpha r'} + \overline{\alpha' r}. \tag{5}$$

Dies ist die Gleichung, welche zwischen den Geschwindigkeiten der Eckpunkte des unveränderlichen Tetraeders $ABA'B'$ besteht. Im speciellen Falle können die vier Punkte A, B, A', B' in einer Ebene liegen. Fallen die beiden Punkte A und A' zusammen, so ist $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'}$ und die Gleichung (5) giebt

$$\overline{\beta r'} + \overline{\beta' r} = \overline{\alpha(\overline{r} + \overline{r'})},$$

wo $\overline{r} + \overline{r'}$ die Diagonale des über r und r' als Seiten construirten Parallelogramms ist.

128. Die Gesammtheit der gleichzeitigen Geschwindigkeiten aller Punkte bei irgend einer möglichen Bewegung eines Punktsystems wollen wir ein *System möglicher Geschwindigkeiten* nennen. Die einfachsten möglichen Geschwindigkeitssysteme sind die translatorischen und rotatorischen.

Ein System von einander geometrisch gleichen Geschwindigkeiten heisst ein *System von Translationsgeschwindigkeiten.* Ein solches lässt sich durch eine Bewegung erzeugen, bei der

alle Geraden, die irgend zwei Systempunkte verbinden, ihren Anfangslagen parallel bleiben und ihre Längen beibehalten. Offenbar kann ein freies, unveränderliches System eine derartige Bewegung bei vollkommen beliebiger Grösse und beliebiger Richtung der gemeinsamen Geschwindigkeit haben, d. h. *jedes System von Translationsgeschwindigkeiten ist für ein freies, unveränderliches System möglich.*

Wenn man in irgend einer Lage des Systems von einem beliebigen festen Punkte O aus nach den Punkten des Systems Gerade zieht und dieselben um O rotiren lässt, ohne ihre Längen und die von ihnen eingeschlossenen Winkel zu ändern, so ändern sich dabei auch die Abstände der Endpunkte dieser Geraden von einander nicht; folglich repräsentiren diese Endpunkte zu jeder Zeit eine mögliche Lage des Punktsystems. Eine derartige Bewegung nennt man eine *Rotationsbewegung um den Punkt O*, der das *Rotationscentrum* heisst. *Mithin kann ein freies unveränderliches System von Punkten eine Rotationsbewegung um einen beliebigen Punkt O haben. Die Geschwindigkeit jedes Punktes ist senkrecht zu der, den Punkt mit dem Rotationscentrum verbindenden Geraden,* da die Länge dieser Geraden unveränderlich ist (§. 126, Folg. 2).

129. *Lehrsatz 1. Wenn bei irgend einer möglichen Bewegung eines unveränderlichen Punktsystems die Geschwindigkeit eines Punktes O, der mit allen Systempunkten unveränderlich verbunden ist, gleich Null ist, so giebt es eine Menge anderer, unveränderlich mit den übrigen verbundener Punkte, deren Geschwindigkeiten gleichfalls gleich Null sind. Alle diese Punkte liegen auf einer, durch den Punkt O gehenden Geraden, die man die Momentanaxe nennt* (§. 26). *Die Geschwindigkeit jedes, nicht auf der Momentanaxe gelegenen Punktes ist senkrecht zu der durch diesen Punkt und die Momentanaxe gehenden Ebene. Die Geschwindigkeiten der Systempunkte sind den Abständen dieser Punkte von der Momentanaxe proportional. Ein derartiges System von Geschwindigkeiten lässt sich durch eine Rotationsbewegung des Punktsystems um die festbleibende Momentanaxe erzeugen; die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation ist gleich dem Verhältniss der Geschwindigkeit irgend eines Punktes zu dem Abstand dieses Punktes von der Momentanaxe.*

Der Beweis dieses Satzes ist zwar schon in den Ausführungen des §. 26 enthalten. Doch dürfte es nicht überflüssig sein, hier einen anderen Beweis zu geben, der direct aus den Bedingungen der Unveränderlichkeit des Punktsystems folgt.

Es sei O der Punkt, dessen Geschwindigkeit gleich Null ist, und m und m' zwei Punkte, deren Geschwindigkeiten v und v' nicht gleich Null sind (Fig. 49). Wenn es ausser dem Punkte O noch einen Punkt A giebt, dessen Geschwindigkeit gleich Null ist, so müssen v und v' auf den Geraden mA und $m'A$ senkrecht stehen (nach §. 126, Folg. 2); nun sind v und v' auch senkrecht auf mO und $m'O$; daher muss A sowohl in der durch Om senkrecht zu v, als auch in der durch Om' senkrecht zu v' gelegten Ebene liegen, d. h. A muss ein Punkt der Schnittlinie dieser beiden Ebenen sein.*) Umgekehrt sieht man leicht, dass jeder in dieser Schnittlinie liegende Punkt eine Geschwindigkeit gleich Null hat. Ist nämlich A ein beliebiger Punkt dieser Geraden, so muss (nach §. 126, Folg. 2) seine Geschwindigkeit entweder gleich Null sein oder auf den drei Geraden AO, Am und Am' senkrecht stehen; dies letztere ist jedoch nicht möglich, weil die Geraden AO, Am und Am' im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen; mithin muss die Geschwindigkeit des Punktes A gleich Null sein.

Fig. 49.

Die Geschwindigkeit v'' jedes dritten Punktes m'' muss (nach §. 126, Folg. 2) auf den Geraden $m''O$ und $m''A$, d. h. auf der durch OA und m'' gehenden Ebene senkrecht stehen. Es giebt also wirklich ausser O noch Punkte, deren Geschwindigkeiten gleich Null sind, und dieselben liegen alle in einer Geraden, durch die sämmtliche Ebenen gehen, welche durch die übrigen Systempunkte senkrecht zu den entsprechenden Geschwindigkeiten gelegt werden können. Die Gerade OA ist die Momentanaxe in dem Sinne, wie wir sie im §. 26 definirt haben.

Wir fällen nun aus den Punkten m und m' die Perpendikel

*) Offenbar lassen sich die Punkte m und m' immer so wählen, dass m' nicht in der, durch Om senkrecht zu v gehenden Ebene liegt.

mP und $m'P'$ auf die Momentanaxe OA und bezeichnen dieselben mit h und h', wobei die Punkte P und P' als Anfangspunkte gelten sollen.

Auf das unveränderliche geometrische Product $\overline{hh'}$ wollen wir nun die Bedingung (4) §. 127 anwenden; dies giebt: $\overline{vh'} + \overline{v'h} = 0$, das heisst:

$$vh' \cos(vh') + v'h \cos(v'h) = 0. \qquad (6)$$

Hier sind die Grössen $\cos(vh')$ und $\cos(v'h)$ nicht gleich Null, da die Ebenen OmA und $Om'A$ nicht zusammenfallen. Damit die Gleichung (6) möglich sei, müssen jene Cosinus entgegengesetzte Zeichen haben, und deshalb muss einer der Winkel (vh') und $(v'h)$ ein spitzer, der andere ein stumpfer sein. Man sieht aber leicht, dass die Summe dieser beiden Winkel immer 180° beträgt. Verlegt man nämlich die Geraden h, h', v, v', nach O als gemeinsamem Ursprung (Fig. 50), ohne ihre Grösse und Richtung zu ändern, so dass $OM = h$, $OM' = h'$, $O\mu = v$, $O\mu' = v'$ wird, so findet man, dass diese Geraden in einer und derselben Ebene liegen und dass die Winkel $MO\mu$ und $M'O\mu'$ Rechte sind; daher müssen die die Winkel (vh') und $(v'h)$ repräsentirenden Winkel $\mu OM'$ und $\mu'OM$, da ihre Schenkel senkrecht auf einander stehen, entweder einander gleich sein oder sich zu 180° ergänzen. Da nun der eine von ihnen spitz, der andere stumpf sein muss, so ist nur das letztere möglich, d. h. es ist:

Fig. 50.

$$\cos(vh') = -\cos(v'h).$$

Hiermit geht die Gleichung (6) über in

$$vh' = v'h,$$

oder

$$v : h = v' : h'. \qquad (7)$$

Diese Gleichung zeigt, *dass alle Geschwindigkeiten den Abständen der entsprechenden Punkte von der Momentanaxe proportional sind.*

Aus der Gleichung $\sphericalangle\, \mu OM' + \sphericalangle\, \mu' OM = 180^0$ folgt $\sphericalangle \mu O \mu' = \sphericalangle MOM'$; dies bedeutet, dass die Geschwindigkeiten v und v' nach derselben Seite hin gerichtet sind, beide nach

rechts oder beide nach links für einen auf die Punkte m und m' hinschauenden Beobachter, dessen Füsse sich in O und dessen Kopf sich in A befindet.

Liegen die beiden Punkte m und m' in derselben Ebene mit der Axe OA, so ist $\cos(vh') = 0$, $\cos(v'h) = 0$, und aus der Gleichung (6), die in $0 = 0$ übergeht, ergiebt sich die Bedingung (7) nicht.

Denken wir uns in diesem Falle einen nicht in der Ebene OmA gelegenen Punkt m'' und bezeichnen wir mit v'' seine Geschwindigkeit und mit h'' seinen Abstand von der Axe OA, so hat man $v:h = v'':h''$ und $v':h' = v'':h''$, also $v:h = v':h'$.

Aus der Proportionalität der Geschwindigkeiten und der Abstände der entsprechenden Punkte von der Momentanaxe schliessen wir, dass die Geschwindigkeiten aller Punkte einer beliebigen, der Axe parallelen Geraden einander geometrisch gleich sind. Das Verhältniss $\omega = \frac{v}{h}$ jeder Geschwindigkeit zu dem Abstande des entsprechenden Punktes von der Momentanaxe ist die Rotationswinkelgeschwindigkeit jeder durch die Momentanaxe gehende Ebene; sie bestimmt sich als die Geschwindigkeit eines Punktes, der die Entfernung Eins von der Axe hat. Man ist übereingekommen, dieselbe (wie schon im §. 26 gesagt wurde) durch eine Strecke OD darzustellen, die auf der Momentanaxe derart aufgetragen wird, dass ein Beobachter mit den Füssen in O und dem Kopf in D die Geschwindigkeiten nach der rechten Seite hin gerichtet sieht.

Aus dem Obigen sieht man, dass man sich das ganze gegebene System von Geschwindigkeiten hervorgebracht denken kann durch eine Rotationsbewegung um eine die Richtung von ω repräsentirende Gerade, mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich ω. Nur in diesem Sinne betrachtet man die Bewegung des Systems als eine Rotationsbewegung, wenn die Geschwindigkeit eines Punktes gleich Null ist. In Wirklichkeit kann dagegen die wahre Bewegung auch eine nicht rotatorische sein, d. h. es kann der Fall sein, dass das System keinen einzigen festen Punkt hat. Denn dass die Geschwindigkeiten aller Punkte der Geraden OA gleich Null sind, ist nicht die Bedingung der Unbeweglichkeit dieser Geraden; sie kann

nämlich eine Bewegung haben, bei der alle ihre Punkte in unendlich kleiner Zeit Wege durchlaufen, die von höherer Ordnung unendlich klein sind, als die von den übrigen Systempunkten durchlaufenen Wege. Im allgemeinen kann die Momentanaxe mit der Zeit ihre Lage im Raume und bezüglich der Systempunkte ändern, sogar in dem Falle, wenn es im Systeme einen festen Punkt O giebt. Wir werden weiter unten sehen, wie diese Aenderung ihrer Lage vor sich geht.

130. *Lehrsatz 2. Jedes gegebene System möglicher Geschwindigkeiten, das keine Translationsbewegung repräsentirt, lässt sich zerlegen in ein System von Rotationsgeschwindigkeiten um einen beliebigen Punkt O und ein System von Translationsgeschwindigkeiten, dessen gemeinsame Geschwindigkeit geometrisch gleich der Geschwindigkeit des Punktes O in dem gegebenen Geschwindigkeitssysteme ist.*

Beweis. Das gegebene System möglicher Geschwindigkeiten sei $(v, v', v'' \cdots)$ und $\overline{k}$ sei eine von diesen Geschwindigkeiten, nämlich diejenige, welche der Punkt O hat. Hätten alle übrigen Punkte Geschwindigkeiten, die der $\overline{k}$ geometrisch gleich wären, so hätte man das System von Translationsgeschwindigkeiten $(k, k, k, \cdots)$. Bildet man die geometrischen Differenzen der Geschwindigkeiten des gegebenen Systems und der entsprechenden Geschwindigkeiten dieses neuen Systems, so erhält man das folgende System von Geschwindigkeiten:

$$\overline{w} = \overline{v} - \overline{k}, \quad \overline{w'} = \overline{v'} - \overline{k}, \quad \overline{w''} = \overline{v''} - \overline{k}, \cdots,$$

welches, wie im §. 123 bewiesen, gleichfalls ein mögliches System ist. In diesem Systeme hat der Punkt O die Geschwindigkeit $\overline{k} - \overline{k} = 0$; daher ist $(w, w', w'', \cdots)$ ein System von Rotationsgeschwindigkeiten um den Punkt O. Da nun

$$\overline{v} = \overline{w} + \overline{k}, \quad \overline{v'} = \overline{w'} + \overline{k}, \quad \overline{v''} = \overline{w''} + \overline{k}, \cdots,$$

so ist das gegebene System $(v, v', v'', \cdots)$ aus dem Systeme der Rotationsgeschwindigkeiten $(w, w', w'', \cdots)$ um den Punkt O und aus dem System von Translationsgeschwindigkeiten $(k, k, k \cdots)$ zusammengesetzt.

Nach dem Lehrsatz 1. hat das Geschwindigkeitssystem $(w, w', w'', \cdots)$ eine gewisse Momentanaxe und eine Momentan-

winkelgeschwindigkeit, die sich folgendermassen bestimmen lassen.

Es sei OP (Fig. 51) die Geschwindigkeit k des Punktes O und $O\mu$, $O\mu'$, $O\mu''$, $\cdots$ gerade Strecken, die den übrigen Geschwindigkeiten des gegebenen Systems v, v', v'' $\cdots$ geometrisch gleich sind. Die Strecken

Fig. 51.

$$\overline{P\mu} = \overline{v} - \overline{k},\quad \overline{P\mu'} = \overline{v'} - \overline{k},$$
$$\overline{P\mu''} = \overline{v''} - \overline{k}, \cdots$$

sind dann den Geschwindigkeiten des Rotationssystems (w, w', w'', $\cdots$) geometrisch gleich. Da diese letzteren nach Lehrsatz 1. auf der Momentanaxe der Rotation senkrecht stehen müssen, so liegen die Geraden $P\mu$, $P\mu'$, $P\mu''\cdots$ in einer und derselben, zu dieser Axe senkrechten Ebene. Mithin ist die Momentanaxe das Perpendikel OD auf die Ebene $\mu P \mu'$. Zieht man die Geraden:

$$\overline{OM} = \overline{P\mu},\quad \overline{OM'} = \overline{P\mu'},\quad \overline{OM''} = \overline{P\mu''}, \cdots,$$

so liegen dieselben gleichfalls in einer und derselben zu OD senkrechten Ebene; um daher die Momentanaxe zu finden, *zieht man durch das Rotationscentrum O zwei Strecken OM und OM', geometrisch gleich zwei Rotationsgeschwindigkeiten w und w' und errichtet das Perpendikel OD auf ihrer Ebene.* Dabei sind w und w' so zu wählen, dass OM und OM' nicht in eine gerade Linie fallen.

Man sieht aus dieser Construction, dass die Strecken OP, $O\mu$, $O\mu'$, $O\mu''$, $\cdots$ eine gemeinsame Projection OB auf die Momentanaxe OA haben.

Also *hat jedes System möglicher Geschwindigkeiten die Eigenschaft, dass alle Geschwindigkeiten eine gemeinschaftliche Projection auf eine und dieselbe Gerade haben.*

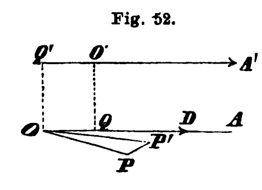
Es sei m die Projection eines Punktes von der Geschwindigkeit $\overline{v} = \overline{O\mu}$ auf die Ebene MOM'. Nach der Eigenschaft der Rotationsgeschwindigkeiten muss die Strecke Om auf OA senkrecht stehen; denn sie ist geometrisch gleich dem Perpendikel, das man aus dem Punkte, dessen Geschwindigkeit v ist, auf die Momentanaxe OA fällen kann. Zu gleicher Zeit ist sie jedoch auch senkrecht auf der Rotationsgeschwindigkeit

$w = OM$. Daher ist das Verhältniss $\omega = \frac{OM}{Om} = \tan(MmO)$ die Momentanwinkelgeschwindigkeit der Rotation für das System der Geschwindigkeiten $(w, w', w'', \cdots)$. Wie schon in §. 26 gesagt wurde, wird dieses Verhältniss durch eine Strecke $OD = \omega$ dargestellt und auf der Momentanaxe aufgetragen. Die Geschwindigkeit $\overline{v}$ ist die geometrische Summe $\overline{k} + \overline{w}$, und da die Rotationsgeschwindigkeit $\overline{w}$ für alle Punkte einer, der Momentanaxe parallelen Geraden dieselbe ist, so ist auch die Geschwindigkeit $\overline{v}$ dieselbe für alle Punkte einer durch m zur Momentanaxe gelegten Parallelen.

Somit *haben die Punkte, welche auf einer zur Momentanaxe parallelen Geraden liegen, Geschwindigkeiten, die einander geometrisch gleich sind.*

Da die Wahl des Rotationscentrums O willkürlich ist, so kann man ein und dasselbe System von Geschwindigkeiten auf verschiedene Weise in ein Rotations- und ein Translationssystem zerlegen. Bei jeder Zerlegung bleiben die Richtung der Momentanaxe, die Grösse der Winkelgeschwindigkeit ω und der Sinn der Rotation dieselben. Um sich davon zu überzeugen, vertausche man das Rotationscentrum O mit einem anderen O', dessen Geschwindigkeit k' ist. Zieht man nun OP' geometrisch gleich k', so findet man, dass der Punkt P' in der Ebene $\mu P \mu'$ liegt; folglich liegen die Strecken $P'\mu$, $P'\mu'$, $P'\mu''$, $\cdots$, welche die neuen Rotationsgeschwindigkeiten der Systempunkte um O' repräsentiren, in derselben Ebene, so dass die auf dieser Ebene senkrechte Gerade OA der Momentanaxe der neuen Rotationsbewegung parallel ist. Als Winkelgeschwindigkeit der ersten Rotation kann man das Verhältniss von PP' zu dem aus O' auf OA gefällten Perpendikel $O'Q$ wählen (Fig. 52) und als Winkelgeschwindigkeit der zweiten Rotation das Verhältniss von PP' zu dem aus O auf die der OA parallele Gerade $O'A'$ gefällten Perpendikel OQ'. Diese beiden Perpendikel sind aber einander geometrisch gleich; folglich sind auch die Winkelgeschwindigkeiten beider Rotationen gleich. Trägt man auf der neuen Momentanaxe

Fig. 52.



eine Strecke $O'D'$ gleich und von gleichem Sinne mit $OD = \frac{PP'}{O'Q}$ auf, so erhält man die Winkelgeschwindigkeit der neuen Rotation. Ein Beobachter mit den Füssen in O' und dem Kopfe in D' sieht die Rotation des Punktes Q im positiven Sinne, d. h. von links nach rechts vor sich gehen. Denn wenn für den Punkt O als Rotationscentrum die Geschwindigkeit des Punktes Q' durch eine Strecke dargestellt wird, die der PP' geometrisch gleich und im Sinne von P nach P' gerichtet ist, so stellt sich für O' als Rotationscentrum die Geschwindigkeit des Punktes Q durch eine der Strecke PP' entgegengesetzte Strecke dar. Daher haben beide Rotationen denselben Sinn. *Die Grösse und der Sinn der Rotationswinkelgeschwindigkeit* ω, *die auf der Momentanaxe aufgetragen wird, sind also unabhängig von der Lage des Rotationscentrums.*

131. *Lehrsatz 3. Jedes System möglicher Geschwindigkeiten, das kein Rotations- und kein Translationssystem ist, lässt sich durch eine Schraubenbewegung erzeugen, d. h. durch eine Bewegung, die aus einer Rotation um eine gewisse Axe und aus einer Translation parallel dieser Axe zusammengesetzt ist.*

Das vom Rotationscentrum O auf die durch die Endpunkte aller Geschwindigkeiten gehenden Ebene $\mu P \mu'$ gefällte Perpendikel OB (Fig. 51, Seite 278) stellt die kleinste Geschwindigkeit dar und zugleich die Projection aller anderen Geschwindigkeiten auf die Momentanaxe. Diese kleinste Geschwindigkeit gehört den Punkten einer der Axe OD parallelen Geraden an, die man auf dieselbe Weise finden kann, in welcher oben diejenige Gerade construirt wurde, welche alle Punkte enthält, die eine gegebene Geschwindigkeit besitzen. Es sei CE diese Gerade. Die Richtung der Geschwindigkeit jedes ihrer Punkte fällt in sie selbst hinein. Das gegebene System von Geschwindigkeiten $(v, v', v'', \cdots)$ lässt sich ansehen als zusammengesetzt aus einem Systeme von Rotationsgeschwindigkeiten um den Punkt C und einem Systeme von Translationsgeschwindigkeiten, deren jede geometrisch gleich der Geschwindigkeit jenes Punktes C ist; dabei haben die Rotationsgeschwindigkeiten die Gerade CE zur Axe und ist ω die Winkelgeschwindigkeit. Folglich lässt sich das gegebene Ge-

schwindigkeitssystem hervorbringen durch eine Schraubenbewegung, die aus einer Rotation um CE und einer dieser geraden parallelen Translation zusammengesetzt ist. Ebenso wie in §. 126, ist leicht zu sehen, dass alle Systempunkte bei dieser Bewegung Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe beschreiben. Bezeichnet nämlich H die Ganghöhe der von einem Punkte m beschriebenen Schraubenlinie und σ die Translationsgeschwindigkeit OB, so hat man $H = 2\pi\, Cm \cdot \tan(O\mu B)$ und $\tan(O\mu B) = \frac{OB}{B\mu} = \frac{\sigma}{\omega \cdot Cm}$; also ist $H = \frac{2\pi\sigma}{\omega}$. Diese Grösse hängt von der Lage des Punktes m nicht ab.

Die Gerade CE, welche die Axe der Schraubenbewegung ist, heisst die *Centralaxe.* Ist C ihre Spur in der Ebene MOM' (Fig. 51, Seite 278), so steht die Gerade CO senkrecht auf der Ebene BOP und mithin auch auf OF, der Projection der Geschwindigkeit OP auf die Ebene MOM'. Da der Punkt O willkürlich ist, so kann man sagen, dass *die Geraden, welche die Projectionen der Systempunkte auf eine zur Centralaxe senkrechte Ebene mit der Spur der Centralaxe in dieser Ebene verbinden, auf den Projectionen der entsprechenden Geschwindigkeiten auf dieselbe Ebene senkrecht stehen.*

Auf Grund dieser Bemerkung lässt sich die Centralaxe folgendermassen construiren. Man zieht durch einen beliebigen Punkt O die Strecken $O\mu$, $O\mu'$, $O\mu''$ geometrisch gleich den Geschwindigkeiten dreier Punkte m, m', m'', legt dann durch die Endpunkte μ, μ', μ'' eine Ebene und fällt vom Punkte O aus eine Senkrechte auf diese Ebene; diese Senkrechte ist der Centralaxe parallel. Hierauf bestimmt man in einer zu dieser Geraden senkrechten Ebene die Projectionen zweier Punkte m und m' und ihrer Geschwindigkeiten und errichtet in den Projectionen der Punkte Senkrechte auf die Projectionen der entsprechenden Geschwindigkeiten; der Schnittpunkt C dieser Senkrechten ist ein Punkt der Centralaxe. Die in diesem Punkte auf der Ebene errichtete Senkrechte ist die Centralaxe selbst. Diese Construction der Centralaxe ist von Poncelet gegeben. Weiter unten werden wir eine andere von Chasles gefundene Construction mittheilen.

132. Wenn der Fall eintritt, dass die den Geschwindig-

keiten der Punkte m, m', m'' geometrisch gleichen Strecken $O\mu$, $O\mu'$, $O\mu''$ in einer Ebene liegen,*) so liegen die, den übrigen Geschwindigkeiten geometrisch gleichen Strecken $O\mu'''$, $O\mu''''$, $\cdots$ ebenfalls in dieser Ebene; daher sind die Geschwindigkeiten aller Systempunkte einer und derselben Ebene parallel. In diesem Falle ist das Perpendikel OB, welches die Geschwindigkeit der, der Centralaxe parallelen Translationsgeschwindigkeiten darstellt, gleich Null, und das gegebene Geschwindigkeitssystem besteht daher nur in einer Rotation um die Centralaxe.

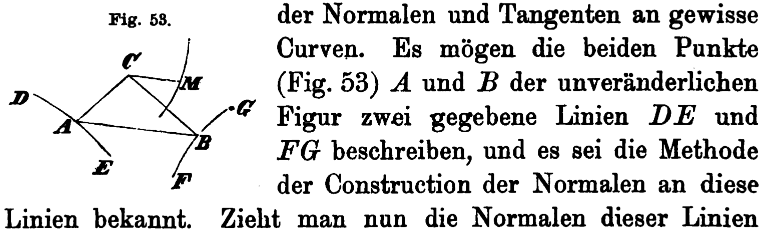
Hierhin gehört als specieller Fall das Geschwindigkeitssystem eines ebenen, unveränderlichen, in seiner Ebene sich bewegenden Punktsystems.

Es giebt in diesem Falle keine, der Centralaxe parallele Translationsbewegung. Der Schnittpunkt der Centralaxe mit der Ebene des unveränderlichen Punktsystems ist hier derjenige Punkt, in welchem alle, in den verschiedenen Systempunkten auf den entsprechenden Geschwindigkeiten errichteten Senkrechten oder, was dasselbe ist, die Normalen der Trajectorien zusammentreffen. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz von Chasles.

Lehrsatz 4. Das Geschwindigkeitssystem einer unveränderlichen, ebenen, in ihrer Ebene sich bewegenden Figur ist im allgemeinen ein Rotationssystem um den Schnittpunkt aller Normalen der Trajectorien der verschiedenen Punkte der Figur. Diesen Punkt nennt man das *Rotationscentrum.* Derselbe kann auch im Unendlichen liegen; dann ist das Geschwindigkeitssystem ein translatorisches.

Auf diesen Satz gründet sich eine Methode zur Construction

Fig. 53.



der Normalen und Tangenten an gewisse Curven. Es mögen die beiden Punkte (Fig. 53) A und B der unveränderlichen Figur zwei gegebene Linien DE und FG beschreiben, und es sei die Methode der Construction der Normalen an diese Linien bekannt. Zieht man nun die Normalen dieser Linien

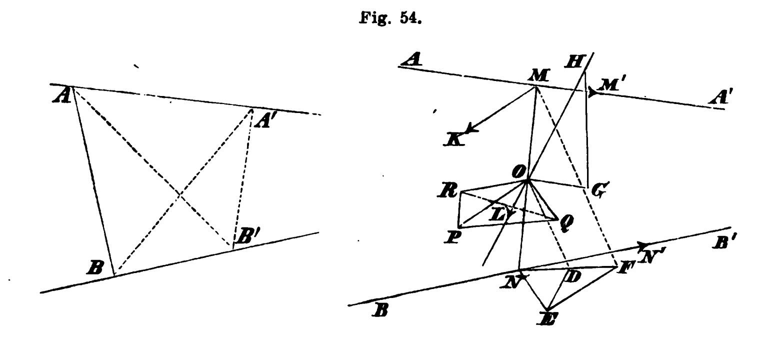
*) Während μ, μ', μ'' nicht in einer Geraden liegen.

in den Punkten A und B, so ergiebt sich das Rotationscentrum C als Schnittpunkt derselben. Nunmehr kann man die Normale der von irgend einem anderen Punkte M der unveränderlichen Figur beschriebenen Linie finden; diese Normale ist nämlich MC. Sind die Linien DE und FG Gerade, so ist die Trajectorie jedes Punktes M eine Ellipse oder eine Gerade (wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist). Diese Construction stimmt mit der auf Seite 42 und 43 für die Ellipse und Conchoide gegebenen überein.

133. *Lehrsatz 5. Jedes System möglicher Geschwindigkeiten kann man als aus zwei Systemen von Rotationsgeschwindigkeiten zusammengesetzt betrachten.*

Beweis. Man lege durch zwei Punkte A und A' (Fig. 54) Ebenen, senkrecht zu den resp. Geschwindigkeiten α und α', Diese Ebenen schneiden sich im allgemeinen nach einer Geraden BB'. Nimmt man auf dieser zwei Punkte B und B' an und zieht die Geraden BA, BA', $B'A$, $B'A'$, so findet man, dass (nach §. 126, Folg. 2) die Geschwindigkeit β des

Fig. 54.



Punktes B auf AB und BA', also auf der Ebene ABA' senkrecht steht; ebenso findet man, dass die Geschwindigkeit β' des Punktes B' auf der Ebene $AB'A'$ senkrecht steht. Daher ist die Gerade AA' die Schnittlinie der durch die Punkte B und B' gehenden und auf den Geschwindigkeiten dieser Punkte senkrechten Ebenen. Die Gerade AA' hat also bezüglich BB' dieselbe Bedeutung, wie die Gerade BB' bezüglich AA'.

Auch sieht man leicht, dass alle die, durch die verschiedenen Punkte der Geraden AA' senkrecht zu den Geschwin-

digkeiten dieser Punkte gelegten Ebenen durch BB' gehen, und umgekehrt, dass alle, durch die verschiedenen Punkte der Geraden BB' senkrecht zu den Geschwindigkeiten dieser Punkte gelegten Ebenen durch AA' hindurchgehen. Wegen dieser Reciprocität der Geraden AA' und BB' zu einander nennt Chasles sie *conjugirt.* Er hat gezeigt, dass die Geschwindigkeiten der Punkte jeder dieser Geraden Rotationsgeschwindigkeiten um die andere sind. Um sich hiervon zu überzeugen, nehme man an, dass AB und $A'B'$ auf BB' senkrecht stehen; die Längen AB und $A'B'$ seien r und r'. Da das geometrische Product $\overline{rr'}$ unveränderlich ist, so gilt die Gleichung (5) §. 127:

$$\overline{\beta r'} + \overline{\beta' r} = \overline{\alpha r'} + \overline{\alpha' r},$$

wo

$$\overline{r} = \overline{AB'} + \overline{B'B} \text{ und } \overline{r'} = \overline{A'B} - \overline{B'B};$$

hiermit wird:

$$\overline{\beta r'} + \overline{\beta' r} = \overline{\beta \,.\, A'B} - \overline{\beta \,.\, B'B} + \overline{\beta' \,.\, AB'} + \overline{\beta' \,.\, B'B}.$$

Da aber β auf $A'B$ und β' auf AB' senkrecht stehen, so ist:

$$\overline{\beta \,.\, A'B} = 0 \text{ und } \overline{\beta' \,.\, AB'} = 0;$$

wegen der Unveränderlichkeit von BB' muss aber

$$\overline{\beta' \,.\, B'B} = \overline{\beta \,.\, B'B}$$

sein; daher wird $\overline{\beta r'} + \overline{\beta' r} = 0$ und folglich

$$\overline{\alpha r'} + \overline{\alpha' r} = 0,$$

d. h.

$$\alpha r' \cos(r'\alpha) + \alpha' r \cos(r\alpha') = 0. \tag{a}$$

Diese Gleichung verlangt, dass $\cos(r'\alpha)$ und $\cos(r\alpha')$ entgegengesetzte Zeichen haben, d. h. dass von den Winkeln $(r'\alpha)$ und $(r\alpha')$ der eine spitz, der andere stumpf sei. Verlegt man r, r', α und α' an einen und denselben Punkt, indem man sie durch geometrisch gleiche Strecken ersetzt, so zeigt sich, dass die Summe der Winkel $(r'\alpha)$ und $(r\alpha')$ 180^0 beträgt, und dass also $\cos(r'\alpha) = -\cos(r\alpha')$ ist; die Gleichung (a) wird dadurch

$$\alpha r' - \alpha' r = 0 \text{ oder } \alpha : r = \alpha' : r'$$

und sagt aus, dass die Geschwindigkeiten der verschiedenen

Punkte der Geraden AA' den Entfernungen dieser Punkte von der conjugirten Geraden BB' proportional sind.

Ausserdem kann man aus der Gleichheit der Winkel $(\alpha\alpha')$ und (rr') schliessen, (wie in §. 129), dass die Geschwindigkeiten α und α' denselben Sinn haben für einen Beobachter, der sich an BB' anlehnt und auf die Punkte A und A' hinschaut. *Folglich lassen sich alle Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte der Geraden AA' durch eine Rotationsbewegung um die conjugirte Gerade hervorbringen, mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich dem gemeinsamen Verhältniss jeder Geschwindigkeit zu dem Abstand des entsprechenden Punktes von der conjugirten Geraden.*

Ebenso lässt sich zeigen, dass alle Geschwindigkeiten der Punkte der Geraden BB' durch eine Rotation um AA' hervorgebracht werden können, mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich dem gemeinsamen Verhältniss jeder Geschwindigkeit zu dem Abstand des entsprechenden Punktes von der Geraden AA'. Die Winkelgeschwindigkeit der ersten Rotation kann man (nach der Festsetzung des §. 26) durch eine auf der Geraden BB' aufgetragenen Länge $\overline{a}$ darstellen und die Winkelgeschwindigkeit der zweiten Rotation durch eine auf AA' aufgetragene Länge $\overline{b}$. Die Grösse und Richtung von $\overline{a}$ und $\overline{b}$ bestimmen das ganze System der gegebenen Geschwindigkeiten $(v, v', v'', \cdots)$ vollkommen; denn man braucht dazu nur die Geschwindigkeiten dreier Punkte, z. B. A, A' und B zu kennen, und diese Geschwindigkeiten lassen sich bestimmen, sowie $\overline{a}$ und $\overline{b}$ bekannt sind. Also *kann man ein gegebenes Geschwindigkeitssystem $(v, v', v'', \cdots)$ als zusammengesetzt betrachten aus einem System von Rotationsgeschwindigkeiten um eine beliebige Gerade und einem System von Rotationsgeschwindigkeiten um die zu der ersteren conjugirte Gerade*; mithin *lässt sich ein gegebenes Geschwindigkeitssystem durch eine Bewegung hervorbringen, die aus den Rotationen um irgend zwei conjugirte Gerade zusammengesetzt ist.*

134. Andererseits lässt sich, wie wir oben gesehen haben, ein gegebenes Geschwindigkeitssystem durch eine gewisse Schraubenbewegung erzeugen; folglich müssen die Winkelgeschwindigkeiten $\overline{a}$ und $\overline{b}$ zur Bestimmung der Elemente dieser

Schraubenbewegung, d. h. deren Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ und der zu $\bar{\omega}$ parallelen Translationsgeschwindigkeit σ hinreichend sein.

Um dies darzuthun, kann man die Methode benutzen, nach der in §. 126 (4. Fall) die Elemente der Schraubenbewegung einer Geraden bestimmt wurden.

Es sei $MN = u$ (Fig. 54, S. 283) das gemeinschaftliche Perpendikel der conjugirten Geraden AA' und BB', d. h. ihr kürzester Abstand; NN' die Winkelgeschwindigkeit $\bar{a}$, MM' die Winkelgeschwindigkeit $\bar{b}$, $\overline{MK} = \bar{\alpha}$ die Geschwindigkeit des Punktes M und $\overline{NE} = \bar{\beta}$ die des Punktes N. Da die Geschwindigkeiten $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ auf der Geraden senkrecht stehen, so können alle Geschwindigkeiten dieser Geraden, wie wir in §. 126 (4. Fall) gesehen haben, durch eine Schraubenbewegung erzeugt werden, die sich folgendermassen bestimmt. Man ziehe durch den Endpunkt der Geschwindigkeit $\bar{\beta}$ eine Strecke EF, gleich und entgegengesetzt $\bar{\alpha}$, ferner die Verbindungslinien NF und FM, die auf NF senkrechte ED und die zu FM parallele Linie DO; dadurch erhält man den Punkt O, dessen Geschwindigkeit die Translationsgeschwindigkeit der gesuchten Schraubenbewegung ist. Diese Geschwindigkeit ist geometrisch gleich der Geraden DE; bezeichnen wir sie mit σ und stellen wir sie durch die Strecke $\overline{OL} = \overline{DE}$ dar. Die Richtung OL ist die Rotationsaxe; die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation aber ist gleich dem Verhältniss $\frac{FN}{MN}$; wir bezeichnen sie mit ω und stellen sie durch eine, auf der Rotationsaxe aufgetragene Strecke OH dar. Es bleibt noch zu beweisen, dass die durch die Translationsgeschwindigkeit σ und die Rotationsgeschwindigkeit ω bestimmte Schraubenbewegung der Geraden MN das System der gegebenen Geschwindigkeiten $(v, v', v'', \cdots)$ erzeugen kann.

Zu diesem Zwecke zerlegen wir (nach Lehrsatz 2) dieses System in ein System von Rotationsgeschwindigkeiten um den Punkt O und in ein System von Translationsgeschwindigkeiten mit der gemeinsamen Geschwindigkeit σ und zeigen dann, dass

die auf der Momentanaxe aufgetragene Winkelgeschwindigkeit des Rotationssystems $\bar{\omega}$ ist. Zieht man durch den Punkt O die Strecken $\overline{OP} = \alpha$, $\overline{OQ} = \beta$ und $\overline{OR}$ geometrisch gleich der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes der Geraden AA', so sieht man, dass die Ebene ROP auf der Geraden BB' senkrecht steht; denn alle Geschwindigkeiten der Punkte von AA' sind zu BB' senkrecht; folglich geht diese Ebene durch MN. Da aber OP und OR überdies (nach §. 126, Folg. 1) eine gemeinschaftliche Projection auf AA' haben, so ist PR senkrecht auf AA'; mithin ist PR parallel zu MN und deshalb senkrecht auf der Ebene POQ. Hieraus folgt, dass OH, weil senkrecht auf PQ, auch auf der Ebene RPQ, die durch die Endpunkte der drei Geschwindigkeiten OQ, OP, OR geht, senkrecht steht. Diese Eigenschaft besitzt aber nur die Momentanaxe des Systems der Rotationsgeschwindigkeiten um den Punkt O. Da $\overline{ND} = \beta - \bar{\sigma}$ und NO senkrecht auf OH, so ist das Verhältniss $\frac{ND}{ON}$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems der Rotationsgeschwindigkeiten; dieses Verhältniss ist der Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation der Geraden MN gleich. Also ist die Schraubenbewegung der Geraden MN eine solche, die das System der gegebenen Geschwindigkeiten erzeugt.

135. *Die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ der Schraubenbewegung ist die geometrische Summe der Winkelgeschwindigkeiten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ der Rotationen um zwei conjugirte Axen.*

Beweis. Trägt man $\overline{OG} = \bar{b}$ auf und zieht GH, so erhält man ein dem Dreieck OQP ähnliches Dreieck OGH; denn OG ist senkrecht auf OQ, OH senkrecht auf PQ und es ist $OQ : OG = PQ : OH = u$; also ist GH senkrecht auf OP und $OP : GH = u$; hiermit wird

$$GH = \frac{OP}{u} = \frac{\alpha}{u} = a \text{ und } \bar{\omega} = \bar{a} + \bar{b}.$$

Beachtet man, dass

$$\alpha = au,\ \beta = bu \text{ und } \sphericalangle(\alpha\beta) = 180^0 - \sphericalangle(ab),$$

so ergiebt sich aus den Formeln (2) und (3) §. 126:

$$\omega = [a^2 + b^2 + 2ab\cos(ab)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma = \frac{uab\sin(ab)}{[a^2 + b^2 + 2ab\cos(ab)]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\pm NO = \frac{ub[b + a\cos(ab)]}{a^2 + b^2 + 2ab\cos(ab)}.$$

Auf diese Weise bestimmen sich alle Elemente der Schraubenbewegung aus den gegebenen Winkelgeschwindigkeiten $\bar{a}$ und $\bar{b}$.

136. Aus den Formeln des vorigen Paragraphen folgt:

$$\omega\sigma = uab\sin(ab). \tag{8}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nichts anderes als das Volumen eines Parallelepipedons, dessen Grundfläche ein aus $\bar{a}$ und $\bar{b}$ construirtes Parallelogramm und dessen Höhe $\bar{u}$ ist. Dieses Volumen ist sechsmal so gross als das des Tetraeders $AB'A'B$ (Fig. 55), dessen gegenüberliegende Kanten BB' und AA' die auf den resp. Axen aufgetragenen Winkelgeschwindigkeiten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ sind; dabei können die Punkte A und B willkürlich auf diesen Axen gewählt werden. Man hat daher den Satz:

Fig. 55.

*Das Volumen eines Tetraeders, dessen gegenüberliegende Kanten die Winkelgeschwindigkeiten zweier Rotationen sind, die das gegebene Geschwindigkeitssystem hervorbringen können, hat einen constanten Werth, d. h. es hat denselben Werth für jedes Paar congruirter Geraden.**)

137. Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass die Gerade, in der der kürzeste Abstand MN der beiden conjugirten Geraden liegt, die Centralaxe schneidet. Auf diese Eigenschaft gründet sich folgende, von Chasles gegebene Construction der Centralaxe.

Man wähle drei, nicht in gerader Linie liegende Systempunkte A, B, C und construire die zu AB conjugirte Gerade $A'B'$, sowie die zu AC conjugirte $A'C'$; dann suche man den kürzesten Abstand DD' der Geraden AB' und $A'B'$, sowie den kürzesten Abstand EE' von AC und $A'C'$, endlich noch den kürzesten Abstand zwischen DD' und EE'; die Richtung dieses letzteren ist die Centralaxe.

*) Dieser Satz ist von Chasles.

Diese Construction hat einen Vorzug vor der in §. 130 gegebenen; denn sie setzt nur die Richtung der Geschwindigkeiten dreier Punkte als bekannt voraus; die Grösse der Geschwindigkeiten kommt dabei nicht in Betracht.

138. Wir fügen hier einige Bemerkungen über gewisse specielle Lagen der conjugirten Geraden bei.

1) Ist die Gerade AA' der Centralaxe parallel, so sind die Geschwindigkeiten ihrer Punkte, wie wir oben gesehen, einander geometrisch gleich; legt man also durch diese Punkte Ebenen senkrecht zu den entsprechenden Geschwindigkeiten, so sind diese Ebenen sämmtlich parallel; also fällt in diesem Falle die conjugirte Gerade BB' ins Unendliche. Die Rotation um BB' ist durch eine Translation ersetzt, und die Rotation um AA' hat eine Winkelgeschwindigkeit, die der Winkelgeschwindigkeit ω der Schraubenbewegung geometrisch gleich ist.

2) Ist die Gerade AA' zu der Geschwindigkeit eines ihrer Punkte senkrecht, so steht sie auch auf den Geschwindigkeiten aller ihrer anderen Punkte senkrecht (§. 126, Folg. 2), und daher gehen alle Ebenen, die durch die Punkte von AA' gehen und auf den entsprechenden Geschwindigkeiten senkrecht stehen, durch AA' hindurch; somit ist in diesem Falle die Gerade AA' sich selbst conjugirt. Gleichwohl kann man die Gerade AA' nicht als die zusammenfallenden Axen zweier Rotationen betrachten, die das gegebene Geschwindigkeitssystem hervorzubringen vermögen.

3) Ist das gegebene Geschwindigkeitssystem ein rotatorisches, so ist die Momentanaxe der Rotation jeder geraden Linie conjugirt. Da aber die Geschwindigkeiten ihrer Punkte Null sind, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um jede zu ihr conjugirte Gerade gleich Null.

4) Im Falle der Schraubenbewegung können zwei conjugirte Gerade nicht in derselben Ebene liegen. Wenn sie sich nämlich schneiden würden, so wäre die Geschwindigkeit ihres Schnittpunktes gleich Null, was bei einer Schraubenbewegung nicht möglich ist. Wenn sie aber parallel wären, so müssten die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte auf ihrer Ebene senkrecht stehen, und ausserdem müssten die Geschwindigkeiten der Punkte jeder der beiden Geraden einander gleich sein;

dies kann jedoch nur in einem rotatorischen oder translatorischen Systeme der Fall sein.

139. In einem gegebenen Geschwindigkeitssysteme $(v, v', v'', \cdots)$ bestimmt jeder Punkt m mit seiner Geschwindigkeit $\overline{v}$ die Ebene P, die durch m geht und zu $\overline{v}$ senkrecht ist. Denjenigen Punkt einer Ebene, dessen Geschwindigkeit auf der Ebene senkrecht steht, nennt man den *Nullpunkt* der Ebene;*) es ist also m der Nullpunkt der Ebene P. Somit ist durch das gegebene Geschwindigkeitssystem ein System von Ebenen $(P, P', P'', \cdots)$ bestimmt, deren Nullpunkte die die gegebenen Geschwindigkeiten besitzenden Punkte $(m, m', m'', \cdots)$ sind. Die Ebenen $P, P', P'', \cdots$ stellen ein gewisses Gebilde dar, das mit dem durch das System der Nullpunkte $m, m', m'', \cdots$ bestimmten Gebilde in polarer Beziehung steht; d. h. die beiden Gebilde stehen in einer derartigen Abhängigkeit von einander, dass einem Punkte des einen Gebildes im anderen eine Ebene entspricht. Daher entspricht der geraden Verbindungslinie zweier Punkte des einen Gebildes im anderen die Schnittlinie der jenen Punkten entsprechenden Ebenen; einer Fläche, welche Punkte des einen Gebildes enthält, entspricht im anderen die Fläche, welche die Enveloppe der jenen Punkten entsprechenden Ebenen ist. Jedes Paar einander in den beiden Gebilden entsprechender, nicht zusammenfallender Geraden repräsentirt ein Paar conjugirter Axen für zwei Rotationsbewegungen, durch welche das System der gegebenen Geschwindigkeiten erzeugt werden kann. In der That, aus der Definition der conjugirten Geraden folgt, dass die Ebenen P und P', deren Nullpunkte m und m' sind, sich in der zu mm' conjugirten Geraden schneiden. Sind nun μ und μ' zwei Punkte in der Schnittlinie der Ebenen P und P', so sind die Geraden $m\mu$ und $m'\mu$ senkrecht auf der Geschwindigkeit des Punktes μ; folglich ist der Punkt μ der Nullpunkt der Ebene $m\mu m'$. Ebenso ist μ' der Nullpunkt der Ebene $m\mu' m'$. Also entspricht die Gerade mm' der Geraden $\mu\mu'$ und ist ihr conjugirt.

---

*) Nach Möbius; der Verfasser bedient sich der von Chasles eingeführten Bezeichnung *Brennpunkt* (*foyer*).

Anm. d. Uebers.

Den Nullpunkt jeder gegebenen Ebene P kann man leicht auf folgende Weise finden. Man wählt in der Ebene P zwei Punkte A und B, legt durch dieselben die Ebenen Q und R senkrecht zu den Geschwindigkeiten jener Punkte und bestimmt den Schnittpunkt der drei Ebenen P, Q, R. Derselbe ist der Nullpunkt der Ebene P; denn seine Geschwindigkeit muss senkrecht stehen auf den beiden Geraden, in denen die Ebene P die Ebenen Q und R schneidet (§. 126, Folg. 2).

Der Nullpunkt der Ebene P hat eine unbestimmte Lage, wenn die Geschwindigkeiten aller Punkte der Ebene P auf ihr senkrecht stehen. Die Ebene P hat keinen Nullpunkt, wenn die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte einander geometrisch gleich und gegen die Ebene geneigt sind.

In einer gegebenen Ebene P giebt es im allgemeinen eine Gerade, deren Punkte Geschwindigkeiten besitzen, die insgesammt in die Ebene P fallen. Hiervon kann man sich folgendermassen leicht überzeugen. Man errichte auf der Ebene P in ihrem Nullpunkte m ein Perpendikel und lege durch irgend einen Punkt m' desselben eine Ebene P', die ihren Nullpunkt in m' hat, d. h. eine Ebene, die auf der Geschwindigkeit des Punktes m' senkrecht steht. Die Schnittlinie der Ebenen P und P' ist die zu mm' conjugirte Gerade; folglich ist die Geschwindigkeit jedes ihrer Punkte μ auf der Ebene $m\mu m'$ senkrecht und liegt daher in der Ebene P. Die Gerade PP', welche die Eigenschaft hat, dass die Geschwindigkeiten ihrer Punkte in der Ebene P liegen, hat Chasles die *Charakteristik der Ebene P* genannt. Da die Charakteristik der Ebene P und die im Nullpunkte auf der Ebene errichtete Senkrechte conjugirte Gerade sind, so *kann das gegebene Geschwindigkeitssystem* $(v, v', v'', \cdots)$ *durch eine Bewegung hervorgebracht werden, die zusammengesetzt ist aus einer Rotation um die Charakteristik einer beliebigen Ebene und aus einer Rotation um die im Nullpunkte auf dieser Ebene errichtete Senkrechte.* Die letztere Bewegung bewirkt ein Gleiten der Ebene P längs ihrer ursprünglichen Lage.

Eine Ebene hat keine Charakteristik, wenn die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte einander geometrisch gleich sind und nicht in der Ebene liegen; in diesem Falle liegt die

Charakteristik im Unendlichen. Wenn die Geschwindigkeiten der Punkte der Ebene P auf der Ebene senkrecht stehen, aber nicht gleich sind, so ist das Geschwindigkeitssystem ein Rotationssystem um eine Momentanaxe, die in der Ebene P liegt und die Stelle der Charakteristik vertritt. Sie lässt sich dadurch bestimmen, dass man die Ebene P mit den geraden Verbindungslinien der Endpunkte ungleicher Geschwindigkeiten schneidet (s. §. 126, Fall 3).

140. Jede in der Ebene P durch den Nullpunkt m gezogene Gerade L hat die Eigenschaft, dass sie auf den Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte senkrecht steht (§. 126, Folg. 2); daher hat jede Gerade L, die zwei conjugirte Gerade D und Δ schneidet, dieselbe Eigenschaft; denn ihr Schnittpunkt mit D ist der Nullpunkt der durch L und Δ gehenden Ebene.

Auf Grund dieser Eigenschaft lässt sich die Normalebene einer Curve construiren, die von irgend einem Punkte m eines unveränderlichen Systems bei irgend einer möglichen Bewegung desselben beschrieben wird; dies geschieht folgendermassen. Man bestimme zwei Paare conjugirter Geraden (D, Δ) und (D', Δ') (was immer möglich ist, wenn man die Richtungen der Geschwindigkeiten dreier Punkte kennt, d. h. die Richtungen der Tangenten an die Trajectorien dieser Punkte, s. §. 137) und ziehe durch m eine Gerade L, welche D und Δ schneidet und eine Gerade L', die D' und Δ' schneidet; die Ebene der Geraden L und L' ist die gesuchte Normalebene der Trajectorie des Punktes m. Das auf dieser Ebene errichtete Perpendikel ist somit die Tangente der Trajectorie.

Aus dieser Eigenschaft folgt auch, dass zwei Paare conjugirter Geraden (D, Δ) und (D', Δ') die vier Erzeugenden eines und desselben geradlinigen Hyperboloids sind, das durch die Bewegung einer Geraden L längs dreier von diesen vier Geraden, z. B. längs der drei Geraden D, Δ und D', erzeugt werden kann. Die Geschwindigkeit des Schnittpunktes der Geraden L und D' ist nämlich senkrecht auf L, weil L die beiden conjugirten Geraden D und Δ schneidet; dieselbe ist aber auch senkrecht auf der zu D' conjugirten Geraden Δ', weil sie eine Rotationsgeschwindigkeit um Δ' ist. Hierzu ist

aber erforderlich, dass die Gerade L in derselben Ebene mit Δ' liegt; folglich gleitet die Gerade L, bei ihrer Bewegung längs den Leitlinien D, Δ, D' zugleich längs Δ' hin und es liegt daher Δ' auf dem durch die Bewegung von L erzeugten Hyperboloid.

Aus den Eigenschaften der conjugirten Geraden, der Nullpunkte und Charakteristiken von Ebenen ergeben sich viele andere bemerkenswerthe geometrische Sätze, die man in der Abhandlung von Chasles: „Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre“ (Comptes rendus 1843) und in der Abhandlung von Mannheim: „Etudes sur le déplacement d'une figure de forme invariable“ (Mémoires présentés par divers savants à l'institut impérial de France T. XX) findet.

141. In §. 123 ist gezeigt worden, dass zwei Systeme möglicher Geschwindigkeiten sich zu einem einzigen Systeme möglicher Geschwindigkeiten zusammensetzen lassen; sind also $(u, u', u'', \cdots)$ und $(v, v', v'', \cdots)$ zwei Systeme möglicher Geschwindigkeiten eines freien unveränderlichen Punktsystems $(m, m', m'', \cdots)$, so liefern die geometrischen Summen:

$$\overline{w} = \overline{u} + \overline{v}, \quad \overline{w'} = \overline{u'} + \overline{v'}, \quad \overline{w''} = \overline{u''} + \overline{v''}, \cdots$$

ein neues System möglicher Geschwindigkeiten derselben Punkte. Aus drei Geschwindigkeiten w, w', w'', die drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte m, m', m'' angehören, kann man, wie oben gezeigt wurde, eine Schraubenbewegung finden, welche das ganze System der resultirenden Geschwindigkeiten $(w, w', w'', \cdots)$ zu erzeugen vermag. In speciellen Fällen reducirt sich diese Bewegung entweder auf eine Translation oder auf eine Rotation allein. Der erste Fall tritt ein, wenn die drei Geschwindigkeiten einander geometrisch gleich sind; der zweite dann, wenn die Ebenen, deren Nullpunkte m, m', m'' sind, sich in einer und derselben Geraden schneiden, d. h. wenn die Geraden mm', mm'' und $m'm''$ eine gemeinschaftliche conjugirte Gerade haben. Diese letztere ist dann die Momentanaxe des Systems von Rotationsgeschwindigkeiten $(w, w', w'', \cdots)$. Ein solches Geschwindigkeitssystem ist auch dann ein rotatorisches, wenn die Punkte m, m', m'' die Nullpunkte einer und derselben

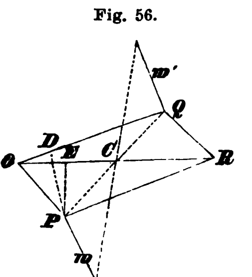
Ebene $mm'm''$ und die Geschwindigkeiten w, w', w'' nicht geometrisch gleich sind. In diesem Falle liegt die Momentanaxe der Rotation in der Ebene $mm'm''$ und ist durch die Schnittpunkte derselben mit den die Endpunkte der Geschwindigkeiten w, w', w'' verbindenden Geraden bestimmt.

Sind die beiden ursprünglichen Geschwindigkeitssysteme $(u, u', u'', \cdots)$ und $(v, v', v'', \cdots)$ translatorische, so ist auch das aus ihnen resultirende System $(w, w', w'', \cdots)$ ein translatorisches. Ist dagegen eins der ursprünglichen Systeme ein Translations-, das andere ein Rotationssystem, so wird das resultirende System entweder eine Schraubenbewegung oder nur eine Rotation; dabei ist die Centralaxe im ersten Falle und die Momentanaxe der Rotation im zweiten parallel der Momentanaxe des ursprünglichen Rotationssystems, und die Winkelgeschwindigkeiten beider Systeme sind einander geometrisch gleich.

142. Betrachten wir nun speciell die Zusammensetzung zweier Systeme von Rotationsgeschwindigkeiten; dabei seien ihre momentanen Winkelgeschwindigkeiten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ gegeben und als Längen in bekannter Weise auf den entsprechenden Rotationsaxen aufgetragen. Es bieten sich hier folgende Einzelfälle dar.

1) *Die Winkelgeschwindigkeiten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ liegen nicht in einer Ebene.* Dann kann man die Geraden $\bar{a}$ und $\bar{b}$ als ein Paar conjugirter Geraden des resultirenden Geschwindigkeitssystemes ansehen; nach §. 135 lassen sich dann die Elemente derjenigen Schraubenbewegung bestimmen, welche das Geschwindigkeitssystem $(w, w', w'', \cdots)$ erzeugen kann.

Fig. 56.



2) *Die Winkelgeschwindigkeiten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ liegen in einer Ebene und schneiden sich.* Den Schnittpunkt kann man dabei als den Anfangspunkt von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ ansehen.

Es sei (Fig. 56) $\overline{OP} = \bar{a}$ und $\overline{OQ} = \bar{b}$. Dann *ist die Winkelgeschwindigkeit des resultirenden Systems $(w, w', w'', \cdots)$ die geometrische Summe der Winkelgeschwindigkeiten $\bar{a}$ und $\bar{b}$.*

Beweis. Für jeden Punkt m der Ebene POQ sind die Geschwindigkeitscomponenten $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auf dieser Ebene senkrecht, und deshalb ist auch ihre geometrische Summe $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$ auf derselben Ebene senkrecht. Stehen aber die Geschwindigkeiten aller Punkte einer Ebene senkrecht auf der Ebene, so ist das ganze Geschwindigkeitssystem (nach §. 139) entweder ein Translationssystem (wenn nämlich die Geschwindigkeiten aller Punkte der Ebene einander geometrisch gleich sind), oder ein Rotationssystem (wenn die Geschwindigkeiten nicht alle einander gleich sind). Im vorliegenden Falle ist die Geschwindigkeit des Punktes O gleich Null; folglich ist das System $(w, w', w'', \cdots)$ ein rotatorisches. Die Momentanaxe desselben muss durch den Punkt O gehen und in der Ebene POQ liegen, da diese Ebene auf den Geschwindigkeiten aller in ihr enthaltenen Punkten senkrecht steht. Um die Richtung dieser Geraden zu bestimmen, muss man noch einen ihrer Punkte suchen. Man erhält einen solchen in dem Schnittpunkte der Ebene POQ mit der geraden Verbindungslinie der Endpunkte der Geschwindigkeiten irgend zweier Punkte dieser Ebene, deren Geschwindigkeiten nicht geometrisch gleich sind.

Betrachten wir nun die Punkte P und Q und bezeichnen wir ihre Geschwindigkeiten bei der resultirenden Bewegung mit w und w'. Da P auf der Momentanaxe $\bar{a}$ liegt, so ist seine Geschwindigkeit bei der Rotationsbewegung um diese Gerade gleich Null; deshalb ist w die Geschwindigkeit des Punktes P bei der Rotation um die Axe $\bar{b}$ und also gleich dem Producte aus OQ in die auf OQ gefällte Senkrechte PD, d. h. gleich der Fläche des Parallelogramms $OPRQ$, das sich über OP und OQ construiren lässt. Ebenso findet man, dass w' gleich der Fläche desselben Parallelogramms ist. Somit sind w und w' einander gleich; sie sind überdies von entgegengesetzter Richtung; die ihre Endpunkte verbindende Gerade schneidet daher die Ebene POQ und der Schnittpunkt C halbirt die Strecke PQ. Man sieht hieraus, dass die Momentanaxe des Systems $(w, w', w'', \cdots)$ die Diagonale OR des Parallelogramms $POQR$ ist.

Bezeichnet nun c die Winkelgeschwindigkeit des resul-

w' die Geschwindigkeiten der Punkte A und B. Da $w = b \cdot AB$, $w' = a \cdot AB$ und $b < a$, so ist $w < w'$; folglich schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte von w und w' die Verlängerung der Geraden AB in einem Punkte C, dessen Geschwindigkeit gleich Null sein muss. Ferner ist $CA : CB = w : w' = b : a$, d. h. die Abstände CA und CB sind den Grössen a und b umgekehrt proportional. Dieselbe Eigenschaft hat jeder Punkt der zu OP parallelen Geraden CR; folglich ist CR die Momentanaxe des resultirenden Geschwindigkeitssystems. Bezeichnet c die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um diese Axe, so ist:

Fig. 58.

$$c \cdot BC = a \cdot AB \text{ und } c \cdot AC = b \cdot AB,$$

woraus folgt:

$$c(BC - AC) = (a - b) \cdot AB \text{ oder } c = a - b.$$

Endlich muss die Rotation um CR denselben Sinn haben, wie die um OP. Also ist die auf der Axe CR aufzutragende Winkelgeschwindigkeit c gleich der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten a und b und hat denselben Sinn wie die grössere von ihnen.

5) *Die Winkelgeschwindigkeiten* $\overline{a}$ *und* $\overline{b}$ *sind parallel und gleich, aber von entgegengesetztem Sinne.*

Dann ist das resultirende System $(w, w', w'', \cdots)$ *ein translatorisches; die gemeinschaftliche Geschwindigkeit ist senkrecht zu der Ebene der Geraden* $\overline{a}$ *und* $\overline{b}$ *und gleich dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit* a *in den Abstand der Geraden* $\overline{a}$ *und* $\overline{b}$.

Beweis. Es sei (Fig. 59) $\overline{OP} = \overline{a}$, $\overline{O'Q} = \overline{b}$ und AB die gemeinsame Senkrechte auf beiden Geraden. In dem resultirenden Systeme $(w, w', w'', \cdots)$ ist die Geschwindigkeit w jedes Punktes der Geraden OP gleich $b \cdot AB$ und die Geschwindigkeit w' jedes Punktes von $O'Q$ gleich $a \cdot AB$. Da aber $a = b$ ist, so ist auch $w = w'$. Ferner haben diese Geschwindigkeiten dieselbe Richtung; sie stehen nämlich senkrecht auf der Ebene $OPQO'$. Man sieht also, dass die Geschwindigkeiten aller Punkte der Ebene der Geraden $\overline{a}$ und $\overline{b}$ auf dieser

Fig. 59.

Ebene senkrecht stehen, nach derselben Seite hin gerichtet und einer und derselben Grösse $a \cdot AB$ gleich sind. Zwei gleiche, parallele und entgegengesetzt gerichtete Winkelgeschwindigkeiten hat Poinsot ein *Rotationspaar* genannt. Der Abstand AB der Winkelgeschwindigkeiten heisst der *Arm des Paares.* Aus dem Gesagten geht nun hervor, dass *ein Rotationspaar ein translatorisches System von Geschwindigkeiten erzeugt, dessen gemeinsame Geschwindigkeit gleich ist dem Arm des Paares, multiplicirt mit der Winkelgeschwindigkeit.*

Umgekehrt: *Jedes translatorische Geschwindigkeitssystem kann durch ein Rotationspaar erzeugt werden, das in einer zu der gemeinsamen Translationsgeschwindigkeit senkrechten Ebene liegt. Dabei sind die Winkelgeschwindigkeit und der Arm des Paares so zu nehmen, dass ihr Product gleich der Geschwindigkeit der Translation wird.*

Zwei, in derselben, oder in zwei parallelen Ebenen liegende Paare erzeugen ein und dasselbe System von Translationsgeschwindigkeiten, wenn die Producte aus den Winkelgeschwindigkeiten in die Arme gleich und die Geschwindigkeiten beider Paare von demselben Sinne sind.

Drei oder mehr Systeme von Rotationsgeschwindigkeiten um einen und denselben Punkt O von den Winkelgeschwindigkeiten $\overline{\omega}, \overline{\omega'}, \overline{\omega''}, \cdots$ lassen sich zu einem einzigen System von Rotationsgeschwindigkeiten um dieselbe Axe zusammensetzen, mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich der geometrischen Summe $\overline{\omega} + \overline{\omega'} + \overline{\omega''} + \cdots$. Drei oder mehr Systeme von Rotationsgeschwindigkeiten mit den parallelen Winkelgeschwindigkeiten $\overline{\omega}, \overline{\omega'}, \overline{\omega''}, \cdots$ lassen sich in ein einziges System von Winkelgeschwindigkeiten zusammensetzen, mit einer Winkelgeschwindigkeit, die ebenfalls der geometrischen Summe $\overline{\omega} + \overline{\omega'} + \overline{\omega''} + \cdots$ gleich ist. Haben alle Geschwindigkeitscomponenten denselben Sinn, so geht diese geometrische Summe in eine arithmetische über, und die Richtung der resultirenden Geschwindigkeit ist parallel und von gleichem Sinne mit den Componenten. Haben aber die Componenten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ verschiedenen Sinn, so muss man, um die Grösse der resultirenden Winkelgeschwindigkeiten zu finden, die Summen der

Componenten des einen und des anderen Sinnes bilden und die kleinere Summe von der grösseren subtrahiren; die Differenz ist die Grösse der resultirenden Winkelgeschwindigkeit. Sie ist allen Componenten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ parallel und hat den Sinn derer, die die grössere Summe bilden.

Die Lage dieser resultirenden Winkelgeschwindigkeiten lässt sich folgendermassen bestimmen. Man suche die Lage der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega} + \overline{\omega'}$, dann die Lage der aus $\overline{\omega + \omega'}$ und $\overline{\omega''}$ resultirenden Winkelgeschwindigkeit, u. s. f., bis man die Resultante aller Winkelgeschwindigkeiten erhält. Doch lässt sich, wie wir gleich zeigen werden, die Lage jener Resultante auch direct finden.

Es seien (Fig. 60) $A, A', A'', \cdots$ die Spuren der Winkelgeschwindigkeitscomponenten in einer zu ihnen senkrechten Ebene, O die Spur der resultirenden Winkelgeschwindigkeit, Ox und Oy zwei zu einander senkrechte Axen, (x, y) $(x', y'), \cdots$ die Coordinaten der Punkte $A, A', \cdots$ bezüglich dieser Axen und $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ die Werthe der Winkelgeschwindigkeitscomponenten, wobei diejenigen als positiv gerechnet werden mögen, welche die absolut grössere Summe geben; überdiess wollen wir annehmen, dass die erste Componente ω positiv sei.

Fig. 60.

Denken wir uns nun diejenigen Geschwindigkeiten, die der Punkt O haben würde, wenn er mit jeder der Winkelgeschwindigkeitscomponenten einzeln rotiren würde. Da die geometrische Summe dieser Geschwindigkeiten gleich Null sein soll, so muss die Summe ihrer Projectionen auf die Axe Ox gleich Null sein. Die Geschwindigkeit OB des Punktes O bei seiner Rotation um die durch A gehende Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ω ist $\omega \cdot AO$ und ihre Projection auf die Axe Ox ist:

$$\omega \cdot AO \cos(BOx) = \omega \cdot AO \sin(AOx) = \omega y.$$

Ebenso findet man, dass die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes O um die durch A' gehende Axe gleich $\pm \omega' \cdot A'O$ ist; ihre Projection auf die Axe Ox ist daher $\omega' \cdot y'$, welches Zeichen auch ω' und y' haben mögen. Dasselbe gilt von den

Projectionen der übrigen Rotationsgeschwindigkeiten des Punktes O. Man schliesst hieraus, dass

$$\Sigma \omega y = \omega y + \omega' y' + \omega'' y'' + \cdots = 0;$$

diese Bedingung besteht für jede Richtung der Axe Ox. Nennt man, wie dies gewöhnlich geschieht, das Product aus der Winkelgeschwindigkeit in ihren Abstand von dieser Axe das *Moment in Bezug auf diese Axe*, so kann man sagen, dass *die algebraische Summe der Momente aller Winkelgeschwindigkeitscomponenten bezüglich jeder Axe, die durch O geht, gleich Null sein muss.* Man hat hiernach auch:

$$\Sigma \omega x = \omega x + \omega' x' + \cdots = 0.$$

Gesetzt nun, es seien (x, y), (x', y'), $\cdots$ die Coordinaten der Punkte A, A', A'', $\cdots$ in Bezug auf Axen, deren Ursprung nicht in O liegt, und es seien α und β die Coordinaten von O, so sind $(x - \alpha, y - \beta)$, $(x' - \alpha, y' - \beta)$, $\cdots$ die Coordinaten der Punkte A, A', A'', $\cdots$ in Bezug auf die neuen Axen, und man hat nach dem Obigen:

$$\Sigma \omega (x - \alpha) = 0, \quad \Sigma \omega (y - \beta) = 0$$

oder:

$$\alpha \Sigma \omega = \Sigma \omega x, \quad \beta \Sigma \omega = \Sigma \omega y, \tag{a}$$

woraus für die Coordinaten des Punktes O folgt:

$$\alpha = \frac{\Sigma \omega x}{\Sigma \omega}, \quad \beta = \frac{\Sigma \omega y}{\Sigma \omega}.$$

Aus den Gleichungen (a) sieht man, dass *das Moment der resultirenden Winkelgeschwindigkeit $\Sigma \omega$ bezüglich irgend einer durch den Punkt O gehenden Axe gleich der Summe der Momente aller Winkelgeschwindigkeitscomponenten bezüglich derselben Axe ist.*

Hat man durch die Coordinaten α und β die Lage des Punktes O gefunden, so zieht man durch ihn eine Parallele zu den Winkelgeschwindigkeitscomponenten und trägt auf dieser Geraden die Grösse $\Sigma \omega$ auf, im Sinne der Componenten, welche in der Summe $\Sigma \omega$ das Zeichen $+$ haben.

143. Die hier entwickelten Eigenschaften der möglichen Geschwindigkeiten eines freien unveränderlichen Punktsystems lassen sich ebenso leicht auch mit Hülfe der allgemeinen Formeln für die Projectionen der Geschwindigkeiten auf drei

zu einander rechtwinklige Axen beweisen. Diese von Euler*) aufgestellten Formeln kann man auf folgende Weise erhalten.

Man zerlegt das gegebene System der möglichen Geschwindigkeiten $(v, v', v'', \cdots)$ in ein Rotationssystem $(w, w', w'', \cdots)$ um den Punkt O, dessen Geschwindigkeit k ist und in ein Translationssystem von der gemeinsamen Geschwindigkeit k. Dann wählt man drei zu einander rechtwinklige und mit den Punkten des Systems unveränderlich verbundene Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz. Es seien nun α, β, γ die Projectionen der Geschwindigkeit k auf diese drei Axen; x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes m; v_x, v_y, v_z die Projectionen seiner Geschwindigkeit v; w_x, w_y, w_z die Projectionen der entsprechenden Rotationsgeschwindigkeit w; A, B, C die Punkte auf den Coordinatenaxen, welche, wie in §. 25, in einem Abstande gleich der Einheit vom Anfangspunkte O liegen; p die Projection der Geschwindigkeit des Punktes B auf die Axe Oz, q die der Geschwindigkeit des Punktes C auf die Axe Ox und r die der Geschwindigkeit des Punktes A auf die Axe Oy.

Die Geschwindigkeit w hat dieselbe Bedeutung wie die Grösse u_1'' in §. 25, d. h. sie ist die geometrische Derivirte der mit den Coordinatenaxen fest verbundenen Strecke Om; daher erhält man ihre Projectionen auf die Coordinatenaxen nach den Formeln (3) §. 25, und zwar:

$$\begin{aligned} w_x &= qz - ry, \\ w_y &= rx - pz, \\ w_z &= py - qx. \end{aligned} \tag{9}$$

Da die Geschwindigkeit $\overline{v}$ die geometrische Summe der Geschwindigkeiten $\overline{w}$ und $\overline{k}$ ist, so ist:

$$v_x = \alpha + w_x, \quad v_y = \beta + w_y, \quad v_z = \gamma + w_z,$$

d. h.

$$\begin{aligned} v_x &= \alpha + qz - ry, \\ v_y &= \beta + rx - pz, \\ v_z &= \gamma + py - qx. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Formeln (9) zeigen, dass (s. §. 26) das System der

*) Mémoires de l'Académie de Berlin 1750: Découverte d'un nouveau principe de mécanique.

Rotationsgeschwindigkeiten $(w, w', w'', \cdots)$ eine Momentanaxe der Rotation hat, deren Gleichungen sind:

$$qz - ry = 0, \quad rx - pz = 0, \quad py - qx = 0,$$

und dass p, q, r die Projectionen der auf der Momentanaxe aufgetragenen Momentanwinkelgeschwindigkeit ω auf die Coordinatenaxen sind, wie schon in §. 26 gezeigt wurde.

Grösse und Richtung von $\bar{\omega}$ hängen von der Wahl des Coordinatenursprunges O nicht ab. Um sich davon zu überzeugen, verlege man den Anfangspunkt nach dem Punkte O', dessen Coordinaten a, b, c und dessen Geschwindigkeit k' ist. Bedeuten nun α', β', γ' die Projectionen dieser Geschwindigkeiten auf die Coordinatenaxen, so hat man nach den Formeln (10):

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + qc - rb, \\ \beta' &= \beta + ra - pc, \\ \gamma' &= \gamma + pb - qa. \end{aligned} \tag{11}$$

Eliminirt man mit Hilfe dieser Formeln α, β, γ aus den Formeln (10), so folgt:

$$\begin{aligned} v_x &= \alpha' + q(z-c) - r(y-b), \\ v_y &= \beta' + r(x-a) - p(z-c), \\ v_z &= \gamma' + p(y-b) - q(x-a), \end{aligned} \tag{12}$$

wo $x-a$, $y-b$, $z-c$ die Coordinaten des Punktes m sind in Bezug auf den vorigen parallele Axen mit dem Ursprung in O' und p, q, r wiederum die Projectionen der Rotationswinkelgeschwindigkeit um O' auf diese Axen; es ist somit diese Winkelgeschwindigkeit geometrisch gleich $\bar{\omega}$, was mit §. 129 übereinstimmt.

144. Um eine das gegebene Geschwindigkeitssystem erzeugende Schraubenbewegung zu finden, muss die Lage des Punktes O' so gewählt werden, dass die Geschwindigkeit k' in die Momentanaxe fällt. Diese Bedingung drückt sich folgendermassen aus:

$$\alpha' = \pm \frac{p}{\omega} k', \quad \beta' = \pm \frac{q}{\omega} k', \quad \gamma' = \pm \frac{r}{\omega} k'; \tag{13}$$

woraus folgt:

$$k' = \pm \frac{1}{\omega} (\alpha' p + \beta' q + \gamma' r);$$

dies geht infolge der Formeln (11) über in den Ausdruck

$$k' = \pm \frac{1}{\omega} (\alpha p + \beta q + \gamma r) = \pm k \cos (k\omega),$$

welcher zeigt, dass die Translationsgeschwindigkeit der Schraubenbewegung gleich der gemeinsamen Projection aller Geschwindigkeiten auf die Momentanaxe ist. Sie hat denselben oder den entgegengesetzten Sinn wie ω, je nachdem der Winkel $(k\omega)$ ein spitzer oder ein stumpfer ist.

Eliminirt man k' aus den Gleichungen (13), so erhält man die Gleichungen

$$q\gamma' - r\beta' = 0, \quad r\alpha' - p\gamma' = 0, \quad p\beta' - q\alpha' = 0,$$

die wegen der Formeln (11) die folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} q\gamma - r\beta - \omega^2 a + p(pa + qb + rc) &= 0, \\ r\alpha - p\gamma - \omega^2 b + q(pa + qb + rc) &= 0, \\ p\beta - q\alpha - \omega^2 c + r(pa + qb + rc) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Dies sind die Gleichungen der Centralaxe. Eine Gleichung ist die Folge der beiden übrigen; daher haben die Coordinaten a, b, c unendlich viele Werthe. Gesetzt, es bedeuten a, b, c die Coordinaten des Endpunktes des vom Punkte O auf die Centralaxe gefällten Perpendikels ϱ. Die Bedingung, dass ϱ auf ω senkrecht steht, liefert dann:

$$pa + qb + rc = 0;$$

hiermit erhält man aus den Gleichungen (14):

$$a = \frac{1}{\omega^2}(q\gamma - r\beta), \quad b = \frac{1}{\omega^2}(r\alpha - p\gamma), \quad c = \frac{1}{\omega^2}(p\beta - q\alpha), \tag{15}$$

und hieraus folgt:

$$\varrho = \frac{1}{\omega^2} [(q\gamma - r\beta)^2 + (r\alpha - p\gamma)^2 + (p\beta - q\alpha)^2]^{\frac{1}{2}},$$

was leicht überzuführen ist in:

$$\varrho = \frac{k \sin (k\omega)}{\omega}.$$

Hier ist nun $k \sin (k\omega) = \varrho\omega$ die Projection der Geschwindigkeit des Punktes O auf eine zur Centralaxe senkrechte

Ebene, zugleich aber auch die Rotationsgeschwindigkeit dieses Punktes um die Centralaxe.

145. Ebenso leicht lässt sich auf Grund der Formeln (10) die Eigenschaft der conjugirten Rotationsaxen (§. 133) beweisen.

Bedeutet nämlich u den Abstand des Punktes (x, y, z) von irgend einem andern Punkte (ξ, η, ζ), so ist:

$$\overline{uv} = (x - \xi) v_x + (y - \eta) v_y + (z - \zeta) v_z,$$

und nach den Formeln (10):

$$\overline{uv} = (x - \xi)(\alpha + qz - ry) + (y - \eta)(\beta + rx - pz) + \\ + (z - \zeta)(\gamma + py - qx).$$

Diesen Ausdruck kann man auch schreiben:

$$\overline{uv} = \alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta) + \gamma(z - \zeta) + \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

oder auch:

$$\overline{uv} = (x - \xi)(\alpha + q\zeta - r\eta) + (y - \eta)(\beta + r\xi - p\zeta) + \\ + (z - \zeta)(\gamma + p\eta - q\xi).$$

Der letztere Ausdruck ist die Summe der Producte der Projectionen der Strecke $\bar{u}$ und der Projectionen der Geschwindigkeiten des Punktes (ξ, η, ζ) auf die Coordinatenaxen, d. h. er stellt das geometrische Product dieser beiden Grössen dar; bezeichnet man daher mit $\bar{\varepsilon}$ die Geschwindigkeiten des Punktes (ξ, η, ζ), so ist $\overline{uv} = \overline{u\varepsilon}$, und dies bedeutet so viel, als dass $\frac{du}{dt} = 0$ ist. Steht die Geschwindigkeit $\bar{v}$ senkrecht auf $\bar{u}$, so ist $\bar{\varepsilon}$ entweder senkrecht auf $\bar{u}$ oder gleich Null; für diesen Fall ergiebt sich die Gleichung:

$$\alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta) + \gamma(z - \zeta) + \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Dieselbe ist bei constanten x, y, z und veränderlichen ξ, η, ζ die Gleichung der Ebene P, deren Nullpunkt der Punkt (x, y, z) ist (§. 139). Bei constanten ξ, η, ζ und veränderlichen x, y, z dagegen ist sie die Gleichung der Ebene

Π, deren Nullpunkt der Punkte (ξ, η, ζ) ist. So drückt also diese Gleichung die polare Beziehung zwischen dem System der Punkte (x, y, z) und dem der Punkt (ξ, η, ζ) aus. Vertauscht man den Punkt (x, y, z) mit einem anderen nicht in der Ebene P gelegenen, so erhält man die Gleichung:

$$\alpha(x'-\xi)+\beta(y'-\eta)+\gamma(z'-\zeta)+\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}=0, \quad (17)$$

welche bei constanten x', y', z' die Ebene P' darstellt, deren Nullpunkt in (x', y', z') liegt; die beiden Gleichungen (16) und (17), beide mit constanten x, y, z, x', y', z' und veränderlichen ξ, η, ζ genommen, stellen daher zusammen die Schnittlinie Δ der Ebenen P und P' dar. Diese Gerade ist zu der durch die Punkte (x, y, z) und (x', y', z') gehenden Geraden D conjugirt.

Wir werden nun beweisen, dass Δ die Rotationsaxe für die Geschwindigkeiten der Punkte von D ist.

Da die Geschwindigkeit v des Punktes (x, y, z) auf Δ senkrecht steht, so kann man sich eine solche Rotationsbewegung um Δ denken, bei der der Punkt (x, y, z) die Geschwindigkeit v hat. Es ist nun zu zeigen, dass in diesem Falle der Punkt (x', y', z') die Geschwindigkeit v' erhält.

Die Winkelgeschwindigkeit a dieser Bewegung muss gleich dem Verhältniss der Geschwindigkeit v zu dem Abstand h des Punktes (x, y, z) von Δ sein und auf Δ nach der Regel des §. 26 aufgetragen werden. Bezeichnet man die Projectionen von a auf die Coordinatenaxen mit p', q', r', so erhält man nach den Euler'schen Formeln die folgenden Ausdrücke für die Projectionen der Geschwindigkeit v auf die Coordinatenaxen:

$$\begin{aligned} v_x &= q'(z-\zeta)-r'(y-\eta), \\ v_y &= r'(x-\xi)-p'(z-\zeta), \\ v_z &= p'(y-\eta)-q'(x-\xi). \end{aligned} \quad (18)$$

Jetzt werden wir die Projectionen der Geschwindigkeit v' auf die Coordinatenaxen bestimmen und zeigen, dass sie aus den vorigen hervorgehen, wenn man x, y, z durch x', y', z' ersetzt.

Ist ϱ der Abstand der Punkte (x, y, z) und (x', y', z') von einander, so erhält man aus dem bekannten Ausdruck für ein geometrisches Product die Gleichung:

$$(x - x')\, v'_x + (y - y')\, v'_y + (z - z')\, v'_z = \overline{v'\varrho}.$$

Da aber v' auf $\varDelta$ und auf der geraden Verbindungslinie der Punkte (x', y', z') und (ξ, η, ζ) senkrecht steht, so hat man noch die zwei Gleichungen:

$$p' v'_x + q' v'_y + r' v'_z = 0,$$
$$(x' - \xi)\, v'_x + (y' - \eta)\, v'_y + (z' - \zeta)\, v'_z = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{\overline{v'\varrho}}{\varDelta}\,[q'(z' - \zeta) - r'(y - \eta)], \\ v'_y &= \frac{\overline{v'\varrho}}{\varDelta}\,[r'(x' - \xi) - p'(z' - \zeta)], \\ v'_z &= \frac{\overline{v'\varrho}}{\varDelta}\,[p'(y' - \eta) - q'(x' - \xi)], \end{aligned} \tag{19}$$

wo

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x - x', & y - y', & z - z' \\ p', & q', & r', \\ x' - \xi, & y' - \eta, & z' - \zeta \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen der dritten Zeile die der ersten addirt; man erhält dadurch:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x - x', & y - y', & z - z' \\ p', & q', & r' \\ x - \xi, & y - \eta, & z - \zeta \end{vmatrix}$$

$$= (x - x') \begin{vmatrix} q' & r' \\ y - \eta, & z - \zeta \end{vmatrix} + (y - y') \begin{vmatrix} r' & p' \\ z - \zeta, & x - \xi \end{vmatrix} +$$
$$+ (z - z') \begin{vmatrix} p' & q' \\ x - \xi, & y - \eta \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck geht wegen der Formeln (18) über in:

$$(x - x')\, v_x + (y - y')\, v_y + (z - z')\, v_z = \overline{v\varrho}.$$

Da aber $\frac{d\varrho}{dt} = 0$ ist, so wird $\overline{v\varrho} = \overline{v'\varrho}$; also $\varDelta = \overline{v'\varrho}$, und die Formeln (19) gehen in die aus den Formeln (18) ent-

springenden über, wenn man x, y, z mit x', y', z' vertauscht.

Wir schliessen hieraus, dass die Geschwindigkeiten v und v', gleichwie auch die Geschwindigkeiten der übrigen Punkte der Geraden D durch eine Rotation um $\varDelta$ mit der Winkelgeschwindigkeit a hervorgebracht werden können. Ebenso findet man, dass alle Geschwindigkeiten der Punkte der Geraden $\varDelta$ durch eine Rotation um D mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit b hervorgebracht werden können.

146. Wir haben oben gesehen, dass, wenn eine Gerade auf der Geschwindigkeit eines ihrer Punkte senkrecht steht, sie auch auf den Geschwindigkeiten ihrer sämmtlichen übrigen Punkte senkrecht steht. Eine solche Gerade muss als sich selbst conjugirt angesehen werden und kann nicht zur Rotationsaxe gewählt werden. Fasst man alle diese Geraden zusammen und betrachtet sie getrennt von allen übrigen Geraden des Raumes, so bilden sie einen geometrischen Ort, den Plücker*) einen *Liniencomplex* genannt hat. Zwischen den Coordinaten der Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ) einer solchen Geraden L besteht die Gleichung (16), die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)+p(\eta z-\zeta y)+ \\ q(\zeta x-\xi z)+r(\xi y-\eta x)=0, \tag{20}$$

wobei die Grössen α, β, γ, p, q, r als constant und

$$x-\xi, \quad y-\eta, \quad z-\zeta, \tag{21}$$

$$\eta z-\zeta y, \quad \zeta x-\xi z, \quad \xi y-\eta x \tag{22}$$

als die Variablen zu betrachten sind. Die letzteren sechs Grössen nennt man die Coordinaten der Geraden L, weil man

---

*) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Leipzig, 1868.

Zeuthen: Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. Mathem. Annalen, herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann. I. Band, 1869.

Drach: Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe. Ib. II. Band, 1870.

F. Klein: Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. Ib. II. Band, 1870.

P. Chelini: Sulla nuova Geometria de' Complessi. Bologna 1871.

mit ihrer Hilfe die Lage dieser Geraden bestimmen kann. Zu diesem Zwecke zieht man von dem Coordinatenursprung O als Anfangspunkt aus eine Strecke r, die die Grössen (21) zu Projectionen hat, sowie eine Strecke μ, deren Projectionen (22) sind. Die Ausdrücke (22) zeigen, dass μ diejenige Geschwindigkeit ist, welche der Punkt O haben würde, wenn die durch O und die Gerade L gehende Ebene um L rotiren würde, mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich r, die auf L vom Punkte (ξ, η, ζ) nach (x, y, z) aufgetragen wäre. Zieht man also durch O eine Senkrechte zu μ und r und trägt auf ihr, (nach rechts hin für einen in der Richtung von r stehenden Beobachter, der auf μ hinschaut) eine Strecke $h = \frac{\mu}{r}$ auf, so ist die durch den Endpunkt von h gezogene Parallele zu r die Gerade L.

Die Coordinaten (21) und (22) der Geraden L, die aus den Coordinaten zweier ihrer Punkte zusammengesetzt sind, lassen sich auch durch andere ersetzen, die aus den Coordinaten zweier, in der Geraden L sich schneidender Ebenen zusammengesetzt sind.

Die Gleichung $Ax + By + Cz = D$ der Ebene P ist durch die Verhältnisse

$$l = \frac{A}{D}, \quad m = \frac{B}{D}, \quad n = \frac{C}{D}$$

bestimmt, welche man die Coordinaten der Ebene P nennen kann. Sind λ, μ, ν eben solche Coordinaten der Ebene Π, so können die sechs Grössen

$$l - \lambda, \quad m - \mu, \quad n - \nu, \quad \mu n - \nu m, \quad \nu l - \lambda n, \quad \lambda m - \mu l \qquad (23)$$

zur Bestimmung der Schnittlinie L der Ebenen P und Π dienen; man nennt sie deshalb Coordinaten der Geraden L. Gesetzt, L gehe durch die Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ), so hat man die Gleichungen:

$$lx + my + nz = 1, \quad l\xi + m\eta + n\zeta = 1,$$

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 1, \quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 1,$$

aus welchen folgt:

$$l(x-\xi)+m(y-\eta)+n(z-\zeta)=0,$$
$$(\lambda-l)\,x+(\mu-m)\,y+(\nu-n)\,z=0,$$
$$\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)+\nu(z-\zeta)=0,$$
$$(\lambda-l)\,\xi+(\mu-m)\,\eta+(\nu-n)\,\zeta=0;$$

aus diesen Gleichungen ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{x-\xi}{m\nu-n\mu}=\frac{y-\eta}{n\lambda-l\nu}=\frac{z-\zeta}{l\mu-m\lambda}=\frac{\eta z-\zeta y}{\lambda-l}=\frac{\zeta x-\xi z}{\mu-m}=\frac{\xi y-\eta x}{\nu-n};$$

mit Hilfe dieser Proportionen lassen sich in der Gleichung des Complexes (20) die Coordinaten (21) und (22) durch die Coordinaten (23) ersetzen, wodurch man erhält:

$$\alpha(m\nu-n\mu)+\beta(n\lambda-l\nu)+\gamma(l\mu-m\lambda)+p(\lambda-l)+$$
$$+q(\mu-m)+r(\nu-n)=0. \tag{24}$$

Wählt man zu den Ebenen $P(l, m, n)$ und $\Pi(\lambda, \mu, \nu)$ diejenigen, deren Pole (x, y, z) und (ξ, η, ζ) sind, so lassen sich die Coordinaten $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ durch die Geschwindigkeiten v und ε jener Punkte bestimmen. Da nämlich die Geschwindigkeiten v und ε auf der Geraden L senkrecht stehen, so hat man:

$$(x-\xi)\,v_x+(y-\eta)\,v_y+(z-\zeta)\,v_z=0,$$
$$(x-\xi)\,\varepsilon_x+(y-\eta)\,\varepsilon_y+(z-\zeta)\varepsilon_z=0,$$

wo v_x, v_y, v_z die Projectionen von v und ε_x, ε_y, ε_z die Projectionen von ε auf die Coordinatenaxen sind. Es ergeben sich daher die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
l&=\frac{v_x}{xv_x+yv_y+zv_z}=\frac{\alpha+qz-ry}{\alpha x+\beta y+\gamma z},\\
m&=\frac{v_y}{xv_x+yv_y+zv_z}=\frac{\beta+rx+pz}{\alpha x+\beta y+\gamma z},\\
n&=\frac{v_z}{xv_x+yv_y+zv_z}=\frac{\gamma+py-qx}{\alpha x+\beta y+\gamma z},\\
\lambda&=\frac{\varepsilon_x}{\xi\varepsilon_x+\eta\varepsilon_y+\zeta\varepsilon_z}=\frac{\alpha+q\zeta-r\eta}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta},\\
\mu&=\frac{\varepsilon_y}{\xi\varepsilon_x+\eta\varepsilon_y+\zeta\varepsilon_z}=\frac{\beta+r\xi-p\zeta}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta},\\
\nu&=\frac{\varepsilon_z}{\xi\varepsilon_x+\eta\varepsilon_y+\zeta\varepsilon_z}=\frac{\gamma+p\eta-q\xi}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Liegt der Punkt (ξ, η, ζ) in der Charakteristik der Ebene P, deren Pol (x, y, z) ist, so liegt (nach §. 139) die Geschwin-

digkeit ε in der Ebene P; also muss die Bedingung $\overline{\varepsilon v} = 0$ erfüllt sein, d. h. es ist:

$$v_x \varepsilon_x + v_y \varepsilon_y + v_z \varepsilon_z = 0$$

oder

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0. \qquad (26)$$

Diese Gleichung bestimmt in Verbindung mit Gleichung (24) bei variablen λ, μ, ν die Charakteristik.

Die Gleichung (26) lässt sich mit Hilfe der Formeln (25) auf die Form bringen:

$$l(\alpha + q\zeta - r\eta) + m(\beta + r\xi - p\zeta) + n(\gamma + p\eta - q\xi) = 0$$

oder

$$\alpha l + \beta m + \gamma n + \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ p, & q, & r \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix} = 0. \qquad (27)$$

(20) und (27) sind die Gleichungen der Charakteristik in den gewöhnlichen Coordinaten ξ, η, ζ.

Aus den Formeln (10) sieht man, dass alle Punkte, deren Geschwindigkeiten einander geometrisch gleich sind, auf einer, zur Momentanaxe parallelen Geraden liegen; denn wenn die Grössen v_x, v_y, v_z constant und x, y, z veränderlich sind, so sind (10) die Gleichungen einer Geraden, die der Geraden

$$qz - ry = 0, \quad rx - pz = 0, \quad py - qx = 0$$

parallel ist. Alle Ebenen P, deren Pole (x, y, z) in einer solchen Geraden liegen, sind einander parallel; also liegt die Gerade Δ, die zu D conjugirt ist, im Unendlichen, wenn die letztere der Momentanaxe parallel ist. Eine zur Momentanaxe parallele Gerade nennt Plücker einen *Durchmesser des Complexes* (20).

Die Ebene P steht auf dem ihr zugeordneten Durchmesser senkrecht, wenn die Geschwindigkeit des Pols (x, y, z) die Richtung des Durchmessers hat; diese Eigenschaft kommt der Centralaxe zu; deshalb nennt auch Plücker die Centralaxe *Axe des Complexes.*

147. Mit Hilfe der Formeln (10) lässt sich eine allgemeine Methode für die Zusammensetzung mehrerer Systeme möglicher Geschwindigkeiten entwickeln.

Es seien (V), (V'), (V''), $\cdots$ die gegebenen Systeme möglicher Geschwindigkeiten, die zu einem einzigen Systeme möglicher Geschwindigkeiten (U) zusammengesetzt werden sollen; wir wollen dabei voraussetzen, dass jedes gegebene System in ein Translations- und ein Rotationssystem zerlegt sei, und zwar seien A, A', A'', $\cdots$ die Rotationscentra, k, k', k'', $\cdots$ die Geschwindigkeiten der Translationssysteme und ω, ω', ω'', $\cdots$ die Winkelgeschwindigkeiten der Rotationssysteme. Wir wählen nun einen beliebigen Punkt O als Ursprung der rechtwinkligen Axen Ox, Oy, Oz und bezeichnen mit (a, b, c), (a', b', c'), $\cdots$ die Coordinaten der Punkte A, A', A'', $\cdots$; mit (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $\cdots$ die Projectionen der Geschwindigkeiten k, k', k'', $\cdots$ auf die Coordinatenaxen; mit (p, q, r), (p', q', r'), $\cdots$ die Projectionen der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω'', $\cdots$ auf dieselben; mit (v_x, v_y, v_z), (v_x', v_y', v_z'), $\cdots$ die Projectionen der, einem und demselben Punkte $M(x, y, z)$ in den Systemen (V), (V'), (V''), $\cdots$ zugehörigen Geschwindigkeiten v, v', v'', $\cdots$ auf die Coordinatenaxen. Nach den Formeln (10) hat man:

$$v_x = \alpha + q(z - c) - r(y - b),$$
$$v_x' = \alpha' + q'(z - c') - r'(y - b'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Addirt man diese Grössen, so erhält man die Projection auf die Axe Ox derjenigen Geschwindigkeit, welche der Punkt (x, y, z) in dem resultirenden Systeme (U) hat. Bezeichnet man diese Geschwindigkeit mit u, ihre Projectionen auf die Coordinatenaxen mit u_x, u_y, u_z und eine Summe gleichartiger, den Systemen (V), (V'), (V''), $\cdots$ angehöriger Grössen mit Σ, so hat man:

$$u_x = \Sigma\alpha - \Sigma(qc - rb) + z\Sigma q - y\Sigma r$$

und ebenso

$$u_y = \Sigma\beta - \Sigma(ra - pc) + x\Sigma r - z\Sigma p,$$
$$u_z = \Sigma\gamma - \Sigma(pb - qa) + y\Sigma p - x\Sigma q.$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma\alpha - \Sigma(qc - rb), \\ B &= \Sigma\beta - \Sigma(ra - pc), \\ C &= \Sigma\gamma - \Sigma(pb - qa); \end{aligned} \tag{28}$$

$$P = \Sigma p, \quad Q = \Sigma q, \quad R = \Sigma r, \tag{29}$$

so hat man:

$$\begin{aligned} u_x &= A + Qz - Ry, \\ u_y &= B + Rx - Pz, \\ u_z &= C + Py - Qx. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Summen $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$ in den Formeln (28) sind die Projectionen der geometrischen Summe $\overline{k} + \overline{k'} + \overline{k''} + \cdots$ auf die Axen und

$$-(qc - rb), \quad -(ra - pc), \quad -(pb - qa)$$

sind die Projectionen der Geschwindigkeit, welche der Coordinatenursprung bei einer Rotation um den Punkt A mit der Winkelgeschwindigkeit ω haben würde; daher ist *die Translationsgeschwindigkeit K des resultirenden Systems* (U) *die geometrische Summe aller Translationsgeschwindigkeiten $k, k', k'', \cdots$ der gegebenen Systeme* (V), (V'), (V''), $\cdots$ *und aller der Geschwindigkeiten, welche der Punkt O bei den Rotationen um die Punkte $A, A', A'', \cdots$ mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ haben würde.* Die Formeln (29) und (30) zeigen, dass *die Winkelgeschwindigkeit Ω des resultirenden Systems* (U) *die geometrische Summe der Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ ist.*

Gesetzt, jedes der gegebenen Geschwindigkeitssysteme (V), (V'), (V''), $\cdots$ sei in ein Rotationssystem um einen und denselben Punkt O und in ein Translationssystem mit der, diesem Punkte zukommenden Geschwindigkeit k zerlegt; dann ist $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $a' = 0$, $b' = 0, \cdots$ und $A = \Sigma\alpha$, $B = \Sigma\beta$, $C = \Sigma\gamma$.

Specielle Fälle.

1) Die Winkelgeschwindigkeit Ω oder die geometrische Summe der Winkelgeschwindigkeiten $\overline{\omega} + \overline{\omega'} + \overline{\omega''} + \cdots$ ist gleich Null, d. h. $\Sigma p = 0$, $\Sigma q = 0$, $\Sigma r = 0$. Dann ist das resultirende System (U) ein Translationssystem mit der Geschwindigkeit k.

2) Die Translationsgeschwindigkeit k ist gleich Null; d. h. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Dann ist (U) ein Rotationssystem um den Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit Ω.

Dieser Fall tritt unter anderem ein, wenn die Geschwin-

digkeitssysteme (V), (V'), $\cdots$ Rotationssysteme um den Punkt O sind, d. h. wenn $k = 0$, $k' = 0, \cdots$, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $a' = 0$, $b' = 0, \cdots$. Hieraus ergiebt sich die Regel (§. 142) für die Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden.

3) $k = 0$, $\Omega = 0$, d. h. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Dann sind alle Geschwindigkeiten des Systems (U) gleich Null. Diesen Fall kann man den *Fall des Gleichgewichts der gegebenen Geschwindigkeitssysteme* (V), (V'), $\cdots$ nennen.

4) Das resultirende System (U) ist ein Rotationssystem um einen gewissen Punkt (ξ, η, ζ). Dies kann nur dann der Fall sein, wenn die Ausdrücke (30) für gewisse Werthe von x, y, z zu Null werden können, d. h. wenn es endliche Grössen ξ, η, ζ giebt, die den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} A + Q\zeta - R\eta &= 0, \\ B + R\xi - P\zeta &= 0, \\ C + P\eta - Q\xi &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Hierzu ist erstens erforderlich, dass die drei Grössen P, Q, R nicht gleichzeitig Null sind, d. h. dass die Winkelgeschwindigkeit Ω nicht Null ist. Zweitens erfordert ein gleichzeitiges Bestehen der Gleichungen (31) die Erfüllung der Bedingung:

$$AP + BQ + CR = 0 \text{ oder } \overline{K\Omega} = 0. \tag{32}$$

Man sieht hieraus, dass in diesem Falle *die Translationsgeschwindigkeit K entweder gleich Null oder senkrecht zu der Winkelgeschwindigkeit Ω gerichtet sein muss.* Der erstere Fall ist oben unter 2) besprochen worden. In beiden Fällen aber ist (U) ein Rotationssystem und die Gleichungen (31) stellen dessen Momentanaxe dar; die Winkelgeschwindigkeit ist Ω. Sind die Translationsgeschwindigkeiten k, k', k'', $\cdots$ gleich Null, so ist

$$\Sigma\alpha = 0, \quad \Sigma\beta = 0, \quad \Sigma\gamma = 0,$$

und die Bedingungsgleichung (32) nimmt die Form an:

$$\Sigma p \cdot \Sigma(qc - rb) + \Sigma q \cdot \Sigma(ra - pc) + \Sigma r \cdot \Sigma(pb - qa) = 0.$$

Diese Gleichung ist unter anderem erfüllt, wenn alle Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ einander parallel sind; denn dann lassen sich alle Rotationsgeschwindigkeiten des Punktes O um die Punkte $A, A', A'', \cdots$ mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$, da sie auf den Richtungen der letzteren senkrecht sind, zu einer einzigen Geschwindigkeit K zusammensetzen, die in einer zu jenen Richtungen senkrechten Ebene liegt. Da nun die geometrische Summe $\overline{\Omega} = \overline{\omega} + \overline{\omega'} + \overline{\omega''} + \cdots$ den Componenten parallel gerichtet ist, so ist sie auf K senkrecht; folglich ist $\overline{K\Omega} = 0$. Sind ferner λ, μ, ν die Winkel, welche Ω mit den Coordinatenaxen bildet, so bilden die Componenten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ mit den Axen dieselben Winkel oder deren Supplemente; man kann daher setzen:

$$p = \omega \cos\lambda, \quad q = \omega\cos\mu, \quad r = \omega\cos\nu,$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um den Punkt A bedeutet, mit $+$ oder $-$ genommen, je nachdem sie dem Sinne nach mit Ω übereinstimmt oder nicht. Dadurch wird aber:

$$A = -\Sigma(qc - rb) = \cos\nu\Sigma\omega b - \cos\mu\Sigma\omega c,$$
$$B = -\Sigma(ra - pc) = \cos\lambda\Sigma\omega c - \cos\nu\Sigma\omega a,$$
$$C = -\Sigma(pb - qa) = \cos\mu\Sigma\omega a - \cos\lambda\Sigma\omega b,$$

und die Gleichungen der Momentanaxe (31) gehen über in:

$$(\Sigma\omega b - \eta\Omega)\cos\nu - (\Sigma\omega c - \zeta\Omega)\cos\mu = 0,$$
$$(\Sigma\omega c - \zeta\Omega)\cos\lambda - (\Sigma\omega a - \xi\Omega)\cos\nu = 0,$$
$$(\Sigma\omega a - \xi\Omega)\cos\mu - (\Sigma\omega b - \eta\Omega)\cos\lambda = 0,$$

wo $\Omega = \Sigma\omega$ ist.

Diese Gleichungen werden, unabhängig von den Werthen der Winkel λ, μ, ν, erfüllt, wenn man setzt:

$$\Sigma\omega a - \xi\Omega = 0, \quad \Sigma\omega b - \eta\Omega = 0, \quad \Sigma\omega c - \zeta\Omega = 0,$$

d. h.

$$\xi = \frac{\Sigma\omega a}{\Omega}, \quad \eta = \frac{\Sigma\omega b}{\Omega}, \quad \zeta = \frac{\Sigma\omega c}{\Omega}. \tag{33}$$

Der durch diese Coordinaten bestimmte Punkt hat folgende bemerkenswerthe Eigenschaft: wenn man die Winkel λ, μ, ν ändert, ohne die Grösse der Winkelgeschwindigkeits-

componenten ω, ω', ω'', $\cdots$ und die Lage der Punkte A, A', A'', $\cdots$ zu ändern, so bleibt die Lage des Punktes (ξ, η, ζ) dieselbe. Ein solcher Punkt heisst *Centrum des Systems paralleler Winkelgeschwindigkeiten* ω, ω' ω'', $\cdots$

Die in §. 142 dargelegten Regeln für die Zusammensetzung paralleler Winkelgeschwindigkeiten sind in den vorstehenden Formeln mitenthalten.

148. Wir kehren nun zu dem Falle zurück, wo die Translationsgeschwindigkeiten k, k', k'', $\cdots$ gleich Null sind, während die Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω'', $\cdots$ nicht parallel zu sein brauchen. Es seien l, l', l'', $\cdots$ die Geschwindigkeiten, welche der Punkt O haben würde, wenn er um die Punkte A, A', A'', $\cdots$ mit den Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω'', $\cdots$ rotiren würde. In diesem Falle ist: $\overline{K} = \overline{l} + \overline{l'} + \overline{l''} + \cdots$, und somit:

$$\overline{K\Omega} = \overline{(\overline{l} + \overline{l'} + \overline{l''} + \cdots)\,(\overline{\omega} + \overline{\omega'} + \overline{\omega''} + \cdots)}.$$

Führt man die Multiplication dieser beiden geometrischen Summen nach der in §. 23 gegebenen Regel aus, indem man beachtet, dass die geometrischen Producte $\overline{l\omega}$, $\overline{l'\omega'}$, $\overline{l''\omega''}$, $\cdots$ gleich Null sind, weil l auf ω senkrecht steht und ebenso l' auf ω', l'' auf ω'', u. s. w., so erhält man:

$$\overline{K\Omega} = \overline{l\omega'} + \overline{l\omega''} + \cdots + \overline{l'\omega} + \overline{l'\omega''} + \cdots,$$

was sich schreiben lässt:

$$\overline{K\Omega} = \Sigma(\overline{l\omega'} + \overline{l'\omega}); \tag{34}$$

dabei bedeutet Σ die Summe aller geometrischen Producte der Grössen l, l', l'', $\cdots$ in die nichtentsprechenden der Grössen ω, ω', ω'', $\cdots$

Da

$$\overline{l\omega'} = (rb - qc)\,p' + (pc - ra)\,q' + (qa - pb)\,r'$$

$$= \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

und

$$\overline{l'\omega} = \begin{vmatrix} p & q & r \\ a' & b' & c' \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a' & b' & c' \\ p & q & r \end{vmatrix},$$

so ist

$$\overline{l\omega'} + \overline{l'\omega} = \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a-a', & b-b', & c-c' \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= p \begin{vmatrix} q' & r' \\ b-b', & c-c' \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} r' & p' \\ c-c', & a-a' \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} p' & q' \\ a-a', & b-b' \end{vmatrix}.$$

Die Factoren von p, q, r in diesem Ausdrucke sind die Projectionen derjenigen Geschwindigkeit auf die Coordinatenaxen, welche der Punkt A bei einer Rotation um A' mit der Winkelgeschwindigkeit ω' haben würde. Bezeichnet man diese Geschwindigkeit mit σ', so ist

$$\overline{l\omega'} + \overline{l'\omega} = \overline{\omega\sigma'}.$$

Bezeichnet man in analoger Weise mit σ die Geschwindigkeit, welche der Punkt A' bei einer Rotation um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω haben würde, so hat man:

$$\overline{l\omega'} + \overline{l'\omega} = \overline{\omega'\sigma};$$

hierdurch geht die Gleichung (34) über in:

$$\overline{K\Omega} = \tfrac{1}{2}\Sigma(\overline{\omega\sigma'} + \overline{\omega'\sigma}); \tag{35}$$

diese Gleichung bedeutet, dass *das geometrische Product der Translationsgeschwindigkeit in die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des resultirenden Systems* (U) *gleich ist der halben Summe der geometrischen Producte aller Winkelgeschwindigkeiten* ω, ω', ω'', $\cdots$ *in alle Geschwindigkeiten, welche die Punkte* A, A', A'', $\cdots$ *bei den Rotationen mit diesen Winkelgeschwindigkeiten haben.*

Diese Eigenschaft des geometrischen Productes $\overline{K\Omega}$ lässt sich noch anders darstellen. In dem Ausdrucke

$$\overline{\omega\sigma'} = \sigma' \cdot \omega \cos(\omega\sigma')$$

ist die Grösse σ' gleich der Fläche eines Parallelogramms, dessen eine Seite ω' und dessen andere AA' ist; $\omega\cos(\omega\sigma')$ (mit $+$ oder $-$ genommen, je nachdem $\cos(\omega\sigma') > 0$ oder < 0) ist das vom Endpunkte von ω auf die Ebene des Pa-

componenten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ und die Lage der Punkte $A, A', A'', \cdots$ zu ändern, so bleibt die Lage des Punktes (ξ, η, ζ) dieselbe. Ein solcher Punkt heisst *Centrum des Systems paralleler Winkelgeschwindigkeiten* $\omega, \omega'\ \omega'', \cdots$

Die in §. 142 dargelegten Regeln für die Zusammensetzung paralleler Winkelgeschwindigkeiten sind in den vorstehenden Formeln mitenthalten.

148. Wir kehren nun zu dem Falle zurück, wo die Translationsgeschwindigkeiten $k, k', k'', \cdots$ gleich Null sind, während die Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ nicht parallel zu sein brauchen. Es seien $l, l', l'', \cdots$ die Geschwindigkeiten, welche der Punkt O haben würde, wenn er um die Punkte $A, A', A'', \cdots$ mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ rotiren würde. In diesem Falle ist: $\overline{K} = \overline{l} + \overline{l'} + \overline{l''} + \cdots$, und somit:

$$\overline{K\Omega} = \overline{(\overline{l} + \overline{l'} + \overline{l''} + \cdots)\ (\overline{\omega} + \overline{\omega'} + \overline{\omega''} + \cdots)}.$$

Führt man die Multiplication dieser beiden geometrischen Summen nach der in §. 23 gegebenen Regel aus, indem man beachtet, dass die geometrischen Producte $\overline{l\omega}, \overline{l'\omega'}, \overline{l''\omega''}, \cdots$ gleich Null sind, weil l auf ω senkrecht steht und ebenso l' auf ω', l'' auf ω'', u. s. w., so erhält man:

$$\overline{K\Omega} = \overline{l\omega'} + \overline{l\omega''} + \cdots + \overline{l'\omega} + \overline{l'\omega''} + \cdots,$$

was sich schreiben lässt:

$$\overline{K\Omega} = \Sigma(\overline{l\omega'} + \overline{l'\omega}); \tag{34}$$

dabei bedeutet Σ die Summe aller geometrischen Producte der Grössen $l, l', l'', \cdots$ in die nichtentsprechenden der Grössen $\omega, \omega', \omega'', \cdots$

Da

$$\overline{l\omega'} = (rb - qc)\,p' + (pc - ra)\,q' + (qa - pb)\,r'$$

$$= \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

und

$$\overline{l'\omega} = \ldots$$

so ist

$$\overline{l\omega'} + \overline{l'\omega} = \ldots$$

$$= p \left| \begin{matrix} q' & r' \\ b - b', & c - c' \end{matrix} \right| + q \ldots$$

Die Factoren von p, q … [illegible] Projectionen derjenigen Geschwindigkeit [illegible] axen, welche der Punkt [illegible] Winkelgeschwindigkeit ω' [illegible] Geschwindigkeit mit σ', [illegible]

$$l\omega' = \ldots$$

Bezeichnet man in analoger [illegible] digkeit, welche der Punkt [illegible] der Winkelgeschwindigkeit ω [illegible]

$$l'\omega = \ldots$$

hierdurch geht die Gleichung [illegible]

$$\overline{K\Omega} = \ldots$$

diese Gleichung bedeutet [illegible] *Translationsgeschwindigkeit* [illegible] *tation des resultirenden Systems* [illegible] *der geometrischen Producte* [illegible] ω'', ⋯ *in alle Geschwindigkeiten* [illegible] *bei den Rotationen* [illegible] Diese Eigenschaft des geometrischen [illegible] noch anders darstellen. [illegible]

$$\omega\sigma = \ldots$$

ist die Grösse σ' gleich [illegible] dessen eine Seite ω' und [illegible] (mit $+$ oder $-$ genommen [illegible] < 0) ist das von [illegible]

rallelogramms gefällte Perpendikel; folglich ist $\pm \overline{\omega\sigma'}$ das Volumen eines Parallelepipedons, dessen Grundfläche das Parallelogramm σ' und dessen Höhe $\pm\, \omega \cos(\omega\sigma')$ ist, oder das sechsfache Volumen eines Tetraeders, das ω und ω' zu zwei gegenüberliegenden Kanten hat. Ist $\cos(\omega\sigma') > 0$, so sieht ein an ω sich anlehnender Beobachter, der auf die Mitte von ω' schaut, die Richtung von ω' von links nach rechts, im Falle $\cos(\omega\sigma') < 0$ aber von rechts nach links. Schreibt man $(\omega,\ \omega')$ für $\frac{1}{6}\overline{\omega\sigma'}$, so hat man: $\frac{1}{6}\overline{K\Omega} = \Sigma(\omega,\ \omega')$.

Man schliesst hieraus, dass $\frac{1}{6}\overline{K\Omega}$ *die algebraische Summe derjenigen Tetraeder ist, die aus je zweien der Winkelgeschwindigkeiten* $\omega,\ \omega',\ \omega'',\cdots$ *als gegenüberliegenden Kanten construirt werden können.**) Das resultirende System (U) lässt sich auf verschiedene Weise in zwei Rotationssysteme um zwei conjugirte Gerade zerlegen; das Volumen des Tetraeders, das die Winkelgeschwindigkeiten dieser beiden Rotationssysteme zu gegenüberliegenden Kanten hat, muss gleich $\frac{1}{6}\overline{K\Omega}$ sein; bezeichnet man daher diese Winkelgeschwindigkeiten mit L und L', so ist:

$$(L,\ L') = \Sigma(\omega,\ \omega'). \tag{36}$$

Sind alle Geschwindigkeiten des resultirenden Systems (U) gleich Null, so ist $\overline{K\Omega} = 0$ und folglich $\Sigma(\omega,\ \omega') = 0$.

149. Aus den allgemeinen Formeln (9) für die Projectionen der Rotationsgeschwindigkeiten auf die Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz sieht man, dass das Geschwindigkeitssystem $(w, w', w'', \cdots)$ zusammengesetzt ist aus drei Systemen von Rotationsgeschwindigkeiten um diese Axen mit den Winkelgeschwindigkeiten $p,\ q,\ r$, welche die Projectionen oder Componenten der Winkelgeschwindigkeit ω nach diesen Axen sind. Setzt man nämlich in den Formeln (9) $q = 0$ und $r = 0$, so erhält man

$$0,\quad -pz,\quad py \tag{a}$$

für die Projectionen der Rotationsgeschwindigkeit des Punktes $(x,\ y,\ z)$ um Ox mit der Winkelgeschwindigkeit $\pm\, p$. Ebenso

---

*) Dieser Satz ist zuerst von Möbius für ein Kräftesystem aufgestellt worden. Journal von Crelle, T. IV.

findet man, wenn man $p = 0$, $r = 0$ setzt, für die Projectionen der Rotationsgeschwindigkeit um die Axe Oy mit der Winkelgeschwindigkeit $+q$:

$$qz, \quad 0, \quad -qx, \tag{b}$$

und endlich, indem man $p = 0$, $q = 0$ setzt, für die Projectionen der Rotationsgeschwindigkeit um Oz mit der Winkelgeschwindigkeit $+r$:

$$-ry, \quad rx, \quad 0. \tag{c}$$

Addirt man die Grössen unter (a), (b), (c), so erhält man $qz - ry$ für die Projection w_x, $rx - pz$ für w_y, $py - qx$ für w_z.

150. Mit Hilfe der Formeln (9) kann man die Projection der Rotationsgeschwindigkeit w auf jede gegebene Axe l finden, wenn man die Winkel kennt, welche diese Axe mit den Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz bildet; es ist nämlich:

$$w\cos(wl) = w_x\cos(lx) + w_y\cos(ly) + w_z\cos(lz)$$
$$= \begin{vmatrix} \cos(lx), & \cos(ly), & \cos(lz) \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Nach dieser Formel ergeben sich die Projectionen w_ξ, w_η, w_ζ der Geschwindigkeit w auf drei feste rechtwinklige Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Bezeichnet man nämlich mit a_1, b_1, c_1 die Cosinus der Winkel (ξx), (ξy), (ξz), mit a_2, b_2, c_2 die der Winkel (ηx), (ηy), (ηz) und mit a_3, b_3, c_3 die der Winkel (ζx), (ζy), (ζz), so ist:

$$w_\xi = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad w_\eta = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad w_\zeta = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes (x, y, z) bezüglich der Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, so ist:

$$w_\xi = \frac{d\xi}{dt}, \quad w_\eta = \frac{d\eta}{dt}, \quad w_\zeta = \frac{d\zeta}{dt}.$$

Wendet man diese Formeln auf die drei Punkte A, B, C an, die, wie in §. 25, auf den Axen Ox, Oy, Oz in Ent-

fernungen gleich der Einheit vom Ursprung O gewählt sind, so erhält man:

$$\frac{da_1}{dt} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ q & r \end{vmatrix}, \quad \frac{da_2}{dt} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ q & r \end{vmatrix}, \quad \frac{da_3}{dt} = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ q & r \end{vmatrix},$$

$$\frac{db_1}{dt} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ r & p \end{vmatrix}, \quad \frac{db_2}{dt} = \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ r & p \end{vmatrix}, \quad \frac{db_3}{dt} = \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ r & p \end{vmatrix}, \tag{39}$$

$$\frac{dc_1}{dt} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix}, \quad \frac{dc_2}{dt} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ p & q \end{vmatrix}, \quad \frac{dc_3}{dt} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ p & q \end{vmatrix}.$$

Die drei Formeln der zweiten Zeile liefern:

$$c_1 \frac{db_1}{dt} + c_2 \frac{db_2}{dt} + c_3 \frac{db_3}{dt} = \begin{vmatrix} c_1^2, & a_1 c_1 \\ r, & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2^2, & a_2 c_2 \\ r, & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_3^2, & a_3 c_3 \\ r, & p \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ r, & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ r, & p \end{vmatrix};$$

also ist:

$$p = c_1 \frac{db_1}{dt} + c_2 \frac{db_2}{dt} + c_3 \frac{db_3}{dt}.$$

Ebenso findet man:

$$q = a_1 \frac{dc_1}{dt} + a_2 \frac{dc_2}{dt} + a_3 \frac{dc_3}{dt}, \tag{40}$$

$$r = b_1 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{da_2}{dt} + b_3 \frac{da_3}{dt}.$$

Diese Formeln dienen zur Bestimmung der Grössen p, q, r und folglich zur Bestimmung der Lage der Momentanwinkelgeschwindigkeit ω bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz, die mit dem Systeme fest verbunden sind; dabei müssen die Winkel, welche die beweglichen Axen Ox, Oy, Oz mit den festen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ bilden, als Functionen der Zeit gegeben sein. Aus den Formeln (39) ergeben sich die folgenden:

$$p = -b_1 \frac{dc_1}{dt} - b_2 \frac{dc_2}{dt} - b_3 \frac{dc_3}{dt},$$

$$q = -c_1 \frac{da_1}{dt} - c_2 \frac{da_2}{dt} - c_3 \frac{da_3}{dt}, \tag{41}$$

$$r = -a_1 \frac{db_1}{dt} - a_2 \frac{db_2}{dt} - a_3 \frac{db_3}{dt}.$$

Die Formeln (40) und (41) zugleich mit den Formeln (9)

liessen sich auch unmittelbar durch Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes ableiten.

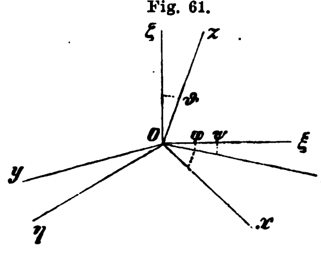
151. Mit Hilfe der Bedingungsgleichungen

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$
$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1,$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \quad a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1,$$

welche die Rechtwinkligkeit der Axen Ox, Oy, Oz und $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ ausdrücken, lassen sich die neun Cosinus a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $\cdots$ als Functionen von dreien unter ihnen darstellen*) oder auch als Functionen der drei Hilfswinkel, durch welche Euler die Lage des einen Coordinatensystems bezüglich des anderen bestimmt; daher lassen sich p, q, r als Functionen derselben Grössen und deren Derivirten nach der Zeit ausdrücken.

Es sei (Fig. 61) ON die Schnittlinie der Ebenen xOy und $\xi O\eta$; $\sphericalangle NO\xi = \psi$, $\sphericalangle NOx = \varphi$ und $\sphericalangle zO\zeta = \vartheta$. Mit Hilfe des Winkels ψ bestimmt sich die Lage der Geraden ON, mit Hilfe von ϑ die Lage der Ebene xON, mit Hilfe von φ die Lage der Axe Ox in dieser Ebene und hiermit auch die Lage der Axen Oy und Oz. Nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie lassen sich die neun Cosinus a_1, b_1, c_1, $\cdots$ als Functionen der Sinus und Cosinus der Winkel φ, ψ, ϑ ausdrücken (wie aus der analytischen Geometrie des Raumes bekannt ist), und hierauf erhält man aus den Formeln (40) und (41) die Ausdrücke für p, q, r als Functionen derselben Grössen und der Derivirten $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$. Doch kann man zu diesen Ausdrücken auch direct auf Grund der Regel über

Fig. 61.



---

*) A. J. Lexell, Theoremata nonnulla generalia de Translatione Corporum rigidorum. Acad. Petrop. T. XX.

Monge, Exposition analytique de la génération des surfaces courbes. Mémoires de l'Académie de Turin. 1784 et 1785.

die Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten gelangen und zwar folgendermassen.

Die Derivirte $\frac{d\varphi}{dt}$ ist die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um die Axe Oz, $\frac{d\psi}{dt}$ die der Rotation um $O\zeta$ und $\frac{d\vartheta}{dt}$ die der Rotation um ON. Da diese drei Rotationen zusammen eine Rotation von der Winkelgeschwindigkeit ω hervorbringen sollen, so ist:

$$\overline{\omega} = \overline{\frac{d\varphi}{dt}} + \overline{\frac{d\psi}{dt}} + \overline{\frac{d\vartheta}{dt}};$$

dabei denkt man sich $\frac{d\varphi}{dt}$ durch eine auf der Axe Oz aufgetragene Strecke dargestellt, ebenso $\frac{d\psi}{dt}$ auf der Axe $O\zeta$ und $\frac{d\vartheta}{dt}$ auf der Axe ON; somit ist:

$$p = \frac{d\varphi}{dt}\cos(zx) + \frac{d\psi}{dt}\cos(\zeta x) + \frac{d\vartheta}{dt}\cos(NOx),$$

$$q = \frac{d\varphi}{dt}\cos(zy) + \frac{d\psi}{dt}\cos(\zeta y) + \frac{d\vartheta}{dt}\cos(NOy),$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt}\cos(zz) + \frac{d\psi}{dt}\cos(\zeta z) + \frac{d\vartheta}{dt}\cos(NOz).$$

Da aber:

$$\cos(zx) = 0, \quad \cos(zy) = 0, \quad \cos(zz) = 1,$$

$$\cos(\zeta x) = \sin\varphi\sin\vartheta, \quad \cos(\zeta y) = \cos\varphi\sin\vartheta, \quad \cos(\zeta z) = \cos\vartheta,$$

$$\cos(NOx) = \cos\varphi, \quad \cos(NOy) = -\sin\varphi, \quad \cos(NOz) = 0,$$

so wird:

$$p = \sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$q = \cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt}, \qquad (42)$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}.$$

Kennt man die Bewegung des Systems der Axen Ox, Oy, Oz bezüglich der festen Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, so kann man aus diesen Formeln die Grösse und Lage der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ bestimmen.

152. Gesetzt, z. B., die Rotationen um die Axen $O\zeta$, Oz und ON seien gleichförmig, d. h. es sei:

$$\frac{d\psi}{dt} = a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = b, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = c,$$

wo a, b, c Constante bedeuten. In diesem Falle wird:

$$\psi = at + \psi_0, \quad \varphi = bt + \varphi_0, \quad \vartheta = ct + \vartheta_0,$$

wo ψ_0, φ_0, ϑ_0 die Werthe der Winkel ψ, φ, ϑ für $t = 0$ sind. Nach den Formeln (42) ergiebt sich dann:

$$p = a \sin(bt + \varphi_0) \sin(ct + \vartheta_0) + c \cos(bt + \varphi_0),$$
$$q = a \cos(bt + \varphi_0) \sin(ct + \vartheta_0) - c \sin(bt + \varphi_0),$$
$$r = b + a \cos(ct + \vartheta_0),$$

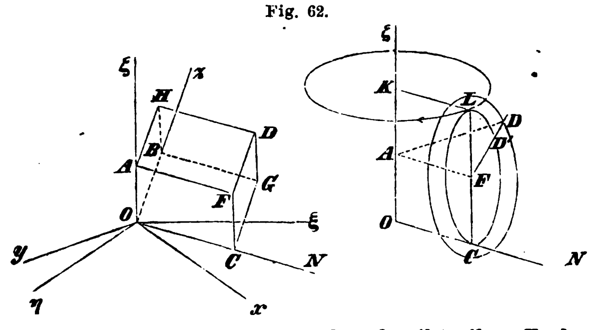
woraus folgt:

$$\omega^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(ct + \vartheta_0).$$

Somit sind die Winkelgeschwindigkeit ω und ihre Projectionen auf die Axen Ox, Oy, Oz als Functionen der Zeit ausgedrückt.

153. Bei der Rotation eines unveränderlichen Systems um einen festen Punkt O kann die Winkelgeschwindigkeit ω, die man auf der Momentanaxe aufgetragen denkt, ihre Lage im Raume, d. h. bezüglich der festen Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ continuirlich ändern und so eine gewisse konische Fläche erzeugen; dabei beschreibt der Endpunkt D von ω eine Curve, die man den *absoluten Hodographen der Winkelgeschwindigkeit* nennen kann. Die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ kann auch ihre Lage bezüglich der Punkte des rotirenden Systems ändern, d. h. bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz, wobei sie eine andere

Fig. 62.



konische Fläche erzeugt; dabei beschreibt ihr Endpunkt D eine Curve, die man den *relativen Hodographen* nennen kann.

Zur Erläuterung wollen wir die Hodographen der Winkelgeschwindigkeit in dem vorigen Beispiele bestimmen. Die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ stellt sich dar als die Diagonale OD (Fig. 62) eines Parallelepipedons, dessen Kanten $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ebenso wie die beiden Winkel AOC, BOC (als Rechte) constant sind. Es ändert sich nur der Winkel AOB und zwar gleichförmig mit der Geschwindigkeit c, während die Seitenfläche AOC gleichförmig mit der Geschwindigkeit a rotirt. Da $AD = \sqrt{c^2 + b^2}$ constant ist, so bleibt D, der Endpunkt der Winkelgeschwindigkeit, fortwährend auf der Oberfläche einer festen Kugel, deren Mittelpunkt A und deren Radius AD ist. Die Strecken $FC = a$ und $FD = b$ sind gleichfalls constant; daher beschreibt D gleichförmig mit der Geschwindigkeit c die Peripherie eines Kreises vom Halbmesser FD und Mittelpunkt F; dieser Kreis liegt in einer der Ebene $zO\zeta$ im Abstand c parallelen Ebene. Auf Grund dieser Ueberlegung kann man den Hodographen nunmehr folgendermassen construiren.

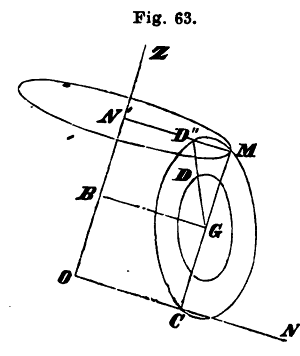
Man trägt $AK = a$ auf der Axe $O\zeta$ ab und beschreibt in der durch den Punkt K gehenden, zu $O\zeta$ senkrechten Ebene einen Kreis aus K als Mittelpunkt mit einem Radius $KL = OC = c$ und in der Ebene DFC einen zweiten Kreis aus F als Mittelpunkt mit dem Radius $FL = a$. Lässt man dann den zweiten Kreis auf dem ersten gleichförmig mit der Geschwindigkeit ac hinrollen, so beschreibt der Punkt D, da er mit dem rollenden Kreise unveränderlich verbunden ist, eine Curve, welche der absolute Hodograph der Winkelgeschwindigkeit ist. Die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes L, in welchem der rollende Kreis den festen berührt, ist nämlich ac und gleich der Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes D', der auf der Peripherie des rollenden Kreises auf demselben Radius wie D liegt; daher ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der der Winkel $D'FL$ sich ändert, gleich c; folglich hat D die geforderte Bewegung.

Die vom Punkte D' beschriebene Curve ist eine sphärische Epicykloide auf einer Kugel vom Radius AL und Mittelpunkte A. Dieselbe Curve beschreibt auch der Punkt D, wenn $b = a$ ist. Ist jedoch b nicht gleich a, so beschreibt D eine ver-

kürzte oder verlängerte Epicykloide, und zwar eine verkürzte für $b < a$ und eine verlängerte für $b > a$.

Eine Curve von derselben Art bildet auch der relative Hodograph. Der Punkt D (Fig. 63) beschreibt in der Ebene GCD einen Kreis vom Mittelpunkte G und Radius $GD = a$; dabei beschreibt G in einer zu Oz senkrechten Ebene gleichmässig mit der Geschwindigkeit b einen Kreis vom Radius $BG = c$. Auf Grund dieser Bemerkung lässt sich die Bewegung des Punktes D bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz auf folgende Weise bestimmen. Man trägt $BN' = b$ auf, verzeichnet in der zu Oz senkrechten Ebene einen Kreis vom Radius $N'M = c$ und in der Ebene GCD einen Kreis vom Radius GM und lässt dann den zweiten Kreis auf dem ersten mit der Geschwindigkeit bc hinrollen nach der Seite, wohin der Winkel φ wächst, von Ox nach ON. Dann beschreibt der mit D auf demselben Radius liegende Punkt D'' eine sphärische Epicykloide auf einer Kugel um B als Mittelpunkt und mit dem Radius BM. Dieselbe Curve beschreibt auch D, wenn $a = b$ ist. Ist dagegen $a < b$, so beschreibt D eine verkürzte, und ist $a > b$, eine verlängerte Epicykloide.

Fig. 63.



154. Der absolute Hodograph ist die Basis eines unbeweglichen Kegels, der durch die Momentanaxe erzeugt wird; der relative Hodograph ist die Basis eines beweglichen Kegels, der mit dem um den festen Punkt O rotirenden Punktsystem unveränderlich verbunden ist; O ist der gemeinsame Scheitel beider Kegel.

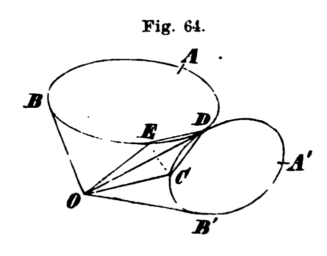
Poinsot*) hat gezeigt, dass die Rotation des Punktsystems um O durch das Rollen des zweiten Kegels auf dem Mantel des ersten hervorgebracht werden kann. Hiervon kann man sich auf folgende Weise überzeugen.

Es sei (Fig. 64) $ADEB$ der absolute, $A'DCB'$ der re-

*) Théorie nouvelle de la rotation. Journal de Liouville T. XVI 1850.

lative Hodograph der Winkelgeschwindigkeit, OD die Lage der Winkelgeschwindigkeit ω zur Zeit t, OC diejenige Gerade im unveränderlichen System, die zur Zeit $t+\tau$ die Winkelgeschwindigkeit repräsentirt, und OE die Lage, welche diese Gerade zu derselben Zeit im Raume einnimmt. Wenn τ unendlich klein ist, so befindet sich C in unendlich kleiner Entfernung von der Momentanaxe OD und hat daher eine unendlich kleine Geschwindigkeit; daher ist der Weg CE, den der Punkt C in der Zeit τ zu durchlaufen hat, unendlich klein von zweiter Ordnung im Vergleich mit den Sehnen DC und DE; also fallen für $\tau=0$ die Richtungen dieser Sehnen in eine und dieselbe Gerade, welche die gemeinschaftliche Tangente der Curven ADB und $A'DB'$ im Punkte D ist. Da die Differenz zwischen den Sehnen DE und DC kleiner als CE ist, so ist sie ebenfalls unendlich klein von höherer Ordnung.

Fig. 64.



Bezeichnet man mit s den vom Punkte D zur Zeit t durchlaufenen Bogen AD des absoluten Hodographen, mit σ den entsprechenden Bogen $A'D$ des relativen Hodographen und mit Δs und $\Delta\sigma$ die Incremente dieser Bogen in der Zeit τ, so ist die Differenz $\Delta s - \Delta\sigma$ von derselben Ordnung, wie die Differenz der Bogen DE und DC, und muss daher ebenfalls unendlich klein von höherer Ordnung sein. Setzt man $\Delta s - \Delta\sigma = \varepsilon$, so ist:

$$\frac{\Delta s}{\Delta\sigma} = 1 + \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma},$$

und wenn man zur Grenze übergeht, indem man $\tau = 0$ setzt:

$$\frac{ds}{d\sigma} = 1 \text{ oder } ds = d\sigma;$$

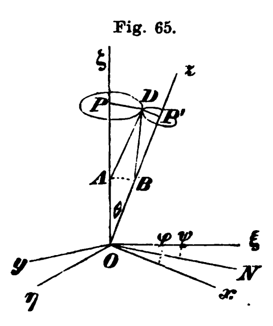
folglich $s=\sigma$. Dies zeigt aber, dass der Kegel $OA'DB'$, ohne zu gleiten, auf dem Kegel $OADB$ hinrollt. Wegen $ds = d\sigma$ ist auch $\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$, d. h. *die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes D auf dem absoluten und auf dem relativen Hodographen ist dieselbe.* Sie ist die geometrische Derivirte

der Winkelgeschwindigkeit und heisst die *Winkelbeschleunigung erster Ordnung.*

Poinsot betrachtet, um die Rotationsbewegung eines unveränderlichen Punktsystems um einen festen Punkt O darzustellen, statt der Hodographen zwei sphärische Curven S und S', die man erhält, wenn man den festen und den rollenden Kegel mit einer Kugel schneidet, deren Mittelpunkt O ist. Er nennt die erste Curve *Herpolodie,* die andere *Polodie.* Die Curve S' rollt, ohne zu gleiten, auf der Curve S hin; der Berührungspunkt J dieser Curven ist der Schnittpunkt der Momentanaxe mit der Kugelfläche (O); die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes J auf den Curven S und S' ist dieselbe, und zwar ist sie die Winkelderivirte der Winkelgeschwindigkeit ω, wenn der Kugelradius gleich 1 gewählt wird.

Es sei im Beispiel des §. 152 speciell $c = 0$ gesetzt, d. h. der Winkel ϑ bleibe constant. Dann liegt (Fig. 65) die Winkelgeschwindigkeit ω in der Ebene $zO\zeta$ und stellt sich dar als die Diagonale OD eines über $OA = a$ und $OB = b$ construirten Parallelogramms; sie hat daher den constanten Werth:

Fig. 65.



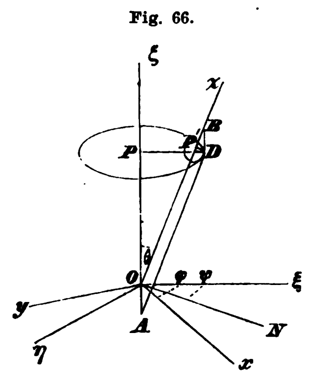
$$\omega = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\vartheta},$$

und bildet mit den Axen $O\zeta$ und Oz constante Winkel. Man sieht hieraus, dass der absolute Hodograph dann ein Kreis in einer zu $O\zeta$ senkrechten Ebene ist; der Radius desselben ist das vom Punkte D auf jene Axe gefällte Perpendikel DP. Ebenso ist der relative Hodograph ein Kreis in einer zu Oz senkrechten Ebene, dessen Radius die auf der Axe Oz senkrechte Strecke DP' ist. Im vorliegenden Falle kann also die Rotation um O durch das Rollen eines Kreiskegels auf einem andern erzeugt werden. Haben die Geschwindigkeiten a und b dasselbe Vorzeichen, so befindet sich ein Kegel ausserhalb des andern, sind aber die Zeichen verschieden, so liegt ein Kegel in dem andern.

Gesetzt, die Ebene $\xi O\eta$ (Fig. 66) sei die Ebene der Ekliptik, xOy die Ebene des Aequators und N der Frühlings-

punkt. Dann ist $\frac{d\varphi}{dt}$ die Geschwindigkeit der täglichen Bewegung der Erde, $\frac{d\psi}{dt}$ die Präcession der Nachtgleichen, und $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Geschwindigkeit der Aenderung der Neigung des Aequators gegen die Ekliptik.

Fig. 66.



Die Grösse $\frac{d\varphi}{dt}$ hat einen constanten Werth, den wir in §. 152 mit b bezeichnet hatten. Die Grössen $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\vartheta}{dt}$ sind variabel; doch kann man für eine kurze Zeitdauer, für einen Tag z. B., setzen: $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ und $\frac{d\psi}{dt}$ gleich einer negativen Constanten, die überdies im Vergleich zu $\frac{d\varphi}{dt}$ sehr klein ist. Man kann annähernd

$$\frac{d\psi}{dt} = -0'',136795$$

setzen. Ferner hat man $b = 360^0$ in 24 Stunden und $\vartheta = 23^0 27' 30''$. Trägt man nun auf $O\zeta$ in negativem Sinne $OA = 0,136795$ auf und auf Oz eine Strecke $OB = 360 \cdot 60 \cdot 60$ und construirt aus diesen Längen das Parallelogramm, so ist dessen Diagonale OD die Momentanaxe der Rotation der Erdkugel.

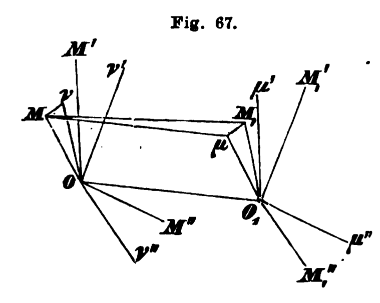
Der von ihr um die zum Aequator senkrechte Gerade Oz beschriebene Kegel rollt im Innern des von ihr um $O\zeta$ beschriebenen Kegels. Dem Winkel BOD entspricht auf der Erdoberfläche ein Bogen von nicht mehr als 27 Centimeter Länge.*)

155. Gestützt auf die Auseinandersetzungen der vorher-

*) Ein anderes bemerkenswerthes Beispiel dieser, von der Momentanaxe erzeugten Kegel bietet der Mechanismus dar, den man das (Cardanische) *Universalgelenk* nennt. Die Construction dieser Kegel findet man in der Abhandlung des Professors M. Th. Okatow: Ueber die Kegel der augenblicklichen Drehaxen im Universalgelenke. Bulletin de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg T. X, p. 353—361.

gehenden Paragraphen, kann man sich nunmehr eine Vorstellung von der allgemeinsten Art der Bewegung eines freien unveränderlichen Systems machen: Es sei (Fig. 67) $(M, M', M'', \cdots O)$ die Lage des unveränderlichen Systems zur Zeit t und $(M_1, M_1', M_1'', \cdots O_1)$ seine Lage zur Zeit $t + \tau$ bei irgend einer Bewegung. Hätte das System nur eine Translationsbewegung, bei der die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen jedes Punktes den entsprechenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Punktes O gleich wären, so würde es zur Zeit $t + \tau$ in die Lage $(\mu, \mu', \mu'', \cdots O_1)$ gelangen, wobei $\overline{O_1\mu} = \overline{OM}$, $\overline{O_1\mu'} = \overline{OM'}, \cdots$. Denken wir uns ferner, der Punkt O sei unbeweglich und das System $(M, M', M'', \cdots)$ rotire um diesen Punkt, so dass es zur Zeit $t + \tau$ in eine Lage $(\nu, \nu', \nu'', \cdots O)$ gelangt, für welche $\overline{O\nu} = \overline{O_1M_1}$, $\overline{O\nu'} = \overline{O_1M_1'}, \cdots$ ist. Nehmen wir nun an, dass jeder Punkt M eine Bewegung hat, die zusammengesetzt ist aus derjenigen, die er bei jener Translation haben würde und aus der, welche er bei der Rotation hätte, so gelangt der Punkt M durch die hieraus resultirende Bewegung zur Zeit $t + \tau$ in dieselbe Lage, die er bei der wirklichen Bewegung einnehmen soll. Denn die Sehne $\overline{MM_1}$ des bei der wirklichen Bewegung durchlaufenen Weges ist die geometrische Summe der Sehne $M\mu$ des bei der Translation, und der Sehne $M\nu$ des bei der Rotation durchlaufenen Weges. Es lässt sich also jede Bewegung eines freien unveränderlichen Systems als zusammengesetzt betrachten aus einer Translation und einer Rotation. Die Rotation des Systems um O ist identisch mit der Rotation, die das System aus der Lage $(\mu, \mu', \mu'', \cdots O_1)$ in die endgiltige Lage $(M_1, M_1', M_1'', \cdots O_1)$ überführt. Es ist dies diejenige Bewegung, welche ein Beobachter wahrnehmen würde, der während der Translation unveränderlich mit dem System verbunden ist. Bei der Rotation erzeugt die Momentanaxe $\overline{\omega}$ einen Kegel (S), der zugleich mit dem Be-

Fig. 67.



obachter eine Translation erleidet, und einen auf (S) rollenden Kegel (S'). Also kann jede Bewegung eines freien unveränderlichen Punktsystems, wenn sie weder eine Translation noch eine Rotation ist, erzeugt werden durch das Rollen eines gewissen, mit dem Punktsystem fest verbundenen Kegels (S') auf einem Kegel (S), der gleichzeitig eine gewisse, durch die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen der gemeinsamen Spitze O der Kegel bestimmte Translation erleidet. Da der Punkt O willkührlich gewählt werden darf, so kann man eine und dieselbe Bewegung auf verschiedene Weise in eine Translation und eine Rotation zerlegen. Bezeichnet man mit $\overline{v_n}$ und $\overline{w_n}$ die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung des Punktes M bei der wirklichen Bewegung und bei der Rotation um O und mit $\overline{u_n}$ die Beschleunigung bei der Bewegung des Punktes O, so hat man nach §. 21, Folg. 2:

$$\overline{v_n} = \overline{u_n} + \overline{w_n},$$

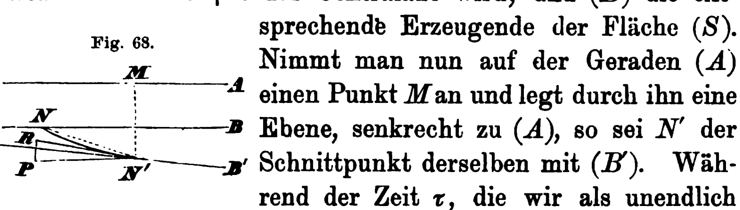
d. h. *die Beschleunigung der wirklichen Bewegung ist die geometrische Summe der Beschleunigungen derselben Ordnung bei der Translation und Rotation.*

156. Die hier vorgeführte Methode zur Darstellung der allgemeinsten Bewegung eines freien unveränderlichen Systems durch das Rollen eines Kegels auf einem andern, der in einer Translation begriffen ist, rührt von Poinsot*) her. Es gibt noch eine andere, von Poncelet gegebene Methode, die sich auf die in §. 131 bewiesene Eigenschaft gründet, dass jedes System möglicher Geschwindigkeiten durch eine Schraubenbewegung hervorgebracht werden kann. Die Centralaxe (A) des Systems der Geschwindigkeiten für die Zeit t ändert continuirlich ihre Lage im Raume und erzeugt dabei eine geradlinige Fläche (S); sie ändert aber auch bezüglich der Punkte des unveränderlichen Systems continuirlich ihre Lage und erzeugt dadurch eine andere geradlinige Fläche (S'), die mit diesem System unveränderlich verbunden ist und sich mit ihm bewegt. In einem gegebenen Zeitmomente t ist die Centralaxe (A) die gemeinsame Erzeugende der Flächen (S) und

*) Théorie nouvelle de la rotation.

(S') und diese Flächen berühren sich in jedem Punkte der Axe (A). Hiervon kann man sich folgendermassen überzeugen: Es sei (Fig. 68) (B') diejenige Erzeugende der Fläche (S'), welche zur Zeit $t + \tau$ zur Centralaxe wird, und (B) die entsprechende Erzeugende der Fläche (S).

Fig. 68.



Nimmt man nun auf der Geraden (A) einen Punkt M an und legt durch ihn eine Ebene, senkrecht zu (A), so sei N' der Schnittpunkt derselben mit (B'). Während der Zeit τ, die wir als unendlich klein voraussetzen, gelangt N' in einen gewissen Punkt N auf der Geraden (B); die Sehne $N'N$ des durchlaufenen Weges bildet einen unendlich kleinen Winkel mit der Richtung der Geschwindigkeit $N'R$, welche der Punkt N' zur Zeit t hat, und diese Geschwindigkeit bildet wiederum einen unendlich kleinen Winkel mit der der Centralaxe (A) parallelen Translationsgeschwindigkeit $N'P$; folglich schliesst die Sehne $N'N$ auch mit $N'P$ einen unendlich kleinen Winkel ein. Daher muss die durch die Gerade (A) und den Punkt N gehende Ebene mit der durch (A) und den Punkt N' gehenden Ebene einen unendlich kleinen Winkel bilden. Für $\tau = 0$ fallen diese beiden Ebenen in eine einzige zusammen, welche die Flächen (S) und (S') im Punkte M berührt. Daher haben die Flächen (S) und (S') in jedem Punkte M der Geraden (A) eine gemeinsame Tangentenebene.

Die Bewegung der Fläche (S') lässt sich nicht durch einfaches Rollen auf der Fläche (S) hervorbringen; denn der Punkt M hat, als Punkt der Fläche (S') betrachtet, eine gewisse endliche Geschwindigkeit längs der Centralaxe (A), und infolge dessen hat die Fläche (S') eine gleitende Bewegung an der Fläche (S) hin, im Sinne jener Geschwindigkeit. Diese Bewegung setzt sich mit derjenigen zusammen, welche die Aenderung der Lage der gemeinsamen Erzeugenden bewirkt und die man als ein Rollen der Fläche (S') auf (S) betrachten kann.

157. Ist die Geschwindigkeit des Gleitens längs der Centralaxe gleich Null zu jeder Zeit t und ändert sich die Richtung der Centralaxe nicht, so sind die beiden Flächen

(S) und (S') zwei Cylinderflächen; (S') rollt auf (S); dann rollt die Schnittcurve (C') der Fläche (S') mit einer zur Centralaxe senkrechten Ebene, ohne zu gleiten, auf einer festen Curve (C), welche die Schnittlinie des Cylinders (S) mit derselben Ebene ist. Folglich reducirt sich dabei die Bewegung des unveränderlichen Punktsystems auf die Bewegung einer ebenen unveränderlichen Figur, welche die Projectionen aller Systempunkte auf eine zur Centralaxe senkrechte Ebene enthält. Die Projection jedes Systempunktes verzeichnet in dieser Ebene eine Roulette, die durch das Rollen der Linie (C') auf der festen Linie (C) entsteht (s. §. 19).

XV. Capitel.

Die Beschleunigungen bei der Bewegung eines freien unveränderlichen Systems. — Endliche Verschiebungen.

158. Wir haben in §. 155 gesehen, dass im allgemeinen die Beschleunigung irgend einer Ordnung bei der allgemeinsten Bewegungsart eines unveränderlichen Systems die geometrische Summe der Beschleunigungen derselben Ordnung bei der Translations- und der Rotationsbewegung ist, in die sich die betreffende Bewegung zerlegen lässt. Dabei bestimmen sich die Beschleunigungen der Translation durch die Beschleunigungen der Bewegung desjenigen Punktes, der zum Rotationscentrum gewählt wurde.

Wir werden nun die Beschleunigungen untersuchen, die bei der Rotation des Systems um einen Punkt O auftreten. Wählen wir diesen Punkt zum Ursprung der geradlinigen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, die auf die mit dem rotirenden Punktsystem unveränderlich verbundenen Axen Ox, Oy, Oz bezogen sind, so lässt sich eine Beschleunigung von beliebiger Ordnung durch ihre Projectionen auf die Axen Ox Oy, Oz bestimmen. Hierzu können die Formeln (4) §. 27 dienen. Bedeuten $w_{n,x}$, $w_{n,y}$, $w_{n,z}$ die Projectionen der Beschleunigung n^{ter} Ordnung w_n der Rotationsbewegung auf

die Coordinatenaxen, so hat man nach jenen Formeln für die Projectionen der Beschleunigung erster Ordnung:

$$w_{1,x} = \frac{dw_x}{dt} + qw_z - rw_y,$$
$$w_{1,y} = \frac{dw_y}{dt} + rw_x - pw_z, \quad (1)$$
$$w_{1,z} = \frac{dw_z}{dt} + pw_y - qw_x,$$

und allgemein:

$$w_{n,x} = \frac{dw_{n-1,x}}{dt} + qw_{n-1,z} - rw_{n-1,y},$$
$$w_{n,y} = \frac{dw_{n-1,y}}{dt} + rw_{n-1,x} - pw_{n-1,z}, \quad (2)$$
$$w_{n,z} = \frac{dw_{n-1,z}}{dt} + pw_{n-1,y} - qw_{n-1,x}$$

für die Projectionen der Beschleunigung n^{ter} Ordnung. Man sieht sofort, dass diese Ausdrücke, ebenso wie die Projectionen der Geschwindigkeit, die Form von linearen Functionen bezüglich der Coordinaten des beweglichen Punktes (x, y, z) haben. Da nämlich

$$w_x = qz - ry, \quad w_y = rx - pz, \quad w_z = py - qx$$

und x, y, z constant sind, so ist:

$$w_{1,x} = \frac{dq}{dt}z - \frac{dr}{dt}y + q(py - qx) - r(rx - pz),$$
$$w_{1,y} = \frac{dr}{dt}x - \frac{dp}{dt}z + r(qz - ry) - p(py - qx), \quad (3)$$
$$w_{1,z} = \frac{dp}{dt}y - \frac{dq}{dt}x + p(rx - pz) - q(qz - ry).$$

Die Ausdrücke rechts sind lineare Functionen von der Form:

$$w_{1,x} = xa_{1,x} + yb_{1,x} + zc_{1,x},$$
$$w_{1,y} = xa_{1,y} + yb_{1,y} + zc_{1,y}, \quad (4)$$
$$w_{1,z} = xa_{1,z} + yb_{1,z} + zc_{1,z},$$

wo

$$a_{1,x} = -(q^2 + r^2), \quad b_{1,x} = -\frac{dr}{dt} + pq, \quad c_{1,x} = \frac{dq}{dt} + pr,$$
$$a_{1,y} = \frac{dr}{dt} + pq, \quad b_{1,y} = -(r^2 + p^2), \quad c_{1,y} = -\frac{dp}{dt} + qr, \quad (5)$$
$$a_{1,z} = -\frac{dq}{dt} + pr, \quad b_{1,z} = \frac{dp}{dt} + qr, \quad c_{1,z} = -(p^2 + q^2).$$

Aus den Formeln (2) ersieht man, dass, wenn $w_{n-1,x}$, $w_{n-1,y}$, $w_{n-1,z}$ lineare homogene Functionen bezüglich x, y, z sind, auch $w_{n,x}$, $w_{n,y}$, $w_{n,z}$ solche Functionen sein müssen; man kann also setzen:

$$\begin{aligned} w_{n,x} &= x a_{n,x} + y b_{n,x} + z c_{n,x}, \\ w_{n,y} &= x a_{n,y} + y b_{n,y} + z c_{n,y}, \\ w_{n,z} &= x a_{n,z} + y b_{n,z} + z c_{n,z}. \end{aligned} \tag{6}$$

Setzt man hierin $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, so ergiebt sich

$$w_{n,x} = a_{n,x}, \quad w_{n,y} = a_{n,y}, \quad w_{n,z} = a_{n,z};$$

es sind also diese drei Coefficienten von x die Projectionen auf die Coordinatenaxen von der Beschleunigung n^{ter} Ordnung bei der Bewegung des in der Entfernung $AO = 1$ auf Ox liegenden Punktes A. Ebenso findet man, dass $b_{n,x}$, $b_{n,y}$, $b_{n,z}$ die Projectionen auf die Coordinatenaxen von der Beschleunigung n^{ter} Ordnung des Punktes B sind, der auf Oy in der Entfernung $BO = 1$ vom Ursprung liegt, sowie $c_{n,x}$, $c_{n,y}$, $c_{n,z}$ die der Beschleunigung n^{ter} Ordnung des Punktes C, der auf Oz in der Entfernung $CO = 1$ vom Ursprung liegt. Die Coefficienten der Formeln (6) für verschiedene Ordnungen lassen sich successive vermittelst der Formeln (1) berechnen. Man hat allgemein:

$$\begin{aligned} a_{n,x} &= \frac{d a_{n-1,x}}{dt} + q a_{n-1,z} - r a_{n-1,y}, \\ a_{n,y} &= \frac{d a_{n-1,y}}{dt} + r a_{n-1,x} - p a_{n-1,z}, \\ a_{n,z} &= \frac{d a_{n-1,z}}{dt} + p a_{n-1,y} - q a_{n-1,x}. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Ausdrücke (5) ergeben sich unmittelbar aus den Formeln (7); ferner findet man:

$$\begin{aligned} a_{2,x} &= -3q\frac{dq}{dt} - 3r\frac{dr}{dt}, \\ a_{2,y} &= \frac{d^2 r}{dt^2} + 2p\frac{dq}{dt} + q\frac{dp}{dt} - r(p^2 + q^2 + r^2), \\ a_{2,z} &= -\frac{d^2 q}{dt^2} + 2p\frac{dr}{dt} + r\frac{dp}{dt} + q(p^2 + q^2 + r^2); \end{aligned}$$

ähnliche Ausdrücke ergeben sich für $b_{2,x}$, $b_{2,y}$, $b_{2,z}$, $c_{2,x}$, $c_{2,y}$, $c_{2,z}$ u. s. w. Die Resultate für die Beschleunigungen dritter

und höherer Ordnungen sind complicirter und lassen sich nicht leicht in eine allgemeine Form bringen.

159. Bezeichnet man mit $\overline{\omega_1}$ die geometrische Derivirte der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$, d. h. die Winkelbeschleunigung, so ist nach den Formeln (4) §. 27:

$$\omega_1 \cos(\omega_1 x) = \frac{dp}{dt}, \quad \omega_1 \cos(\omega_1 y) = \frac{dq}{dt}, \quad \omega_1 \cos(\omega_1 z) = \frac{dr}{dt};$$

daher bedeuten in den Formeln (3), welche die Projectionen der Beschleunigung erster Ordnung ausdrücken, die Glieder

$$\frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y, \quad \frac{dr}{dt} x - \frac{dp}{dt} z, \quad \frac{dp}{dt} y - \frac{dq}{dt} x$$

die Projectionen derjenigen Geschwindigkeit $\overline{U}$ auf die Coordinatenaxen, welche der Punkt (x, y, z) haben würde, wenn das ganze System mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich $\overline{\omega_1}$ rotirte; die übrigen Glieder der Formeln (3), nämlich die Grössen

$$q w_z - r w_y, \quad r w_x - p w_z, \quad p w_y - q w_x$$

sind die Projectionen derjenigen Geschwindigkeit $\overline{W}$ auf die Coordinatenaxen, welche der Endpunkt einer der w geometrisch gleichen und von O ausgehenden Strecke bei der Rotation des ganzen Systems mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ hat. Es ist also $\overline{w_1} = \overline{U} + \overline{W}$. Die Componente $\overline{U}$ ist gleich der Winkelbeschleunigung $\overline{\omega_1}$, multiplicirt mit dem auf ihre Richtung aus dem Punkte (x, y, z) gefällten Perpendikel;*) bezeichnet man also dieses Perpendikel mit δ, so ist $U = \omega_1 \delta$. Nun kann man $\overline{\omega_1}$ in zwei Componenten zerlegen, deren eine, $\frac{d\omega}{dt}$, in die Richtung von ω fällt, während die andere senkrecht zu $\overline{\omega}$ und gleich $\omega\vartheta$ ist, wenn ϑ die Winkelderivirte von $\overline{\omega}$ bezeichnet. Daher lässt sich auch $\overline{U}$ in zwei Componenten $\overline{U'}$ und $\overline{U''}$ zerlegen; die erste, $\overline{U'}$, ist die Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z) bei der Rotation des Systems mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich $\frac{d\omega}{dt}$, die andere, $\overline{U''}$, ist die Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z) bei der Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega\vartheta$.

*) Dabei muss der Anfangspunkt von $\overline{\omega}$ in O genommen werden.

Die Componente $\overline{W_*}$ endlich ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das man über $\bar{\omega}$ und $\bar{w}$ errichten kann, d. h. $W = \omega w$ und lässt sich als eine zu $\bar{\omega}$ und $\bar{w}$ senkrechte Strecke darstellen, deren Sinn dadurch bestimmt ist, dass sie, wenn man ihren Anfangspunkt nach dem Punkte (x, y, z) verlegt denkt, mit dem vom Punkte (x, y, z) auf $\bar{\omega}$ gefällten und im Sinne nach $\bar{\omega}$ hingenommenen Perpendikel zusammenfällt. Man kann $\overline{W}$ als die Beschleunigung betrachten, welche der Punkt (x, y, z) bei einer gleichförmigen Rotation um die Momentanaxe mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω haben würde. Bedeutet h den Abstand des Punktes (x, y, z) von $\bar{\omega}$, so hat man $w = \omega h$, $W = \omega^2 h$. Die Beschleunigung $\overline{W}$, die nach dem Mittelpunkte des vom Punkte (x, y, z) bei seiner Rotation um ω beschriebenen Kreises gerichtet ist, heisst die *Centripetalbeschleunigung.*

160. Giebt es ausser O noch einen zweiten Punkt (x, y, z), dessen Beschleunigung w_n gleich Null ist, so müssen die Coordinaten dieses Punktes den Gleichungen genügen:

$$
\begin{aligned}
x a_{n,x} + y b_{n,x} + z c_{n,x} &= 0, \\
x a_{n,y} + y b_{n,y} + z c_{n,y} &= 0, \\
x a_{n,z} + y b_{n,z} + z c_{n,z} &= 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

und hierzu ist erforderlich, dass die Determinante:

$$
D_n = \begin{vmatrix} a_{n,x} & b_{n,x} & c_{n,x} \\ a_{n,y} & b_{n,y} & c_{n,y} \\ a_{n,z} & b_{n,z} & c_{n,z} \end{vmatrix}
$$

verschwindet. Wegen der Complicirtheit der Ausdrücke ihrer Elemente ist es schwer sich zu überzeugen, ob diese Determinante identisch gleich Null ist, oder ob sie nur für gewisse specielle Werthe von $p, q, r, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}, \cdots$ verschwindet. Ist aber $D_n = 0$, so sind (8) die Gleichungen einer durch den Punkt O gehenden Geraden, die man die Momentanaxe der Beschleunigungen w_n nennen kann.

Wir wollen nun untersuchen, in welchen Fällen die Be-

schleunigungen erster Ordnung eine Momentanaxe haben können. Die Formeln (5) geben:

$$D_1 = \left(p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt}\right)^2$$
$$- (p^2 + q^2 + r^2)\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right];$$

Da aber

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2, \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \omega_1^2,$$
$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt} = \omega\omega_1 \cos(\omega\omega_1),$$

so ist

$$D_1 = \omega^2\omega_1^2 \cos^2(\omega\omega_1) - \omega^2\omega_1^2 = - \omega^2\omega_1^2 \sin^2(\omega\omega_1);$$

nun ist

$$\omega_1 \sin(\omega\omega_1) = \omega\vartheta;$$

also wird:

$$D_1 = - \omega^4\vartheta^2.$$

Man sieht aus diesem Ausdruck, dass die Beschleunigungen erster Ordnung eine Momentanaxe haben, wenn $\bar{\omega} = 0$ oder wenn $\vartheta = 0$ ist. Der erste Fall kann nur für einen gewissen bestimmten Zeitpunkt eintreten; der zweite dagegen kann eine beliebige Zeit hindurch bestehen, nämlich wenn die Momentanaxe der Geschwindigkeiten ihre Richtung nicht ändert, wobei die Grösse von ω constant oder variabel sein kann. In diesem Falle rotirt das unveränderliche Punktsystem um eine feste Axe; es bewegt sich also jeder Punkt desselben in einer festen, zu jener Axe senkrechten Ebene; mithin liegen die Geschwindigkeiten und alle Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen in derselben Ebene. Die Beschleunigungen aller Punkte, die auf der Rotationsaxe liegen, sind gleich Null; daher ist diese Gerade die Axe aller Beschleunigungen; die Beschleunigung n^{ter} Ordnung jedes andern Punktes ist zu ihr senkrecht.

Die Perpendikularität der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung dreier Punkte A, B, C auf der Rotationsaxe $\bar{\omega}$ ist durch die Bedingungen

$$pa_{n,x} + qa_{n,y} + ra_{n,z} = 0,$$
$$pb_{n,x} + qb_{n,y} + rb_{n,z} = 0,$$
$$pc_{n,x} + qc_{n,y} + rc_{n,z} = 0$$

ausgedrückt, deren Bestehen erfordert, dass die Determinante D_n verschwindet.

161. Wenn man zu den Ausdrücken (6) die Projectionen der Translationsbeschleunigung $\bar{u}_n$ des Systems auf die Axen Ox, Oy, Oz resp. hinzuaddirt, so erhält man die allgemeinen Ausdrücke für die Projectionen der Beschleunigung $\bar{v}_n$ des Punktes (x, y, z) auf die Axen Ox, Oy, Oz bei irgend einer Bewegung des Systems. Sind $u_{n,x}$, $u_{n,y}$, $u_{n,z}$ die Projectionen von $\bar{u}_n$, so sind die Projectionen von v_n:

$$
\begin{aligned}
v_{n,x} &= xa_{n,x} + yb_{n,x} + zc_{n,x} + u_{n,x},\\
v_{n,y} &= xa_{n,y} + yb_{n,y} + zc_{n,y} + u_{n,y},\\
v_{n,z} &= xa_{n,z} + yb_{n,z} + zc_{n,z} + u_{n,z}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Hieraus kann man mit Hilfe der allgemeinen Formeln für die Coordinatentransformation und der Formeln des §. 151 die Projectionen der Beschleunigungen auf die festen Coordinatenaxen erhalten.

Ist die Determinante D_n nicht gleich Null, so giebt es im Systeme immer einen einzigen Punkt, dessen Beschleunigung v_n gleich Null ist. Die Coordinaten dieses Punktes bestimmen sich durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
xa_{n,x} + yb_{n,x} + zc_{n,x} + u_{n,x} &= 0,\\
xa_{n,y} + yb_{n,y} + zc_{n,y} + u_{n,y} &= 0,\\
xa_{n,z} + yb_{n,z} + zc_{n,z} + u_{n,z} &= 0.
\end{aligned}
$$

Dieser Punkt heisst das *Momentancentrum der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung.* Er liegt im Unendlichen, wenn $D_n = 0$ ist und die Determinanten

$$
\begin{vmatrix} u_{n,x} & b_{n,x} & c_{n,x} \\ u_{n,y} & b_{n,y} & c_{n,y} \\ u_{n,z} & b_{n,z} & c_{n,z} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} a_{n,x} & u_{n,x} & c_{n,x} \\ a_{n,y} & u_{n,y} & c_{n,y} \\ a_{n,z} & u_{n,z} & c_{n,z} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} a_{n,x} & b_{n,x} & u_{n,x} \\ a_{n,y} & b_{n,y} & u_{n,y} \\ a_{n,z} & b_{n,z} & u_{n,z} \end{vmatrix}
$$

nicht gleichzeitig verschwinden. Sind dagegen diese drei Determinanten zugleich mit D_n gleich Null, so giebt es eine Gerade von der Eigenschaft, dass die Beschleunigung n^{ter} Ordnung jedes ihrer Punkte gleich Null ist. Eine solche Gerade kann man *Momentanaxe der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung* nennen.

162. Die Beschleunigungen jeder Ordnung haben Momentanaxen, wenn sich die Bewegung des Systems auf das Rollen eines Cylinders (S') auf einem andern (S) reduciren lässt (s. §. 157); dabei sind die Axen aller Beschleunigungen der Centralaxe parallel. Hiervon kann man sich folgendermassen leicht überzeugen. Da die Beschleunigungen aller Ordnungen auf der Centralaxe senkrecht stehen, so hat man, wenn Oz dieser Axe parallel angenommen wird: $a_{n,z} = 0$, $b_{n,z} = 0$, $c_{n,z} = 0$, $u_{n,z} = 0$; ausserdem ist $c_{n,x} = 0$, $c_{n,y} = 0$, da der in der Entfernung $OC = 1$ auf der Axe Oz angenommene Punkt C bei der Rotation um Oz fest bleibt. Der auf der Axe Oy im Abstand $OB = 1$ gelegene Punkt B bewegt sich mit einer Geschwindigkeit und mit Beschleunigungen, die der Geschwindigkeit und den entsprechenden Beschleunigungen des auf Ox im Abstand $OA = 1$ liegenden Punktes A an Grösse gleich und senkrecht zu ihnen gerichtet sind; dreht man daher die Strecke OA, bis sie mit OB zusammenfällt, so fallen die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte A und B zusammen; folglich ist $a_{n,x} = b_{n,y}$, $b_{n,x} = -a_{n,y}$, so dass die Formeln (9) im vorliegenden Falle die folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} v_{n,x} &= xa_{n,x} - ya_{n,y} + u_{n,x}, \\ v_{n,y} &= xa_{n,y} + ya_{n,x} + u_{n,y}, \\ v_{n,z} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Coordinaten (ξ, η, ζ) eines Punktes, dessen Beschleunigung v_n gleich Null ist, müssen den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} \xi a_{n,x} - \eta a_{n,y} + u_{n,x} = 0, \\ \xi a_{n,y} + \eta a_{n,x} + u_{n,y} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Es sind dies die Gleichungen einer zur Axe Oz parallelen Geraden; also haben die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung eine der Centralaxe parallele Momentanaxe. Die Spur O_n dieser Geraden in der zur Centralaxe senkrechten Ebene xOy heisst das *Momentancentrum der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung* oder das *Momentancentrum $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung* bei der Bewegung der ebenen unveränderlichen Figur in dieser Ebene.

Subtrahirt man die Gleichungen (11) von den Gleichungen (10), so erhält man die Formeln:

$$\begin{aligned} v_{n,x} &= (x-\xi)\,a_{n,x} - (y-\eta)\,a_{n,y}, \\ v_{n,y} &= (x-\xi)\,a_{n,y} - (y-\eta)\,a_{n,x}; \end{aligned} \qquad (12)$$

dieselben sagen aus, dass *alle Beschleunigungen n^{ter} Ordnung durch eine Rotation des Systems um die Momentanaxe der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung erzeugt werden können, mit derselben constanten oder veränderlichen Winkelgeschwindigkeit ω, mit der die Axen Ox und Oy um die Axe Oz rotiren.*

Die Formeln (12) geben:

$$v_n{}^2 = a_n{}^2\,[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2];$$

bedeutet also ϱ den Abstand des Punktes (x, y) vom Punkte O_n, so ist $v_n = a_n\varrho$, d. h. *die Beschleunigungen n^{ter} Ordnung sind den Abständen der entsprechenden Punkte von der Momentanaxe der Beschleunigungen derselben Ordnung proportional.*

Ferner folgt aus den Formeln (12):

$$(x-\xi)\,v_{n,x} + (y-\eta)\,v_{n,y} = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\,a_{n,x}$$

oder:

$$v_n \cos(v_n\varrho) = \varrho\,a_{n,x} = \varrho\,a_n \cos(a_n x),$$

und wenn man beachtet, dass $v_n = \varrho a_n$ ist, so ergiebt sich $\cos(v_n\varrho) = \cos(a_n x)$. Ebenso findet man: $\sin(v_n\varrho) = \cos(a_n, y)$. Daraus folgt, dass $\sphericalangle(v_n\varrho) = \sphericalangle(a_n, x)$; *es bilden daher alle Beschleunigungen n^{ter} Ordnung gleiche Winkel mit den von den entsprechenden Punkten auf die Momentanaxe dieser Beschleunigungen gefällten Perpendikeln.*

Die Beschleunigung u_n des Punktes O, welche zugleich die Translationsbeschleunigung des ganzen Systems ist, lässt sich betrachten als die Beschleunigung der Rotation des Beschleunigungssystems $(v_n, v'_n, \cdots)$ um O_n; bezeichnet man daher mit R den Abstand OO_n, so hat man, wenn der Ursprung im Punkte O_n liegt: $u_n = Ra_n$, und $\sphericalangle(u_n R) = \sphericalangle(a_n x)$, was sich auch direct aus den Gleichungen (11) ableiten lässt.

Auf Grund dieser Eigenschaft des Punktes O kann man seine Lage bestimmen, wenn die Bewegung des Punktes O und die Winkelgeschwindigkeit ω als Function der Zeit bekannt ist. Hierzu bestimmt man mit Hilfe von ω und dessen De-

rivirten nach der Zeit, wie in §. 158 gezeigt wurde, die Beschleunigung a_n und den Winkel $(a_n x)$; dann zieht man aus O eine Strecke, die diesen Winkel mit der Beschleunigung u_n dieses Punktes einschliesst und die dem Verhältniss $\frac{u_n}{a_n}$ gleich ist. Der Endpunkt dieser Strecke ist der Punkt O_n. Man kann den Punkt O_n auch bestimmen, indem man die Geraden (11) construirt, deren Schnittpunkt er ist. Man sieht aus den Gleichungen dieser Geraden, dass sie auf einander senkrecht stehen.

Als Beispiel wollen wir das Centrum der Beschleunigungen erster Ordnung, d. h. das *zweite Momentancentrum* bestimmen. Setzt man in den Formeln (5) $p = 0$, $q = 0$, $r = \omega$, so folgt:

$$a_{1,x} = -\omega^2, \quad a_{1,y} = \frac{d\omega}{dt},$$

also:

$$a_1 = \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}, \quad \cos(a_1 x) = -\frac{\omega^2}{a_1}, \quad \sin(a_1 x) = \frac{1}{a_1}\frac{d\omega}{dt},$$

$$R = \frac{u_1}{\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}}, \quad \cos(u_1 R) = -\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}},$$

$$\sin(u_1 R) = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln bestimmt sich Grösse und Richtung von R, in dessen Endpunkt das zweite Momentancentrum O_1 liegt. Zur Vereinfachung der Gleichungen (11) nehme

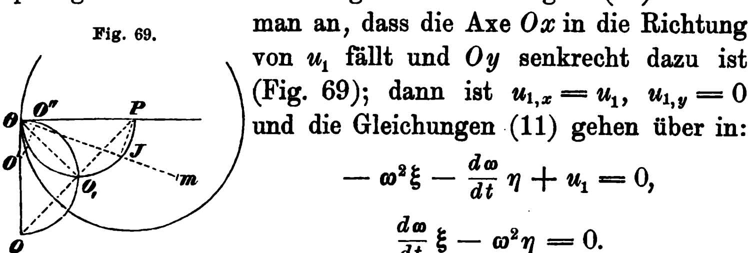


Fig. 69.

man an, dass die Axe Ox in die Richtung von u_1 fällt und Oy senkrecht dazu ist (Fig. 69); dann ist $u_{1,x} = u_1$, $u_{1,y} = 0$ und die Gleichungen (11) gehen über in:

$$-\omega^2 \xi - \frac{d\omega}{dt}\eta + u_1 = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt}\xi - \omega^2 \eta = 0.$$

Die erste Gerade kann man aus den Punkten P und Q construiren, in denen sie die Axen Ox und Oy schneidet. Die

Abscisse des ersten Punktes ist $OP = \frac{u_1}{\omega^2}$, die Ordinate des zweiten $OQ = \frac{u_1}{\frac{d\omega}{dt}}$. Die zweite Gerade geht durch den Coordinatenursprung und ist zu der ersteren senkrecht. Im Schnittpunkte dieser Geraden liegt das zweite Momentancentrum O_1.

163. Ist der Coordinatenursprung O das erste Momentancentrum, d. h. das Rotationscentrum, so ist seine Geschwindigkeit gleich Null und die Beschleunigung u_1 bestimmt sich folgendermassen:

Es sei O' der Punkt, der zur Zeit $t + \tau$ zum Rotationscentrum wird, und O'' die Lage des vorigen Rotationscentrums zu dieser Zeit. Die Geschwindigkeit des Punktes O'' ist eine Rotationsgeschwindigkeit um eine zur Ebene $OO'O''$ senkrechte Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega + \Delta\omega$ und gleich $(\omega + \Delta\omega) \cdot O'O''$. Dividirt man dies durch τ und setzt dann $\tau = 0$, so erhält man die Beschleunigung u_1 der Bewegung des Punktes O. Bezeichnet σ den Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{OO''}{\tau}$, so ist: $u_1 = \omega\sigma$. Hier ist σ die Geschwindigkeit, mit welcher die Curve C' (§. 157), die alle Lagen des Rotationscentrums in der beweglichen Figur enthält, auf der Curve (C), die alle Lagen desselben Punktes in der festen Ebene enthält, hinrollt. Die Beschleunigung u_1 ist normal zu den Curven (C) und (C') im Punkte O und nach der Seite hin gerichtet, wohin sich dieser Punkt auf der Curve (C') bewegt. Die Geschwindigkeit σ hängt von der Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation und von den Krümmungsradien R und R' der festen Linie (C) und der auf ihr hinrollenden (C') ab. Nach Formel (3) §. 19 hat man:

$$\omega = \sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right), \tag{13}$$

woraus folgt:

$$\sigma = \frac{\omega R R'}{R + R'}; \tag{14}$$

dabei können R und R' negativ sein.

Wählt man bei der Construction des zweiten Momentan-

centrums §. 162 (Fig. 69), den Punkt O zum ersten Momentancentrum (d. h. zum Rotationscentrum), so ist:

$$OP = \frac{\sigma}{\omega} = \frac{RR'}{R+R'}, \quad OQ = \frac{\omega\sigma}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

Für den speciellen Fall, dass die Winkelgeschwindigkeit constant ist, wird $\frac{d\omega}{dt} = 0$ und $OQ = \infty$; folglich liegt das zweite Momentancentrum O_1 dann im Punkte P. Diesen Punkt nennt man *das geometrische Centrum der Beschleunigungen,* weil man bei der Lösung rein geometrischer Aufgaben immer annehmen kann, dass ω constant ist und das zweite Momentancentrum in P liegt.

Abel Transon*) hat folgende bemerkenswerthe Eigenschaft des Punktes P nachgewiesen. Beschreibt man aus diesem Punkt mit dem Radius OP einen Kreis und verbindet denselben unveränderlich mit der rollenden Linie (C'), so erzeugt sein Rollen auf der die Richtung von σ darstellenden Geraden dieselben Beschleunigungen erster Ordnung, welche die Punkte der beweglichen Figur beim Rollen von (C') auf (C) wirklich haben; denn die Geschwindigkeit σ, die Winkelgeschwindigkeit ω und die Beschleunigung u_1 des Punktes O haben bei diesem wie bei jenem Rollen dieselben Bedeutungen. Transon nennt den mit dem Radius OP um P beschriebenen Kreis den *Rollkreis* (cercle de roulement).

164. Die Beschleunigung v_1 eines Punktes m (x, y) einer beweglichen ebenen Figur, dessen Entfernung vom ersten Momentancentrum $Om = r$ ist, lässt sich in zwei Componenten zerlegen: 1) die Beschleunigung $v_1 \cos(v_1 r)$, die zur Trajectorie des Punktes m normal gerichtet ist, und 2) die Tangentialbeschleunigung $v_1 \sin(v_1 r)$. Andererseits ist v_1 die geometrische Summe der Beschleunigung u_1 des Punktes O und der Beschleunigung der Rotation um O, welche letztere sich in die Centripetalbeschleunigung $\omega^2 r$, die von m nach dem Centrum

*) Méthode géométrique pour les rayons de courbure. Journal de Liouville. T. X, 1845.

O hingerichtet ist, und in die Beschleunigung $r\frac{d\omega}{dt}$ längs der Tangente der Trajectorie des Punktes m zerlegt. Folglich ist:

$$\begin{aligned} v_1 \cos(v_1 r) &= -\omega^2 r + u_1 \cos(u_1 r), \\ v_1 \sin(v_1 r) &= r\frac{d\omega}{dt} - u_1 \sin(u_1 r). \end{aligned} \tag{15}$$

Setzt man $v_1 \cos(v_1 r) = 0$, so wird:

$$-\omega^2 r + u_1 \cos(u_1 r) = 0;$$

hieraus ergiebt sich:

$$r = \frac{u_1 \cos(u_1 r)}{\omega^2} = \frac{\sigma}{\omega}\cos(u_1 r) = OP\cos(POm).$$

Dies zeigt, dass alle Punkte m, deren Normalbeschleunigung erster Ordnung gleich Null ist, auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesser gleich OP ist.

Setzt man $v_1 \sin(v_1 r) = 0$, so erhält man:

$$r\frac{d\omega}{dt} - u_1 \sin(u_1 r) = 0,$$

woraus folgt:

$$r = \frac{u_1 \sin(u_1 r)}{\frac{d\omega}{dt}} = \frac{\sigma\omega}{\frac{d\omega}{dt}}\sin(u_1 r) = OQ\cos(QOm).$$

Man sieht hieraus, dass alle Punkte m, deren Tangentialbeschleunigung gleich Null ist, auf einem Kreise vom Durchmesser OQ gelegen sind. Diese beiden Kreise gehen durch das zweite Momentancentrum O_1, denn für diesen Punkt ist sowohl die Normal-, als auch die Tangentialbeschleunigung gleich Null.

Mit Hilfe der Normalbeschleunigung lässt sich der Krümmungsradius ϱ der Trajectorie des Punktes m bestimmen. Da $v_1 \cos(v_1 r) = \pm\frac{\omega^2 r^2}{\varrho}$, so liefert die erste der Formeln (15):

$$\pm\frac{\omega^2 r^2}{\varrho} = -\omega^2 r + u_1 \cos(u_1 r);$$

bezeichnet man aber mit k die Projection der Strecke OP auf die Richtung von r, so hat man, wie oben gezeigt wurde:

$$u_1 \cos(u_1 r) = \omega^2 k;$$

mithin ist:

$$\pm \frac{\omega^2 r^2}{\varrho} = \omega^2 (k - r),$$

also:

$$r^2 = \pm \varrho (k - r),$$

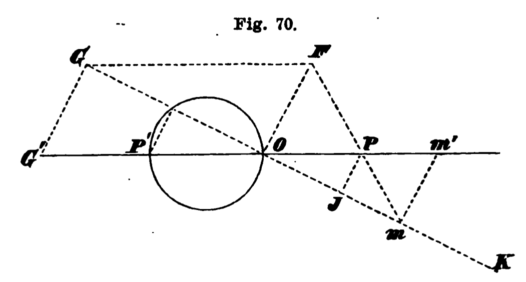
wo $(k - r)$ die Entfernung des Punktes m von dem Punkte J ist, in welchem der Radiusvector Om den Kreis vom Durchmesser OP schneidet; daher ist:

$$Om^2 = \varrho \cdot mJ. \tag{16}$$

Wir schliessen hieraus, dass *der Krümmungsradius der Bahn eines beliebigen Punktes m die dritte Proportionale ist zu dem Radiusvector Om und dem Abschnitte mJ auf diesem Radius zwischen dem Punkte m und dem Kreise vom Durchmesser OP.* Dieser Satz führt zu einer einfachen Construction des Krümmungsradius der Bahn des Punktes m.

Man fälle (Fig. 70) das Perpendikel PJ auf Om, ziehe mP, dann OF parallel PJ bis zum Schnittpunkte F mit mP,

Fig. 70.



und FG parallel OP bis zum Schnittpunkte G mit Om: der Punkt G ist dann der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes m. Derselbe liegt im Unendlichen, wenn m mit J zusammenfällt; in diesem Falle hat die Trajectorie im Punkte J im allgemeinen einen Wendepunkt oder sie ist die Gerade PJ selbst; deshalb nennt man den Kreis vom Halbmesser OP den *Wendekreis* (cercle d'inflexion).

Zieht man mm' und GG' parallel zu PJ bis zum Durchschnitt mit OP, so hat man:

$$Om' : Om = Pm' : mJ = m'G' : mG, \tag{17}$$

so dass die Gleichung (16) übergeht in:

$$Om'^2 = m'G' \cdot Pm';$$

mithin ist G' der Krümmungsmittelpunkt der Trajectorie des

Punktes m'. Ueberdies zeigen die Proportionen (17), dass die Krümmungsmittelpunkte G der Trajectorien derjenigen Punkte m, die auf dem Kreise vom Durchmesser Om' liegen, auf einem Kreise vom Durchmesser OG' gelegen sind. Fällt der Punkt m ins Unendliche, so wird $OF = PJ$, $GO = OJ$, $G'O = OP$; wir schliessen hieraus, dass die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen von Punkten, die unendlich entfernt von O sind, auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesser OP' der Strecke OP entgegengesetzt gleich ist.

Die Gleichung (16) führt noch zu einer andern Construction des Krümmungsradius. Trägt man in dem der Richtung mO entgegengesetzten Sinne die Strecke $mK = Om$ auf, so hat man auf der Geraden Om die vier Punkte K, J, O, G in harmonischer Lage; und zwar sind G und J conjugirt harmonisch zu O und K; denn die Gleichung $Om^2 = mG \cdot mJ$ giebt die Proportion:

$$Om : mG = mJ : Om,$$

aus der die harmonische Proportion

$$\frac{OJ}{OG} = \frac{KJ}{KG}$$

folgt. Beschreibt man also aus m als Mittelpunkt mit mO als Radius einen Kreis und fällt aus dem geometrischen Beschleunigungscentrum P die Senkrechte PJ auf OK, so ist G der Pol dieser Senkrechten bezüglich des Kreises vom Durchmesser OK. Die bekannte Construction des Pols aus gegebener Polare dient dann zur Bestimmung des Krümmungscentrums G, wenn der Punkt P bekannt ist.

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes findet man das geometrische Centrum P, wenn die Krümmungsmittelpunkte α und β der von irgend zwei Punkten a und b beschriebenen Trajectorien für diese Punkte bekannt sind. Man zieht dazu αa und βb, deren Schnittpunkt das Momentancentrum O ist; hierauf beschreibt man Kreise aus a und b mit den resp. Radien aO und bO und construirt die Polare des Punktes α bezüglich des ersten Kreises, sowie die des Punktes β bezüglich des zweiten Kreises; der Schnittpunkt dieser Polaren ist der Punkt P.

Aus Gleichung (17) lässt sich die Formel von Savary (§. 19, Form. 6) für den Krümmungsradius ϱ leicht ableiten. Setzt man $Om = u$ und $\sphericalangle JOP = i$, so ist:

$$OJ = u - \frac{u^2}{\varrho} \text{ und } OJ = OP \cos i,$$

wo nach Formel (14)

$$OP = \frac{\sigma}{\omega} = \frac{RR'}{R + R'}$$

ist; mithin wird:

$$u - \frac{u^2}{\varrho} = \cos i \left(\frac{RR'}{R + R'}\right)$$

oder

$$\frac{\varrho}{\varrho - u} = \frac{u}{\cos i}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Diese Formel in Verbindung mit der oben dargelegten Eigenschaft des Krümmungscentrums G kann zur Construction des Krümmungsradius vieler Curven benützt werden. Die Einzelheiten über diesen Gegenstand findet man in den folgenden Abhandlungen:

Bresse: Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvemens plans et sur l'application de la cinématique à la détermination des rayons de courbure. Journal de l'École polytechnique, 35me cahier.

Mannheim: Construction des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure qui glisse sur son plan. Journal de l'École polytechnique, 37me cahier.

Interessante Untersuchungen, die auf die Momentancentra der Beschleunigungen verschiedener Ordnungen Bezug haben, finden sich auch in den Abhandlungen von Nicolaidès: Mouvement d'une figure plane dans son plan. Les Mondes, T. 3 et 9.*)

165. Indem wir zu der allgemeinsten Art der Bewegung eines unveränderlichen Systems im Raume zurückkehren, wollen wir annehmen, dass (S) (§. 156) die feste geradlinige Fläche

*) cf. W. Schell: Ueber den Beschleunigungszustand des ebenen unveränderlichen, in der Ebene beweglichen Systems. Zeitschr. f. Math. u. Phys., her. v. Schlömilch, XIX, 3. S. 185.

Anm. d. Uebers.

sei, welche alle Lagen der Centralaxe im Raume enthält, und (S') die mit dem beweglichen System unveränderlich verbundene geradlinige Fläche, welche alle Lagen der Centralaxe bezüglich der Punkte dieses Systems enthält. Die Bewegung des Systems kann, wie in §. 156 gezeigt wurde, durch eine Bewegung der Fläche (S') auf (S) hin erzeugt werden.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten dieser Bewegung zu einer gegebenen Zeit t muss man die gemeinsame Erzeugende (A) der Flächen (S) und (S'), d. h. die Centralaxe, kennen, ferner die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ der Rotation um diese Axe und die Translationsgeschwindigkeit k, die die Richtung dieser Axe hat. Diese Elemente sind im allgemeinen veränderlich, und von der Art ihrer Aenderung hängen die geometrischen Incremente der Geschwindigkeiten und mithin auch die Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen ab. Wir wollen nun untersuchen, wie die Beschleunigungen erster Ordnung sich mit Hilfe von $\overline{\omega}$, $\overline{k}$ und deren geometrischen Derivirten bestimmen lassen.

Es sei (A) die Lage der Centralaxe zur Zeit t, (A') ihre Lage auf der Fläche (S) zur Zeit $t+\tau$ und O ein beliebiger Punkt der Geraden (A). In die Richtung dieser Geraden fällt die Translationsgeschwindigkeit $\overline{k}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$; man kann den Punkt O als Anfangspunkt beider Strecken wählen. Die Beschleunigung erster Ordnung v_1 eines Punktes m des unveränderlichen Systems ist die geometrische Summe der Beschleunigung w_1 der Rotation um O und der Beschleunigung u_1 des Punktes O. Die erstere Componente bestimmt sich nach der Regel des §. 159, die letztere folgendermassen. Man bestimme die Geschwindigkeit des Punktes O zur Zeit $t+\tau$, subtrahire davon geometrisch die Geschwindigkeit $\overline{k}$, dividire den Rest durch τ und setze $\tau = 0$. Wenn der Punkt O zur Zeit $t+\tau$ nach O_1 gelangt und wenn O_1O' die Senkrechte auf (A') ist, so setzt sich die Geschwindigkeit des Punktes O_1 zusammen aus der Winkelgeschwindigkeit $\omega + \Delta\omega$ der Rotation um (A') und der längs (A') gerichteten Geschwindigkeit $\overline{k'}$ des Punktes O'; die erstere dieser Geschwindigkeiten ist gleich $O_1O'(\omega+\Delta\omega)$; folglich ist die

geometrische Differenz der Geschwindigkeiten der Punkte O_1 und O gleich

$$\overline{k'} - \overline{k} + \overline{O_1 O'(\omega + \varDelta\omega)}.$$

Dividirt man dies durch τ, setzt $\tau = 0$ und bezeichnet den Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{O_1 O'}{\tau}$ mit σ, so ergiebt sich $\sigma\omega$ als Grenzwerth von $\frac{O_1 O'}{\tau}(\omega + \varDelta\omega)$. Die Grösse $\sigma\omega$ hat man sich dabei als eine Strecke $\overline{\varepsilon}$ zu denken, die längs der Normalen im Punkt O der Flächen (S) und (S') in dem Sinne gerichtet ist, wohin der Punkt O sich von der Fläche (S) entfernt.

Für einen Beobachter, der in der Richtung von $\overline{\omega}$ steht, die Füsse in O hat und auf (A) hinsieht, ist also $\overline{\varepsilon}$ nach links hin gerichtet.

Man hat daher zur Bestimmung der Beschleunigungen erster Ordnung die allgemeine Formel:

$$\overline{v_1} = \overline{k_1} + \overline{\varepsilon} + \overline{w_1}, \tag{18}$$

wo k_1 die geometrische Derivirte der Translationsgeschwindigkeit k und w_1 die Beschleunigung des Punktes m bei der Rotation des Systems um O mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ und der Winkelbeschleunigung $\overline{\omega_1}$ ist; dabei ist, wie in §. 159 bewiesen wurde, $\overline{w_1} = \overline{U} + \overline{W}$, wenn $\overline{U}$ die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes m um O mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich der Winkelbeschleunigung $\overline{\omega_1}$ und $\overline{W}$ die Centripetalbeschleunigung bezeichnet, d. h. die Beschleunigung bei einer gleichförmigen Rotation des Punktes m um die Centralaxe mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω.

Bedeutet ϑ die Winkelgeschwindigkeit der Verrückung der Centralaxe, d. h. die Winkelderivirte von ω, so lässt sich $\overline{\omega_1}$ in zwei Componenten zerlegen: $\frac{d\omega}{dt}$ in der Richtung von ω und $\omega\vartheta$ senkrecht zu ω. Dadurch zerfällt $\overline{U}$ in die beiden Componenten $\overline{U'}$ und $\overline{U''}$; es ist nämlich $\overline{U'}$ die Rotationsgeschwindigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$; dieselbe

ist gleich $h \frac{d\omega}{dt}$ und zu der durch die Centralaxe und den Punkt m gehenden Ebene senkrecht; die andere Componente $\overline{U''}$ ist die Rotationsgeschwindigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega\vartheta$ um die durch O gehende Gerade, die die Richtung von $\omega\vartheta'$ hat.

Die Wahl des Punktes O auf der Centralaxe ist willkürlich. Bei Aenderung der Lage von O ändern sich nur $\bar{\varepsilon}$ und $\overline{U''}$, wogegen die übrigen Componenten von v_1 dieselben bleiben. Sind die Flächen (S) und (S') abwickelbar, oder sind sie zwar windschief, haben aber zur Zeit t längs der gemeinsamen Erzeugenden (A) ein ebenes Element, d. h. fallen die gemeinsamen Tangentenebenen dieser Flächen in den verschiedenen Punkten der Geraden (A) alle in eine Ebene, welche die Ebene der Geraden ω und ω_1 ist, so ist $\bar{\varepsilon}$ für jede Lage des Punktes O auf der Geraden (A) senkrecht zu dieser Ebene. Die Geschwindigkeit $\bar{\sigma}$, mit welcher der Punkt O aus einer Lage der Centralaxe (A) in eine benachbarte (A') in einer zu (A) senkrechten Richtung übergeht, heisst die *orthogonale* oder *Wechselgeschwindigkeit*; sie hat im allgemeinen verschiedene Werthe für verschiedene Punkte der Geraden (A). In dem Falle, wenn (S) und (S') abwickelbare Flächen mit einer Rückkehrkante oder Kegel mit gemeinsamer Spitze sind, wird die Wechselgeschwindigkeit σ für einen Punkt O auf der Rückkehrkante oder in der Spitze zu Null; folglich ist auch die Beschleunigung $\varepsilon = \sigma\omega$ gleich Null, d. h. der Punkt O ist zu gleicher Zeit Momentancentrum der Geschwindigkeiten und Momentancentrum der Beschleunigungen erster Ordnung. Dasselbe gilt auch, wenn die Flächen (S) und (S') windschief sind, aber zwei unendlich nahe Lagen (A) und (A') der Centralaxe als sich im Punkte O schneidend angesehen werden können. Sind (S) und (S') Cylinderflächen, oder sind sie windschief und $\vartheta = 0$, d. h. lassen sich die beiden unendlich nahen Lagen (A) und (A') der Centralaxe als parallel betrachten, so hat σ einen und denselben Werth für alle Punkte der Geraden (A), und es hat daher auch $\varepsilon = \sigma\omega$ denselben Werth sowohl nach Grösse als auch nach Richtung für jede Lage des Punktes O auf der Geraden (A). Sind (S) und (S')

windschief, so hat σ seinen Minimalwerth im Centralpunkte der Erzeugenden (A),*) d. h. in dem Punkte, in welchem diese Erzeugende die Strictionslinie schneidet. Für diesen Punkt liegt die Normale der Flächen (S) und (S') in der Ebene der Geraden $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}_1$ und daher liegt auch $\overline{\varepsilon}$ in derselben Ebene. In dem Falle, wenn $\overline{\varepsilon}$ die Beschleunigung des Centralpunktes O auf der Centralaxe (A) ist, drückt die Formel (18) die von Resal gegebene Regel für die Bestimmung der Beschleunigungen erster Ordnung eines unveränderlichen Systems aus.**)

166. Um aus (18) die Projectionen der Beschleunigung v_1 auf die Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz zu erhalten, wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass die Axe Oz die Richtung der Centralaxe (A) habe und im Sinne mit $\overline{\omega}$ übereinstimme; dann ist: $p = 0$, $q = 0$, $r = \omega$. Die geometrische Derivirte $\overline{k}_1$ zerlegt sich in die geometrische Derivirte nach der Länge $\frac{d\omega}{dt}$ und in die geometrische Derivirte nach der Richtung $k\vartheta$; die erstere liegt in der Axe Oz, die zweite hat dieselbe Richtung und denselben Sinn wie $\omega\vartheta$. Die Projection der Beschleunigung $\overline{\varepsilon}$ auf die Axe Oz ist gleich Null; die Projectionen von $\overline{\varepsilon}$ auf die Axen Ox und Oy sind nach §. 25 Formeln (3) gleich $+\omega\sigma_y$ und $-\omega\sigma_x$; daher giebt die Formel (18):

$$\begin{aligned} v_{1,x} &= q'z - r'y - \omega^2 x + \frac{k}{\omega} p' + \omega\sigma_y, \\ v_{1,y} &= r'x - p'z - \omega^2 y + \frac{k}{\omega} q' - \omega\sigma_x, \\ v_{1,z} &= p'y - q'x + \frac{dk}{dt}. \end{aligned} \tag{19}$$

---

*) In diesem Falle haben die unendlich nahen Lagen (A) und (A') der Centralaxe ein gemeinsames Perpendikel, auf dem der kürzeste Abstand der beiden Geraden liegt; die Schnittpunkte dieses Perpendikels mit den Geraden (A) und (A') fallen beim Zusammenfallen dieser Geraden auch in einen einzigen Punkt zusammen, welcher eben der *Centralpunkt* heisst. Der geometrische Ort der Centralpunkte aller Erzeugenden einer Fläche (S) heisst die Strictionslinie (ligne de striction).

**) Resal: Mémoire sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un solide. Journal de l'École polytechnique. 37me cahier. — Traité de cinématique pure.

Zur Bestimmung des zweiten Momentancentrums (ξ, η, ζ) hat man somit die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
q'\zeta - r'\eta - \omega^2\xi + \frac{k}{\omega}p' + \omega\sigma_y &= 0, \\
r'\xi - p'\zeta - \omega^2\eta + \frac{k}{\omega}q' - \omega\sigma_x &= 0, \\
p'\eta - q'\xi + \frac{dk}{dt} &= 0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

In §. 160 haben wir gesehen, dass die Determinante D_1 dieses Systems linearer Gleichungen sich auf $-\omega^4\vartheta^2$ reducirt. Ist dieselbe nicht gleich Null, so ergeben die Gleichungen (20) bestimmte endliche Werthe für ξ, η, ζ, und es existirt daher in diesem Falle nur ein einziges zweites Momentancentrum. Ist aber $D_1 = 0$, so wird $\omega\vartheta = 0$, $p' = 0$, $q' = 0$, $r' = \frac{d\omega}{dt}$; in diesem Falle können, wie aus der dritten der Gleichungen (20) ersichtlich, die Coordinaten ξ und η keinen endlichen Werth haben, wenn $\frac{dk}{dt}$ nicht gleich Null ist; folglich liegt dann das zweite Momentancentrum im Unendlichen. Wenn aber ausser $D_1 = 0$ auch $\frac{dk}{dt} = 0$ ist, so wird die dritte der Gleichungen (20) zu einer Identität, und die beiden andern Gleichungen (20) geben für ξ, η, ζ unendlich viele Werthe; dieselben entprechen den Punkten einer Geraden, deren Gleichungen sind:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d\omega}{dt}\eta - \omega^2\xi + k\vartheta\cos(\vartheta x) + \omega\sigma_y &= 0, \\
\frac{d\omega}{dt}\xi - \omega^2\eta + k\vartheta\cos(\vartheta y) - \omega\sigma_x &= 0;
\end{aligned}
\tag{21}
$$

in diesem Falle existirt also eine Momentanaxe für die Beschleunigungen erster Ordnung. Die Bedingung $D_1 = 0$ erfordert, dass entweder $\omega = 0$ oder $\vartheta = 0$ wird. Die erstere Voraussetzung giebt für die zweite Momentanaxe die Gleichungen:

$$
-\frac{d\omega}{dt}\eta + k\vartheta\cos(\vartheta x) = 0, \quad \frac{d\omega}{dt}\xi + k\vartheta\cos(\vartheta y) = 0;
$$

es ist dies eine der ersten Momentanaxe parallele Gerade. Dieselbe liegt im Unendlichen, wenn $\frac{d\omega}{dt} = 0$ und $k\vartheta$ nicht gleich Null ist. Wenn ω zur Zeit t gleich Null ist, so sind

alle Rotationsgeschwindigkeiten w, w', $\cdots$ gleich Null, und es bleiben somit nur die Translationsgeschwindigkeiten, die geometrisch gleich $\bar{k}$ sind; die Richtung von ω fällt dann mit der von $\frac{d\omega}{dt}$ zusammen, und die Beschleunigung jedes Punktes setzt sich aus $\bar{k_1}$ und einer Rotationsgeschwindigkeit von der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ zusammen. Mithin kann man in diesem Falle das ganze System der Beschleunigungen erster Ordnung ansehen als ein System von Geschwindigkeiten, die eine Centralaxe haben; man kann es daher durch eine Schraubenbewegung hervorbringen, wenn $\frac{dk}{dt}$ nicht gleich Null ist; es giebt dann keinen Punkt, dessen Beschleunigung erster Ordnung gleich Null wäre. Ist aber $\frac{dk}{dt} = 0$, so ist $\bar{k_1}$ senkrecht auf $\bar{k}$; ebenso ist die Beschleunigung $\bar{v_1}$ senkrecht auf $\frac{d\omega}{dt}$, und man kann daher dann alle Beschleunigungen ansehen als die Beschleunigungen bei der Bewegung einer ebenen Figur in einer zu $\frac{d\omega}{dt}$ senkrechten Ebene; sie haben in dieser Ebene ein Momentancentrum, und die durch dasselbe parallel zu $\frac{d\omega}{dt}$ gezogene Gerade ist die zweite Momentanaxe.

Gesetzt, es sei $\vartheta = 0, \frac{dk}{dt} = 0$ und ω nicht gleich Null. Dann gehen die Gleichungen (21) über in:

$$-\frac{d\omega}{dt}\eta - \omega^2\xi + \omega\sigma_y = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt}\xi - \omega^2\eta - \omega\sigma_x = 0.$$

Es sind dies die Gleichungen zweier der Centralaxe parallelen und auf einander senkrecht stehenden Ebenen. Es giebt daher in diesem Falle eine zweite Momentanaxe, die der ersten parallel ist. Die Spur dieser Geraden in der Ebene xy lässt sich ebenso bestimmen, wie das zweite Momentancentrum bei der Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene (s. §. 162). In dem speciellen Falle $\frac{d\omega}{dt} = 0$ fällt jene Spur

mit dem geometrischen Centrum der Beschleunigungen zusammen.

167. Mit Hilfe der Projectionen der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung auf die Coordinatenaxen lassen sich (s. §. 100, 101 und 102) alle Grössen darstellen, die sich auf die Bestimmung der ersten und zweiten Krümmung der Bahn jedes Punktes des unveränderlichen Systems beziehen.

Setzt man zur Abkürzung

$$A = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ v_{1,y} & v_{1,z} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ v_{1,z} & v_{1,x} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ v_{1,x} & v_{1,y} \end{vmatrix}$$

und

$$D = \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ v_{1,x} & v_{1,y} & v_{1,z} \\ v_{2,x} & v_{2,y} & v_{2,z} \end{vmatrix},$$

so ist

$$v_x(\xi - x) + v_y(\eta - y) + v_z(\zeta - z) = 0$$

die Gleichung der Normalebene und

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

die Gleichung der Schmiegungsebene. Zusammen genommen stellen diese Gleichungen die erste Hauptnormale dar. Die folgenden:

$$B(\zeta - z) - C(\eta - y) = 0,$$
$$C(\xi - x) - A(\zeta - z) = 0,$$
$$A(\eta - y) - B(\xi - x) = 0$$

sind die Gleichungen der zweiten Hauptnormale. Die Formeln

$$\varrho = \frac{v^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ und } r = \pm \frac{A^2 + B^2 + C^2}{D}$$

geben Ausdrücke für den ersten und zweiten Krümmungsradius in Form von algebraischen Functionen der Coordinaten x, y, z.

Für die Punkte, deren erster Krümmungsradius unendlich gross ist, oder deren Beschleunigung erster Ordnung die Richtung der Tangente der Bahn hat, ist:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0. \tag{22}$$

Jede dieser Gleichungen ist eine Folge der beiden andern.

Man sieht leicht, dass sie Flächen zweiter Ordnung darstellen. Vermittelst der Formeln (19) gehen sie über in:

$$\omega\left(p'y - q'x + \frac{dk}{dt}\right)x - k\left(r'x - p'z - \omega^2 y + \frac{\omega}{k}q' - \omega\sigma_x\right) = 0,$$

$$\omega\left(p'y - q'x + \frac{dk}{dt}\right)y + k\left(q'z - r'y - \omega^2 x + \frac{k}{\omega}p' - \omega\sigma_y\right) = 0,$$

$$\omega\left[-\omega^2(x^2+y^2) + q'zx - p'zy + \left(\frac{k}{\omega}p' + \omega\sigma_x\right)x + \left(\frac{k}{\omega}q' - \omega\sigma_x\right)y\right] = 0.$$

Genaueres über die Untersuchung dieser Gleichungen und andere bemerkenswerthe Folgerungen, die sich aus den Gleichungen (22) ergeben, findet man in dem Werke von Resal: Traité de cinématique pure. Dort, sowie in dem Lehrbuch der theoretischen Mechanik: „Theorie der Bewegung und der Kräfte" von Dr. Wilhelm Schell ist die Bestimmung der Beschleunigungen zweiter Ordnung bei der Bewegung eines unveränderlichen Systems durchgeführt und sind verschiedene Anwendungen auf die Geometrie gezeigt.

Endliche mögliche Verschiebungen eines freien unveränderlichen Punktsystems.

168. *Lehrsatz. Unter den verschiedenen Bewegungen, vermittelst deren man ein freies unveränderliches Punktsystem* $(m, m', m'', \cdots)$ *aus einer gegebenen Lage* $(M, M', M'', \cdots)$ *in eine andere gegebene Lage* $(M_1, M_1', M_1'', \cdots)$ *überführen kann, giebt es immer eine einfachste; dieselbe ist entweder eine gleichförmige geradlinige, oder eine gleichförmige rotatorische, oder eine aus beiden zusammengesetzte Bewegung.*

Beweis. Verschiebungen der Punkte $(m, m', m'', \cdots)$ wollen wir die Sehnen $\overline{MM_1}$, $\overline{M'M_1'}$, $\overline{M''M_1''}$, $\cdots$ derjenigen Wege nennen, welche die Punkte zu durchlaufen haben. Zunächst setzen wir nun voraus, dass die Verschiebungen $\overline{MM_1}$, $\overline{M'M_1'}$, $\overline{M''M_1''}$ dreier nicht in gerader Linie liegender Punkte einander geometrisch gleich sind; dann müssen, wie man leicht sieht, die Verschiebungen aller übrigen Punkte jenen geometrisch gleich sein, und man kann daher alle Verschiebungen durch eine geradlinige gleichförmige Bewegung der Punkte

$m, m', m'', \cdots$ in einer beliebigen Zeit τ hervorbringen, mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $\frac{MM_1}{\tau}$ parallel einer und derselben Geraden.

Wenn es unter den Punkten des Systems einen Punkt O giebt, dessen Verschiebung gleich Null ist, so lässt sich die Verschiebung des Systems durch eine Rotation um den Punkt O hervorbringen. In diesem Falle sieht man leicht ein, dass es noch eine Menge anderer Punkte giebt, die keine Verschiebung erleiden; sie liegen alle auf einer durch O gehenden Geraden. Jeder Punkt A nämlich, dessen Verschiebung gleich Null ist, muss von den Punkten M und M_1 gleich weit abstehen und daher in der durch den Mittelpunkt μ der Strecke MM_1 gehenden und auf derselben senkrechten Ebene (P) liegen; ebenso muss A in der durch den Mittelpunkt μ' der Verschiebung $M'M_1'$ gehenden und zu derselben senkrechten Ebene (P') liegen; folglich liegt A auf der Schnittlinie der Ebenen (P) und (P'). Offenbar steht jeder Punkt dieser Schnittlinie von den Punkten M und M_1, sowie auch von den Punkten M' und M_1' gleich weit ab; und da in den Pyramiden $OMM''A$ und $OM_1M_1''A$ die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Flächenwinkel an den Kanten OM und OM_1 gleich sind, so ist $AM'' = AM_1''$. Man ersieht hieraus, dass alle Punkte der Schnittlinie der Ebenen (P) und (P') als unveränderlich verbunden mit den Punkten $m, m', m'', \cdots$, keine Verschiebung erleiden. Alle Ebenen, die sich durch die Mittelpunkte der übrigen Verschiebungen $M''M_1''$, $M'''M_1'''$, $\cdots$ senkrecht zu diesen legen lassen, schneiden sich in derselben Geraden OA, wie jene Ebenen (P) und (P'). Der Winkel zwischen den Ebenen OMA und $OM'A$ ist gleich dem der Ebenen OM_1A und $OM_1'A$, und deshalb ist auch der Winkel der Ebenen OMA und OM_1A gleich dem der Ebenen $OM'A$ und $OM_1'A$; folglich erleidet jede durch OA gehende Ebene eine Verschiebung um einen und denselben Winkel φ, den man die *Winkelverschiebung* des ganzen Systems nennt. Offenbar lässt sich das System aus der Lage $(M, M', M'', \cdots)$ in die Lage $(M_1, M_1', M_1'', \cdots)$ durch eine gleichförmige Rotation um OA überführen, und zwar in einer beliebigen Zeit τ mit einer

Winkelgeschwindigkeit gleich $\frac{\varphi}{\tau}$. Die Gerade OA heisst deshalb die *Axe der Verschiebung* des Systems. Bedeutet h den Abstand der Mitte μ der Verschiebung MM' von der Axe OA, so hat man $MM' = 2h \tan\frac{\varphi}{2}$; da $\tan\frac{\varphi}{2}$ für alle Punkte denselben Werth hat, so sind die Verschiebungen der einzelnen Punkte den Abständen der Mitten der Verschiebungen von der Axe OA proportional.

Wenn sich die Verschiebung eines Systems durch eine Translationsbewegung nicht hervorbringen lässt, so lässt sie sich immer durch eine Bewegung erzeugen, die aus einer Translation und einer Rotation um irgend einen Punkt O zusammengesetzt ist, wie wir in §. 155 gesehen haben; dabei kann die Translationsverschiebung geradlinig und gleichförmig sein, und die Rotation um eine Axe vor sich gehen, die diese Translation erleidet. Dieselbe Verschiebung lässt sich durch zwei successive Bewegungen hervorbringen: zuerst eine Translation und dann eine Rotation um eine feste Axe, oder zuerst eine Rotation um eine feste Axe und dann eine geradlinige Translation. Es sei $\overline{OO'}$ die Verschiebung eines beliebigen Punktes O und $\overline{MM_2}$, $\overline{M'M_2'}$, $\cdots$ gerade Strecken, die der Verschiebung $\overline{OO'}$ geometrisch gleich sind; das Punktsystem $(O', M_2, M_2', \cdots)$ repräsentirt die Lage, in welche das System nach der Translation mit der gemeinsamen Verschiebung $\overline{OO'}$ kommt; und da $(O', M_2, M_2', \cdots)$ mit $(O', M_1, M_1', \cdots)$ einen gemeinsamen Punkt O' haben, so lässt sich das gegebene Punktsystem aus der Lage $(O', M_2, M_2', \cdots)$ durch eine Rotation um eine gewisse Axe $O'A'$ in die Lage $(O', M_1, M_1', \cdots)$ überführen. Wenn die Strecken $\overline{OM_3}$, $\overline{OM_3'}$, $\cdots$ den $\overline{O'M_1}$, $\overline{O'M_1'}$, $\cdots$ geometrisch gleich sind, so repräsentirt $(O, M_3, M_3', \cdots)$ eine Lage, in welche man das System aus der ursprünglichen Lage $(O, M, M', \cdots)$ durch eine Rotation um eine gewisse Axe OA überführen kann; hierauf kann man es aus der Lage $(O, M_3, M_3', \cdots)$ durch eine geradlinige Translation mit der gemeinsamen Verschiebung $\overline{OO'}$ in die Lage $(O', M_1, M_1', \cdots)$ bringen. Dabei haben alle Punkte der Geraden OA diese Translation, wodurch OA mit $O'A'$ zusammenfällt.

Da

$$\overline{MM_1} = \overline{OO'} + \overline{MM_3}, \quad \overline{M'M_1'} = \overline{OO'} + \overline{M'M_3'}, \cdots,$$

und da überdies alle Rotationsverschiebungen $\overline{MM_3}$, $\overline{M'M_3'}, \cdots$ auf der Axe OA senkrecht stehen, so findet man, wenn man die Strecken $\overline{ON} = \overline{MM_1}$, $\overline{ON'} = \overline{M'M_1'}, \cdots$ und dann $O'N$, $O'N', \cdots$ zieht, dass die letzteren in einer und derselben zu OA senkrechten Ebene liegen. Wir schliessen hieraus folgendes:

1) *Die Axe der Rotationsverschiebung steht senkrecht auf der Ebene, die durch die Endpunkte von drei Geraden geht, welche, von einem Ursprunge ausgehend, den Verschiebungen dreier Punkte geometrisch gleich sind.* 2) *Die Verschiebungen aller Punkte haben gleiche Projectionen auf die Axe der Rotationsverschiebung.*

Trägt man in einer durch O gehenden und zu OA senkrechten Ebene (Fig. 71) OK gleich und entgegengesetzt $O'N$ auf und construirt in derselben Ebene über OK als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck OMK, so dass der Winkel OMK gleich φ wird, so ist der Scheitel M ein Punkt, dessen Verschiebung geometrisch gleich $\overline{ON}$ ist. Alle Punkte der der Geraden OA parallelen MA' haben Verschiebungen, die geometrisch gleich $\overline{ON}$ sind.

Fig. 71.

Man kann das gegebene System von Verschiebungen als zusammengesetzt betrachten aus einer Translation mit der gemeinsamen Verschiebung $\overline{ON}$ und einer Rotation um die Axe MA'. Dabei ist die Winkelverschiebung wieder φ; denn NO' oder OK ist die Rotationsverschiebung des Punktes O und Winkel $OMK = \varphi$ ist die Winkelverschiebung.

Die kleinste von allen Verschiebungen stellt sich dar als Perpendikel $\overline{OP}$ auf der Ebene $O'NN'$. Die Punkte, deren Verschiebungen gleich $\overline{OP}$ sind, liegen auf der der Axe OA parallelen Geraden (C) und verschieben sich in dieser Geraden. Man kann das ganze System der gegebenen Verschiebungen als zusammengesetzt ansehen aus einem Translationssystem mit der gemeinsamen Verschiebung $\overline{OP}$ und einem Rotations-

system um (C) mit der Winkelverschiebung φ. Ein derartiges zusammengesetztes System von Verschiebungen lässt sich durch eine Schraubenbewegung erzeugen. Die Gerade (C) heisst die *Centralaxe*. Der Scheitel C des gleichschenkligen Dreiecks OO_1C, das in der zu OA senkrechten Ebene über $\overline{OO_1} = \overline{PO'}$ als Grundlinie mit dem Winkel $OCO_1 = \varphi$ an der Spitze construirt wurde, ist einer der Punkte der Centralaxe. Durch den Punkt C geht aber die Mittelsenkrechte von OO_1. Man kann also sagen: *Wenn man auf der Projection einer beliebigen Verschiebung auf eine zur Axe AO senkrechte Ebene die Mittelsenkrechte errichtet, so geht dieselbe durch die Spur der Centralaxe in dieser Ebene.* Auf Grund dieser Eigenschaft lässt sich die Centralaxe mit Hilfe der Projectionen zweier Verschiebungen auf eine zur Axe OA senkrechte Ebene bestimmen.

Sind alle Verschiebungen MM_1, $M'M_1'$, $\cdots$ einer Ebene parallel, so ist $OP = 0$ und die Centralaxe (C) ist nur Rotationsaxe. Man sieht hieraus, *dass sich die Verschiebung einer ebenen Figur in ihrer Ebene immer durch eine Rotation um einen gewissen Punkt hervorbringen lässt, welcher sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Verschiebungen zweier Punkte ergiebt.*

169. *Zwei oder mehr auf einander folgende Verschiebungen lassen sich durch eine einzige Verschiebung ersetzen.*

Sind $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \cdots \overline{k}$ successive Translationsverschiebungen, so ist ihre geometrische Summe $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \cdots + \overline{k}$ die Translationsverschiebung, durch welche das System aus der ursprünglichen Lage in diejenige gebracht werden kann, welche es nach der Verschiebung $\overline{k}$ einnehmen soll. Auch ist leicht zu sehen, dass die Reihenfolge der Verschiebungen $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \cdots \overline{k}$ auf die resultirende Bahn des Systems keinen Einfluss hat.

Offenbar können auch zwei auf einander folgende Rotationsverschiebungen um einen und denselben Punkt O durch eine einzige Rotationsverschiebung um denselben Punkt ersetzt werden. Die Lage der Axe und die Winkelverschiebung der resultirenden Verschiebung bestimmen sich folgendermassen. Man denke sich eine Kugel um O als Mittelpunkt beschrieben (Fig. 72); A sei die Spur der Axe der ersten Rotationsver-

schiebung, B die der Axe der zweiten, auf die erste folgenden Rotationsverschiebung auf dieser Kugel, α und β die entsprechenden Winkelverschiebungen. Trägt man an den durch A und B gehenden grössten Kreis nach beiden Seiten des Bogens AB im Punkte A sphärische Winkel gleich $\frac{\alpha}{2}$ und ebenso im Punkte B sphärische Winkel gleich $\frac{\beta}{2}$ an, so erhält man als Schnittpunkte der Schenkel dieser Winkel die beiden gegen den Bogen AB symmetrisch gelegenen Punkte C und C'. Die erste Verschiebung führt nun den Punkt C nach C', die zweite den Punkt C' nach C, so dass also C nach den beiden Verschiebungen wieder an seinen ursprünglichen Ort zurückkehrt; dieser Punkt ist daher die Spur der Axe der aus den beiden gegebenen resultirenden Rotationsverschiebung.

Fig. 72.

Die Rotation um (B) führt das Dreieck $AC'B$ in die Lage $A'CB$ über; CA' ist die Lage des Bogens CA infolge der Rotation um C mit der Winkelverschiebung

$$ACA' = 360^0 - 2ACB.$$

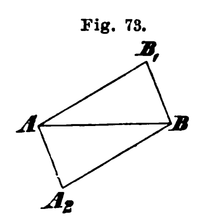
Der Winkel ACB bestimmt sich aus dem sphärischen Dreiecke ABC durch die Winkel $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ und die Seite AB.

Zwei auf einander folgende Rotationsverschiebungen um parallele Axen reduciren sich auf zwei auf einander folgende Verschiebungen einer ebenen Figur in einer zu den Axen senkrechten Ebene. Man denke sich in Fig. 72 die Kugel durch eine Ebene ersetzt, so dass A die Spur der ersten, B die der zweiten Axe in dieser Ebene, α und β die Winkelverschiebungen und die Dreiecke ABC, ABC' geradlinig sind. Durch dieselben Schlussfolgerungen, wie im vorigen Falle, ergiebt sich dann C als Spur einer der gegebenen parallelen Axe, um welche eine einzige Verschiebung stattfinden kann, die die beiden gegebenen ersetzt.

Ist $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^0$, so liegt der Punkt C im Unendlichen. Man kann in diesem Falle die Rotation um B als der um A entgegengesetzt betrachten mit derselben Winkelverschiebung α.

Zwei solche Rotationen bilden ein *Paar*; jedes Rotationspaar lässt sich durch eine Translation ersetzen. Um sich hiervon zu überzeugen, sei B_1 (Fig. 73) die Lage des Punktes B vor der Rotation um A und A_2 die des Punktes A nach der Rotation um B; da nun $\sphericalangle B_1AB = \sphericalangle ABA_2 = \alpha$, so ist $\overline{AA_2} = \overline{B_1B}$; also erleiden die beiden Punkte A und B_1 der Geraden AB_1, die der beweglichen ebenen Figur angehört, geometrisch gleiche Verschiebungen; daher ist die resultirende Verschiebung eine Translation nach derjenigen Seite hin, wohin die erste Rotation vor sich geht. Die Grösse der gemeinsamen Verschiebung ist $2AB \sin\frac{\alpha}{2}$.

Fig. 73.



Ausführlichere Untersuchungen über die Zusammensetzung der Verschiebungen und über die Abhängigkeit der Lage des Systems von der Reihenfolge, in der die Verschiebungen auf einander folgen, finden sich in der Abhandlung von C. Jordan: Mémoire sur les groupes de mouvements in den Annali di Matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona, Serie II. T. II.

Die Abhandlungen von Chasles in dem 52. Bande der Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (Paris 1861) enthalten manche andere interessante Eigenschaften der endlichen Verschiebungen.

Von den Eigenschaften der Verschiebungen kann man mit Leichtigkeit zu denen der Geschwindigkeiten übergehen, indem man die Verschiebungen unendlich klein annimmt und unendlich kleine Grössen höherer Ordnung, d. h. solche, die von den Beschleunigungen abhängen, vernachlässigt. Die Axe einer unendlich kleinen Rotationsverschiebung um einen Punkt wird zur Momentanaxe der Rotation oder zur Axe der Geschwindigkeiten, und die Centralaxe der unendlich kleinen Verschiebungen wird Centralaxe der Geschwindigkeiten.

170. Die Existenz einer Rotationsaxe bei einer endlichen Verschiebung um einen festen Punkt lässt sich folgendermassen analytisch nachweisen.

Man denke sich drei zu einander rechtwinklige Axen, die

von einem festen Punkt O ausgehen und mit dem um O rotirenden Systeme unveränderlich verbunden sind; es seien $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ die Lagen dieser Axen vor der Verschiebung des Systems und Ox, Oy, Oz ihre Lagen nach derselben; ξ, η, ζ seien die Coordinaten eines Systempunktes m bezüglich der ersteren Axen und x, y, z seine Coordinaten bezüglich der zweiten Axen. Nach den Formeln für die Coordinatentransformation hat man dann:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \eta &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ \zeta &= a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{aligned} \qquad (1)$$

wo (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) die Cosinus der Winkel sind, welche die Axen Ox, Oy, Oz mit den Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ bilden. Diese Cosinus genügen den folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0; \end{aligned} \qquad (2)$$

ferner den Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, & a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 &= 0, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1, & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Endlich gelten noch die Beziehungen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2 c_3 - c_2 b_3, & a_2 &= b_3 c_1 - c_3 b_1, & a_3 &= b_1 c_2 - c_1 b_2, \\ b_1 &= c_2 a_3 - a_2 c_3, & b_2 &= c_3 a_1 - a_3 c_1, & b_3 &= c_1 a_2 - a_1 c_2, \\ c_1 &= a_2 b_3 - b_2 a_3, & c_2 &= a_3 b_1 - b_3 a_1, & c_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Ist die Verschiebung des Punktes (ξ, η, ζ) gleich Null, so ist $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ und es folgt dann aus den Gleichungen (1):

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta, & & (a_1 - 1)\xi + b_1 \eta + c_1 \zeta = 0, \\ \eta &= a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta, & \text{oder} \quad & a_2 \xi + (b_2 - 1)\eta + c_2 \zeta = 0, \\ \zeta &= a_3 \zeta + b_3 \eta + c_3 \zeta, & & a_3 \xi + b_3 \eta + (c_3 - 1)\zeta = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Sollen aber die letzten drei Gleichungen durch ein anderes Werthsystem von ξ, η, ζ als 0, 0, 0 erfüllt werden, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - 1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2 - 1, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 - 1 \end{vmatrix}$$

zu Null werde. Man überzeugt sich leicht, dass dieselbe identisch gleich Null ist. Nach der bekannten Additionsregel für Determinanten hat man nämlich:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$+ a_1 + b_2 + c_3 - 1.$$

Dies wird jedoch nach den Formeln (3) identisch zu Null.*) Ist aber $D = 0$, so stellen die Gleichungen (4) eine durch den Coordinatenursprung gehende Gerade dar, welche die Rotationsaxe ist. Bezeichnet man mit D_{rs} die Derivirte der Determinante D nach dem Elemente der r^{ten} Zeile und s^{ten} Colonne, so lassen sich die Gleichungen (4) durch die folgenden ersetzen:

$$\xi : \eta : \zeta = D_{11} : D_{12} : D_{13} = D_{21} : D_{22} : D_{23} = D_{31} : D_{32} : D_{33}; \quad (5)$$

mit Hilfe der Gleichungen (3) findet man dann:

---

*) Dass $D = 0$ ist, lässt sich auch folgendermassen beweisen. Man multiplicire D mit der Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$, indem man die Formeln (2) beachtet. Dadurch erhält man $-D$, folglich ist $D = -D$, also $D = 0$. Euler, von dem der Beweis für die Existenz der Rotationsaxe für eine endliche Verschiebung um einen Punkt herrührt, gab in seiner Abhandlung: Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum (Novi Comm. Ac. Petrop. 1775, T. XX.) die Gleichung $D = 0$ noch nicht. Dies that erst Lexell in der Abhandlung: Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum (Novi Comm. Ac. Petrop., T. XX). Der Beweis dafür, dass $D = 0$ ist, ergiebt sich auch aus den Eigenschaften der schiefen Determinanten (Brioschi: Théorie des déterminants).

$$D_{11} = a_1 - b_2 - c_3 + 1,$$
$$D_{21} = b_1 + a_2,$$
$$D_{31} = c_1 + a_3,$$
$$D_{12} = b_1 + a_2, \qquad D_{13} = c_1 + a_3,$$
$$D_{22} = b_2 - a_1 - c_3 + 1, \qquad D_{23} = c_2 + b_3,$$
$$D_{32} = c_2 + b_3, \qquad D_{33} = c_3 - a_1 - b_2 + 1.$$

Da aber $D_{rs} = D_{sr}$ ist, so ist $D_{rs} = \pm \sqrt{D_{rr}} \sqrt{D_{ss}}$, und somit gehen die Gleichungen (5) in die folgenden über:

$$\frac{\xi}{\pm\sqrt{D_{11}}} = \frac{\eta}{\pm\sqrt{D_{22}}} = \frac{\zeta}{\pm\sqrt{D_{33}}}, \tag{6}$$

wo die Zeichen $\pm$ sich nach dem Vorzeichen von

$$D_{rs} = \pm \sqrt{D_{rr}} \sqrt{D_{ss}}$$

bestimmen.

171. Es seien wiederum $\mu, \mu', \mu'', \cdots$ die Mitten der Verschiebungen MM_1, $M'M_1'$, $M''M_1''$, $\cdots$ Die halben Verschiebungen μM_1, $\mu' M_1'$, $\mu'' M_1''$, $\cdots$ repräsentiren ein System von Strecken, die auf den durch die Punkte $\mu, \mu', \mu'', \cdots$ und die Axe OA gehenden Ebenen senkrecht stehen; sie sind überdiess den Abständen jener Punkte von OA proportional. Folglich kann man diese halben Verschiebungen betrachten als die Geschwindigkeiten einer Rotation des Punktsystems $(\mu, \mu', \mu'', \cdots)$ um die Axe OA mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω, die gleich $\tan \frac{1}{2}\varphi$ ist und nach der Regel des §. 26 auf der Axe OA aufgetragen wird. Bezeichnet man mit λ, μ, ν die Projectionen von Ω auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, so kann man mit Hilfe der Euler'schen Formeln die Projectionen der halben Verschiebungen μM_1, $\mu' M_1'$, $\mu'' M_1''$, $\cdots$ auf diese Axen ausdrücken. Die Coordinaten (ξ, η, ζ) des Punktes m erhalten infolge der Verschiebungen des Systems die Incremete $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$; die Hälften dieser Incremente sind die Projectionen von MM_1 auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, und $\xi + \frac{1}{2}\Delta\xi$, $\eta + \frac{1}{2}\Delta\eta$, $\zeta + \frac{1}{2}\Delta\zeta$ sind die Coordinaten des Punktes μ. Mithin erhält man nach den Formeln (3) §. 25:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta\xi &= \mu(\zeta + \tfrac{1}{2}\Delta\zeta) - \nu(\eta + \tfrac{1}{2}\Delta\eta), \\ \tfrac{1}{2}\Delta\eta &= \nu(\xi + \tfrac{1}{2}\Delta\xi) - \lambda(\zeta + \tfrac{1}{2}\Delta\zeta), \\ \tfrac{1}{2}\Delta\zeta &= \lambda(\eta + \tfrac{1}{2}\Delta\eta) - \mu(\xi + \tfrac{1}{2}\Delta\xi). \end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus ergeben sich die Ausdrücke für die Projectionen der ganzen Verschiebung MM_1 auf die Coordinatenaxen als Functionen der Coordinaten des Punktes m. Die Gleichungen (7) lassen sich in Form linearer Gleichungen folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta\xi + \nu\Delta\eta - \mu\Delta\zeta &= 2\mu\zeta - 2\nu\eta, \\ -\nu\Delta\xi + \Delta\eta + \lambda\Delta\zeta &= 2\nu\xi - 2\lambda\zeta, \\ \mu\Delta\xi - \lambda\Delta\eta + \Delta\zeta &= 2\lambda\eta - 2\mu\xi; \end{aligned}$$

aus diesen Gleichungen findet man:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \frac{2}{h}\,[-(\mu^2+\nu^2)\,\xi + (\lambda\mu-\nu)\,\eta + (\lambda\nu+\mu)\,\zeta], \\ \Delta\eta &= \frac{2}{h}\,[(\lambda\mu+\nu)\,\xi - (\lambda^2+\nu^2)\,\eta + (\mu\nu-\lambda)\,\zeta], \qquad (8) \\ \Delta\zeta &= \frac{2}{h}\,[(\lambda\nu-\mu)\,\xi + (\mu\nu+\lambda)\,\eta - (\lambda^2+\mu^2)\,\zeta], \end{aligned}$$

wo

$$h = \begin{vmatrix} 1, & \nu, & -\mu \\ -\nu, & 1, & \lambda \\ \mu, & -\lambda, & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Man kann die Grössen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ auch unmittelbar mit Hilfe der Formeln (1) erhalten. Da ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz sind und $\xi + \Delta\xi$, $\eta + \Delta\eta$, $\zeta + \Delta\zeta$ die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, so erhält man nach den Formeln (1):

$$\begin{aligned} \xi + \Delta\xi &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta, \\ \eta + \Delta\eta &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta, \\ \zeta + \Delta\zeta &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta; \end{aligned}$$

folglich wird:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= (a_1-1)\,\xi + b_1\eta + c_1\zeta, \\ \Delta\eta &= a_2\xi + (b_2-1)\,\eta + c_2\zeta, \\ \Delta\zeta &= a_3\xi + b_3\eta + (c_3-1)\,\zeta. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung dieser Ausdrücke für $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ mit den unter (8) gegebenen erhält man die Gleichungen, welche zwischen den neun Cosinus $a_1, b_1, c_1, a_2, \cdots$ und den

drei Grössen λ, μ, ν bestehen; aus ihnen ergeben sich die folgenden bemerkenswerthen Ausdrücke für die neun Cosinus:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{h}(1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2), \\
a_2 &= \frac{2}{h}(\lambda\mu + \nu), \\
a_3 &= \frac{2}{h}(\lambda\nu - \mu),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{h}(\lambda\mu - \nu), & c_1 &= \frac{2}{h}(\lambda\nu + \mu), \\
b_2 &= \frac{1}{h}(1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2), & c_2 &= \frac{2}{h}(\mu\nu - \lambda), \\
b_3 &= \frac{2}{h}(\mu\nu + \lambda), & c_3 &= \frac{1}{h}(1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2).
\end{aligned}
$$

Diese Formeln dienen zur Bestimmung der Lage (Ox, Oy, Oz), welche die Axen ($O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$) infolge der Rotation um die Axe OA annehmen.

Wenn umgekehrt die Lage (Ox, Oy, Oz) gegeben ist, welche das Axensystem ($O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$) nach einer beliebigen Verschiebung einnimmt, d. h. wenn die neun Cosinus a_1, b_1, c_1, $a_2, \cdots$ bekannt sind, so lassen sich die Grössen λ, μ, ν bestimmen, und man kann dann mit Hilfe dieser Grössen die Lage der Rotationsaxe OA und die Grösse der Winkelverschiebung φ finden. Addirt man nämlich die Formeln für a_1, b_2, c_3, so folgt:

$$a_1 + b_2 + c_3 = \frac{1}{h}(4 - h), \quad \text{also: } h = \frac{4}{a_1 + b_2 + c_3 + 1};$$

ferner findet man:

$$b_3 - c_2 = \frac{4}{h}\lambda, \quad c_1 - a_3 = \frac{4}{h}\mu, \quad a_2 - b_1 = \frac{4}{h}\nu,$$

$$\lambda = \frac{b_3 - c_2}{a_1 + b_2 + c_3 + 1}, \quad \mu = \frac{c_1 - a_3}{a_1 + b_2 + c_3 + 1}, \quad \nu = \frac{a_2 - b_1}{a_1 + b_2 + c_3 + 1};$$

für den Winkel φ erhält man die Formel:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = \sqrt{\frac{3 - a_1 - b_2 - c_3}{a_1 + b_2 + c_3 + 1}}.$$

Fügt man zu den Ausdrücken (8) für die Projectionen der Rotationsverschiebung auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ die Projectionen der Translationsverschiebung auf dieselben Axen

hinzu, so erhält man allgemeine Formeln für die Projectionen einer beliebigen Verschiebung. Mit Hilfe dieser Formeln kann man die oben bewiesenen Eigenschaften der endlichen Verschiebungen analytisch ableiten. Diese Untersuchung findet man ausführlich durchgeführt in der Abhandlung von O. Rodrigues: Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. Journal de Liouville T. V, 1840.

172. Die drei Grössen λ, μ, ν, durch welche sich die Cosinus der von einem Systeme rechtwinkliger Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz mit einem andern $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ gebildeten Winkel ausdrücken lassen, können die drei Winkel φ, ψ, ϑ ersetzen, durch welche nach Euler (s. §. 151) die Lage des ersten Axensystems gegen das zweite bestimmt wird. Sind die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ fest und Ox, Oy, Oz mit dem um O rotirenden Systeme unveränderlich verbunden, so werden die Grössen λ, μ, ν zu Functionen der Zeit.

Cayley*) hat gezeigt, wie sich die Projectionen der momentanen Rotationswinkelgeschwindigkeit auf die Axen Ox, Oy, Oz als Functionen der Grössen λ, μ, ν und deren Derivirten nach der Zeit darstellen lassen. Man hat dazu nur die Ausdrücke (9) in die Formeln (40) des §. 150 einzusetzen. Nach Ausführung dieser Substitution und Vornahme aller Kürzungen ergiebt sich:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{h}(\nu\mu' - \mu\nu' + \lambda'), \\ q &= \frac{2}{h}(\lambda\nu' - \nu\lambda' + \mu'), \qquad (10) \\ r &= \frac{2}{h}(\mu\lambda' - \lambda\mu' + \nu'). \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit ω_ξ, ω_η, ω_ζ die Projectionen der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ auf die festen Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, so erhält man mit Hilfe der Formeln (10) und (9):

*) The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, T. I, 1846.

$$\omega_\xi = \frac{2}{h}(\mu\nu' - \nu\mu' + \lambda'),$$
$$\omega_\eta = \frac{2}{h}(\nu\lambda' - \lambda\nu' + \mu'), \qquad (11)$$
$$\omega_\zeta = \frac{2}{h}(\lambda\mu' - \mu\lambda' + \nu').$$

Diese Ausdrücke unterscheiden sich von den vorhergehenden nur durch die Vorzeichen der Determinanten zweiten Grades

$$\mu\nu' - \nu\mu', \quad \nu\lambda' - \lambda\nu', \quad \lambda\mu' - \mu\lambda'. \qquad (12)$$

Bedeutet nun wieder φ die Winkelverschiebung derjenigen endlichen Rotationsverschiebung, durch welche das Axensystem $(O\xi, O\eta, O\zeta)$ in die Lage (Ox, Oy, Oz) übergeführt werden kann, und trägt man auf der Axe dieser Rotation die Länge $\Omega = \tan\frac{1}{2}\varphi$ auf, so sind λ, μ, ν die Projectionen von Ω auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ und auch auf die Axen Ox, Oy, Oz; λ', μ', ν' aber sind die Projectionen der geometrischen Derivirten Ω_1 auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Die Determinanten (12) sind nun die Projectionen einer Strecke k auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, welche Strecke gleich der Fläche des aus Ω und Ω_1 zu construirenden Parallelogramms ist; dabei steht k senkrecht auf der Ebene jenes Parallelogramms und ist im Sinne einer rechtläufigen Drehung des Ω_1 um Ω gerichtet. Bedeuten also k_ξ, k_η, k_ζ jene Projectionen, so lassen sich die Gleichungen (10) und (11) schreiben:

$$p = \frac{2}{h}(\lambda' - k_\xi), \quad q = \frac{2}{h}(\mu' - k_\eta), \quad r = \frac{2}{h}(\nu' - k_\zeta), \qquad (13)$$

$$\omega_\xi = \frac{2}{h}(\lambda' + k_\xi), \quad \omega_\eta = \frac{2}{h}(\mu' + k_\eta),$$
$$\omega_\zeta = \frac{2}{h}(\nu' + k_\zeta). \qquad (14)$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich eine einfache Construction für die Momentanaxe ω, wenn Ω und Ω_1 bekannt sind. Die Formeln (14) zeigen nämlich, dass die Geraden ω, k und Ω_1 in derselben Ebene liegen; denn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \omega_\xi, & \omega_\eta, & \omega_\zeta \\ k_\xi, & k_\eta, & k_\zeta \\ \lambda', & \mu', & \nu' \end{vmatrix} = \frac{2}{h} \begin{vmatrix} \lambda' + k_\xi, & \mu' + k_\eta, & \nu' + k_\zeta \\ k_\xi, & k_\eta, & k_\zeta \\ \lambda', & \mu', & \nu' \end{vmatrix}$$

ist gleich Null. Die Grössen ω_ξ, ω_η, ω_ζ sind die Coordinaten des Endpunktes D der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$

bezüglich der Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; p, q, r sind die Coordinaten desselben Punktes für die Axen Ox, Oy, Oz, oder die Coordinaten bezüglich $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ desjenigen Punktes E, welcher infolge der endlichen Verschiebung, die das System der Axen ($O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$) in die Lage (Ox, Oy, Oz) bringt, nach D gelangt. Daher sind

$$\tfrac{1}{2}(\omega_\xi - p) = \frac{2}{h}k_\xi, \quad \tfrac{1}{2}(\omega_\eta - q) = \frac{2}{h}k_\eta, \quad \tfrac{1}{2}(\omega_\zeta - r) = \frac{2}{h}k_\zeta$$

die Projectionen der halben Verschiebung DE auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Da dieselben den Projectionen der Strecke K proportional sind, so steht DE auf der Ebene der Geraden Ω und Ω_1 senkrecht und liegt die Mitte C von DE auf der Geraden Ω_1. Hieraus sieht man, dass die Ebene der Geraden Ω und ω mit der Ebene der Geraden Ω und Ω_1 den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ bildet. Es ist also *die Momentanaxe $\bar{\omega}$ die Schnittlinie der Ebene der Geraden K und Ω_1 mit einer durch Ω gehenden Ebene, die mit der Ebene der Geraden Ω und Ω_1 den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ bildet.*

Die Formeln (14) liefern:

$$\omega \cos(\omega\Omega) = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega \cos(\omega\Omega_1) = \frac{2\Omega_1}{1+\Omega^2},$$

$$\omega \cos(\omega k) = \frac{2\Omega\Omega_1 \sin(\Omega\Omega_1)}{1+\Omega^2},$$

und

$$\omega = \frac{2\Omega_1}{1+\Omega^2}[1 + \Omega^2 \sin(\Omega\Omega_1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Die erste dieser Formeln zeigt, dass *die Projection der momentanen Winkelgeschwindigkeit auf die Axe derjenigen endlichen Verschiebung, durch welche das System der Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ in die Lage Ox, Oy, Oz übergeführt wird, gleich der Derivirten der entsprechenden Winkelverschiebung nach der Zeit ist.*

Die Formeln (10) geben noch folgende:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \tfrac{1}{2}(\lambda m + p + \mu r - \nu q), \\ \mu' &= \tfrac{1}{2}(\mu m + q + \nu p - \lambda r), \\ \nu' &= \tfrac{1}{2}(\nu m + r + \lambda q - \mu p), \end{aligned} \tag{15}$$

wo

$$m = \lambda p + \mu q + \nu r.$$

173. Verlegt man den Ursprung der festen Axen nach einem andern Punkt A mit Beibehaltung der Richtungen der Axen und bezeichnet man mit a, b, c die Coordinaten des Punktes O bezüglich der neuen Axen, so hat man nach den allgemeinen Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} \xi &= a + a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \eta &= b + a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ \zeta &= c + a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{aligned} \tag{16}$$

wo x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes m bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz sind und ξ, η, ζ dessen Coordinaten für die festen Axen $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$, deren Ursprung A ist. Dabei lassen sich die neun Cosinus a_1, b_1, c_1, $a_2, \cdots$ wieder nach den Formeln (9) als Functionen der drei Grössen λ, μ, ν ausdrücken, welche die Axe und die Winkelverschiebung derjenigen Rotationsbewegung bestimmen, durch welche ein dem festen paralleles von O ausgehendes Axensystem in die Lage der Axen Ox, Oy, Oz übergeführt werden kann. So lässt sich also die Lage der Axen Ox, Oy, Oz und des ganzen unveränderlichen Punktsystems $(m, m', m'', \cdots)$ mit Hilfe der sechs Argumente $(a, b, c, \lambda, \mu, \nu)$ bestimmen. Bei stetiger Bewegung des Systems bleiben die Coordinaten x, y, z constant, während die Argumente $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ Functionen der Zeit werden. Mit Hilfe dieser Functionen lassen sich die Coordinaten ξ, η, ζ jedes Systempunktes als Functionen der Zeit ausdrücken. Die ersten Derivirten dieser Coordinaten

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a' + a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z, \\ \frac{d\eta}{dt} &= b' + a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= c' + a'_3 x + b'_3 y + c'_3 z \end{aligned} \tag{17}$$

sind die Projectionen der Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z) auf die Axen $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$. Die Derivirten a'_1, b'_1, c'_1, $a'_2, \cdots$ enthalten die Derivirten λ', μ', ν', die man mit Hilfe der Formeln (15) eliminiren kann; dadurch erhält man die Grössen (17) ausgedrückt durch die Variablen a', b', c', λ, μ, ν, p, q, r.

Dabei sind a', b', c' die Projectionen der Geschwindigkeit des Punktes O auf die Axen $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$. Durch successive Differentiation der Formeln (16) ergeben sich Ausdrücke für die Projectionen der Beschleunigungen auf die festen Axen $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$.

XVI. Capitel.

Mögliche Bewegungen eines unfreien unveränderlichen Systems.

174. Aus den Ausführungen des vorhergehenden Paragraphen folgt, dass sich die Coordinaten der Punkte eines unveränderlichen Systems bezüglich der festen Axen als Functionen von sechs Argumenten a, b, c, λ, μ, ν darstellen, die man als unabhängige Variable betrachten kann, wenn das System vollkommen frei ist. Diese Argumente lassen sich, wenn nöthig, als Functionen von sechs anderen unabhängigen Variablen ausdrücken, welche man dann als neue Argumente, die die Lage des Systems zu bestimmen fähig sind, ansehen kann. Wenn die sechs Argumente, mit deren Hilfe sich die Lage eines unveränderlichen Systems bestimmen lässt, irgend welchen Bedingungsgleichungen oder -Ungleichungen genügen sollen, die entweder nur diese Argumente oder die Argumente und die Zeit enthalten, so wird das unveränderliche System zu einem *unfreien* oder *gezwungenen*.

Die mechanischen Verbindungen, von denen derartige Bedingungen herrühren, können entweder befestigende oder nicht befestigende sein (§. 121). Die befestigenden Verbindungen liefern Bedingungsgleichungen zwischen den Argumenten. Wenn die Zeit nicht explicit in diesen Gleichungen vorkommt, so darf die Anzahl der verschiedenen Gleichungen dieser Art sechs nicht übersteigen (§. 122).

Im Falle von sechs Bedingungsgleichungen ist das unveränderliche System unbeweglich, da die Argumente dann constante Werthe erhalten. Im Falle von fünf Bedingungsgleichungen sind die Verbindungen *vollkommene*; dann beschreibt im allgemeinen jeder Punkt eine bestimmte Trajectorie,

deren Gleichungen man erhält, indem man die sechs Argumente mit Hilfe der fünf Bedingungsgleichungen aus den drei Gleichungen, welche die Coordinaten des betreffenden Punktes als Functionen der Argumente ausdrücken, eliminirt. Einige besondere Punkte können dabei fest bleiben. Bei vier Bedingungsgleichungen kann sich im allgemeinen jeder Punkt auf verschiedenen, auf einer Fläche gelegenen Trajectorien bewegen; jene Fläche mag die *Trajectorienfläche* heissen. Ihre Gleichung erhält man dadurch, dass man die sechs Argumente aus den Gleichungen (16) §. 173 und den vier Bedingungsgleichungen eliminirt. Einige besondere Punkte können dabei bestimmte Trajectorien beschreiben oder fest bleiben.

Wenn die Verbindungen nicht mehr als drei Bedingungsgleichungen ergeben, so kann sich im allgemeinen jeder Punkt mit Ausnahme specieller Fälle nach allen Richtungen des Raumes bewegen.

Ein fester Körper mit zwei festen Punkten A und B ist ein unveränderliches System mit fünf befestigenden Verbindungen. Die Coordinaten der Punkte A und B sind nämlich sechs Grössen, zwischen denen die Bedingung besteht, dass die Länge AB unveränderlich ist; man kann sie daher als Functionen von fünf unabhängigen Grössen ansehen, die wegen der Unbeweglichkeit der Punkte A und B constant bleiben müssen: dies liefert fünf Bedingungsgleichungen. Jeder nicht auf der Geraden AB gelegene Punkt des Körpers kann sich nur auf der Peripherie eines Kreises bewegen, dessen Mittelpunkt auf AB liegt und dessen Ebene auf dieser Geraden senkrecht steht. Alle Punkte der Geraden AB sind fest.

Ein starrer Körper, der sich parallel einer festen, unveränderlich mit ihm verbundenen Axe (A) bewegen und um diese Axe drehen kann, ist ein unveränderliches Punktsystem mit vier befestigenden Verbindungen. Die Lage der gegebenen Axe (A) lässt sich durch die Coordinaten eines ihrer Punkte A und durch die Winkel bestimmen, welche sie mit den festen Coordinatenaxen bildet. Diese sechs Grössen lassen sich, mit Hilfe der Gleichungen der Axe selbst und der zwischen den Winkeln bestehenden Gleichungen als Functionen von vier

Grössen ausdrücken, welche constant bleiben müssen. Dies liefert aber die vier Gleichungen der Verbindungen. Im vorliegenden Falle kann sich jeder nicht auf der Axe (A) gelegene Punkt auf einem Kreiscylinder bewegen, dessen Axe die Gerade (A) ist; jeder Punkt der Axe (A) kann sich nur auf dieser Geraden bewegen.

Wenn sich der Punkt A eines starren Körpers auf einer gegebenen festen Fläche (S) bewegen und die mit dem Körper unveränderlich verbundene Gerade AB einer gegebenen Geraden parallel bleiben soll, so hat man nur drei Bedingungen, nämlich die Gleichung der Fläche und die Bedingungen, dass die beiden Winkel, durch welche die Lage der Geraden AB gegen die festen Coordinatenaxen bestimmt ist, constant bleiben. In diesem Falle kann sich jeder nicht auf der Geraden AB gelegene Punkt nach allen Richtungen hin bewegen, während die Punkte der Geraden AB auf bestimmten Flächen verbleiben. Doch kann auch bei drei Bedingungsgleichungen der Fall eintreten, dass es keine Punkte giebt, die sich nach allen Richtungen hin verschieben können; z. B. wenn ein Punkt O fest ist. Man hat in diesem Falle nur die drei Bedingungsgleichungen, welche die Unveränderlichkeit der Coordinaten a, b, c des Punktes O ausdrücken; jeder andere Punkt kann sich nur auf einer Kugel vom Mittelpunkte O bewegen. Dieser Umstand erklärt sich dadurch, dass die gegebenen Bedingungen die Argumente λ, μ, ν nicht enthalten und dass diese aus den Gleichungen (16) eliminirt werden können. Man erhält dadurch eine Gleichung

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

die zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ eines beliebigen Systempunktes besteht.

175. Jede Bedingungsgleichung zwischen den sechs Argumenten von der allgemeinen Form

$$f(a, b, c; \lambda, \mu, \nu) = 0$$

liefert eine Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial a} a' + \frac{\partial f}{\partial b} b' + \frac{\partial f}{\partial c} c' + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \lambda' + \frac{\partial f}{\partial \mu} \mu' + \frac{\partial f}{\partial \nu} \nu' = 0 \quad (18)$$

zwischen den Derivirten a', b', c', λ', μ', ν' der sechs Argumente.

Diesen Derivirten entspricht ein System möglicher Geschwindigkeiten, das sich zerlegen lässt in ein Translationssystem mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $\overline{k}$, die der Punkt O hat, und in ein Rotationssystem um diesen Punkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$. Bedeuten α, β, γ die Projectionen der Geschwindigkeit $\overline{k}$ auf die Axen Ox, Oy, Oz, so hat man:

$$a' = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma,$$
$$b' = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma,$$
$$c' = a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma.$$

Mit Hilfe dieser Formeln und der Formeln (15) lässt sich die Gleichung (18) auf die Form bringen:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Pp + Qq + Rr = 0. \tag{19}$$

Hierin kann man A, B, C als die Projectionen einer gewissen Strecke $\overline{H}$ auf die Coordinatenaxen ansehen und ebenso P, Q, R als die Projectionen einer andern Strecke $\overline{K}$; daher lässt sich die Gleichung (19) durch die folgende ersetzen:

$$\overline{Hk} + \overline{K\omega} = 0. \tag{20}$$

Wir werden $\overline{H}$ und $\overline{K}$ die Parameter der Verbindung (20) nennen. Aus der Definition, die in §. 115 für die Differentialparameter einer Function mehrerer Punkte gegeben wurde, folgt, dass $\overline{H}$ und $\overline{K}$ die Differentialparameter der linken Seite der Gleichung (19) sind, in Bezug auf die Punkte, deren Coordinaten (α, β, γ) und (p, q, r) sind.

Da diese Gleichung in Bezug auf k und ω homogen ist, so kann man, nachdem man ein jener Gleichung genügendes System der Grössen $\overline{k}$ und $\overline{\omega}$ gewählt hat, diese Grössen k und ω, ohne die Gleichung zu ändern, nach demselben Verhältniss ändern, indem man ihre Richtungen unverändert lässt. Wir werden daher zwei Geschwindigkeitssysteme, in denen $\overline{k}$ und $\overline{\omega}$ dieselben Richtungen und dasselbe Verhältniss haben, als dieselben betrachten. Der Kürze halber wollen wir das durch die Grössen $\overline{k}$ und $\overline{\omega}$ bestimmte Geschwindigkeitssystem mit (k, ω) bezeichnen.

Ist $K = 0$, so giebt die Gleichung (20) $k \cos(Hk) = 0$; in diesem Falle muss also die Translationsgeschwindigkeit $\overline{k}$ entweder gleich Null sein oder auf dem Parameter $\overline{H}$ senkrecht stehen, während die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ sowohl nach Grösse als nach Richtung beliebig bleibt.

Im Falle $H = 0$ giebt die Gleichung (20):

$$\omega \cos(K\omega) = 0;$$

folglich muss die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ entweder gleich Null sein oder auf dem Parameter $\overline{K}$ senkrecht stehen, während die Translationsgeschwindigkeit $\overline{k}$ sowohl nach Grösse als auch nach Richtung beliebig ist.

176. Ist der Parameter $\overline{H}$ nicht gleich Null, so hängt der Parameter $\overline{K}$ im allgemeinen von der Lage des Punktes O ab, d. h. er ändert sich bei der Aenderung des Ortes dieses Punktes. Um sich davon zu überzeugen, verlegt man den Ursprung O nach irgend einem andern Punkt O' und bezeichnet mit x, y, z die Coordinaten des Punktes O', mit v seine Geschwindigkeit in dem Systeme (k, ω) und mit v_x, v_y, v_z die Projectionen dieser Geschwindigkeit auf die Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz. Nach den Euler'schen Formeln hat man:

$$\alpha = v_x - qz + ry$$
$$\beta = v_y - rx + pz$$
$$\gamma = v_z - py + qx,$$

und setzt man diese Ausdrücke für α, β, γ in die Gleichung (19) ein, so folgt:

$$Av_x + Bv_y + Cv_z + (P + Bz - Cy)\,p + (Q + Cx - Az)\,q + (R + Ay - Bx)\,r = 0. \qquad (21)$$

Hierin sind die drei Grössen

$$P + Bz - Cy, \quad Q + Cx - Az, \quad R + Ay - Bx \qquad (22)$$

die Projectionen (auf die Coordinatenaxen) der Geschwindigkeit des Punktes O' in dem System (K, H), d. h. in einem Geschwindigkeitssystem, das aus einer Translation mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $\overline{K}$ und einer Rotation um den Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{H}$ zusammengesetzt

ist. Bezeichnet man diese Geschwindigkeit des Punktes O' mit $\overline{K'}$, so lässt sich die Gleichung (21) unter der Form darstellen:

$$\overline{Hv} + \overline{K'\omega} = 0. \qquad (23)$$

So ist die Gleichung (20) in eine andere Gleichung von derselben Form umgestaltet worden; dabei ist der Parameter $\overline{K}$ in $\overline{K'}$ übergegangen und die Translationsgeschwindigkeit $\overline{k}$ in $\overline{v}$. Ueberdies hat man:

$$\overline{HK'} = A(P + Bz - Cy) + B(Q + Cx - Az)$$
$$+ C(R + Ay - Bx) = AP + BQ + CR = \overline{HK}.$$

Man sieht hieraus, dass, wenn $\overline{HK} = 0$ und $\overline{H}$ nicht gleich Null ist, man den Punkt O' so wählen kann, dass $\overline{K'} = 0$ wird; hierzu ist nöthig, dass der Punkt O' auf der dem Parameter $\overline{H}$ parallelen Geraden

$$P + Bz - Cy = 0, \quad Q + Cx - Az = 0, \quad R + Ay - Bx = 0 \qquad (24)$$

liege. Dann führt die Gleichung (23) auf die Bedingung $\overline{Hv} = 0$, welche verlangt, dass die Translationsgeschwindigkeit $\overline{v}$ des Systems (v, ω) auf dem Parameter $\overline{H}$ oder auf der Geraden (24) senkrecht stehe, bei ganz beliebiger Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$.

Im Falle $\overline{HK} = 0$ giebt es somit immer eine Gerade, die die Eigenschaft hat, dass sie bei allen möglichen Geschwindigkeiten auf diesen oder auf den Trajectorien ihrer Punkte senkrecht steht. In diesem Falle stellt sich das unveränderliche System dar als ein starrer Körper, der sich mit einem Punkte O' auf eine zu einer gegebenen Geraden $\overline{H}$ senkrechte Ebene aufstützt.

177. Ist die Bedingung $\overline{HK} = 0$ nicht erfüllt, so kann man den Punkt O' so wählen, dass $\overline{K'}$ und $\overline{H}$ in dieselbe Gerade fallen, und zwar in die Centralaxe des Geschwindigkeitssystems (K, H); dabei ist $K' = \pm K \cos(KH)$.

Gesetzt, es fallen in der gegebenen Gleichung (20) $\overline{H}$ und $\overline{K}$ in dieselbe Gerade, und es sei h die Ganghöhe der Schraubenbewegung für das Geschwindigkeitssystem (K, H), so ist $h = \frac{K}{2\pi H}$; dadurch lässt sich die Gleichung (20) schreiben:

$$k \cos(kH) \pm 2\pi h \omega \cos(\omega H) = 0. \qquad (25)$$

Dieser Gleichung kann durch die folgenden speciellen Lösungen genügt werden:

1) $\overline{\omega} = 0$ und $\overline{k} \perp H$, d. h. durch ein beliebiges, zu $\overline{H}$ senkrechtes Translationssystem; 2) $\overline{k} = 0$ und $\overline{\omega} \perp H$, d. h. durch ein Rotationssystem um eine beliebige, auf der Geraden H senkrechte Axe mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit; 3) durch ein System (k, ω), in dem die Translationsgeschwindigkeit $\overline{k}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ die Richtung der Geraden H haben, d. h. durch ein Schraubensystem; dabei muss die Schraubenganghöhe $\frac{k}{2\pi\omega}$ gleich h sein. Im Falle eines positiven Zeichens bei dem zweiten Gliede der Gleichung (25) müssen $\overline{k}$ und $\overline{\omega}$ entgegengesetzten Sinn haben, im Falle eines negativen, übereinstimmenden Sinn.

Jede andere Lösung der Gleichung (25) führt auf eine jener drei Lösungen zurück. Man kann nämlich jedes Geschwindigkeitssystem (k, ω) zerlegen in die beiden Systeme

$$[k \sin(kH), \quad \omega \sin(\omega H)] \text{ und } [k \cos(kH), \quad \omega \cos(\omega H)];$$

das erstere, dessen Translations- und Winkelgeschwindigkeit auf H senkrecht stehen, unterliegt keiner weiteren Bedingung; das zweite aber, dessen Translations- und Winkelgeschwindigkeit die Richtung von H haben, gehört einer Schraubenbewegung längs H an, und die Gleichung (25) verlangt, dass die Ganghöhe der Schraube eine gegebene Grösse h habe.

178. W. Thomson und P. G. Tait beschreiben in dem „Treatise on natural Philosophy“, pag. 132 und 133*) einen Mechanismus, vermittelst dessen sich eine Verbindung realisiren

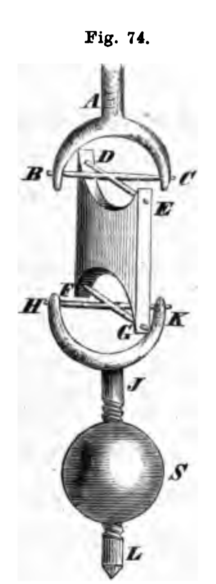
---

*) Siehe auch die Uebersetzung dieses Werkes: Handbuch der theoretischen Physik von W. Thomson und P. G. Tait, I. Bd, 1. Th. S. 146.

lässt, welche nur eine Bedingung von der allgemeinen Form (25) für die möglichen Geschwindigkeiten giebt.

Dieser Mechanismus ist in Fig. 74 dargestellt. Er besteht aus zwei (Hooke'schen) Universalgelenken. Der Schaft A und die Gabel BAC sind unbeweglich befestigt, und zwar befindet sich der Schaft A in verticaler Lage; $BCDE$ ist ein aus zwei zu einander senkrechten Achsen bestehendes Kreuz. Die erste Achse BC kann vermittelst der Zapfen B und C in der festen Gabel frei rotiren; die zweite ruht mit ihren Zapfen D und E in den Endpunkten eines beweglichen Zwischengliedes $DEFG$; in dieses letztere ist am andern Ende in derselben Weise die Achse FG eines zweiten Kreuzes $FKHG$ eingesetzt; die auf FG senkrechte Achse HK liegt mit ihren Zapfen in einer beweglichen Gabel HJK, an der der Schaft JL befestigt ist; dieser trägt an einem auf ihm eingeschnittenen Schraubengewinde eine kugelförmige Schraubenmutter (S). Indem wir nun voraussetzen, dass die Axen der Schäfte A und JL, sowie die Axe des Zwischengliedes $DEFG$ sich in verticaler Lage befinden, wollen wir die möglichen Geschwindigkeiten der Kugel (S) betrachten. 1) Bei unbeweglicher Lage des Schaftes JL kann dem Körper (S) eine Schraubenbewegung von gegebener Ganghöhe h ertheilt werden. 2) Indem man das Zwischenglied $DEFG$ um die horizontale Axe DE rotiren lässt, erhält der Schaft JL eine Bewegung, bei der die Geschwindigkeiten aller Punkte der Kugel (S) zur Axe JL senkrecht und einander gleich sind; es ist dies also ein System von, der Geraden HK parallelen Translationsgeschwindigkeiten. Ebenso kann man der Kugel (S) durch Drehen des Zwischengliedes $DEFG$ um BC ein anderes System von Translationsgeschwindigkeiten parallel der Geraden FG ertheilen. Durch gleichzeitige Rotation des Gliedes $DEFG$ um die Axen DE und BC kann man dem Schafte JL ein System von Translationsgeschwindigkeiten ertheilen, die einer beliebigen horizon-

Fig. 74.



talen Linie parallel sind. 3) Man kann das Glied $DEFG$ unbeweglich lassen und die Kugel (S) um jede der horizontalen Axen HK und FG drehen, so dass man der Kugel (S) ein System von Rotationsgeschwindigkeiten um eine beliebige horizontale Axe, mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit verleihen kann.

Ist also h der Gang der Schraube JL, so kann man der Kugel (S) jedes Geschwindigkeitssystem ertheilen, das der Gleichung (25) genügt, und offenbar kann die Kugel (S) auch kein Geschwindigkeitssystem annehmen, das der Gleichung (25) nicht genügte.

Wenn man statt der Schraubenmutter (S) auf den Schaft JL einen Körper (S) aufsetzt, der sich um die Axe JL nur drehen kann ohne die Translation längs dieser Axe, so hat man einen Körper, dessen Geschwindigkeiten nur der Bedingung $k \cos (kH) = 0$ genügen, wobei H die Richtung der Axe des Schaftes JL ist. Eine beliebige Rotation um diese Axe, verbunden mit beliebigen Rotationen um die Axen HK und FG oder um die Axen BC und DE, erzeugen eine Rotation um eine beliebige, die Axe des Schafts JL schneidende Axe.

Benimmt man endlich der Kugel (S) die Fähigkeit, um die Axe JL zu rotiren und gestattet ihr nur an dieser Axe hin zu gleiten, so hat man einen Körper, dessen Geschwindigkeiten nur der Bedingung $\omega \cos (\omega H) = 0$ genügen; diese Geschwindigkeiten können zu Rotationsaxen nur horizontale Gerade haben. Die Richtungen der Translationsgeschwindigkeiten sind jedoch beliebig.

179. Wenn die möglichen Geschwindigkeiten den zwei Gleichungen

$$\overline{Hk} + \overline{K\omega} = 0, \quad \overline{H'k} + \overline{K'\omega} = 0$$

genügen sollen, wobei die geometrischen Producte $\overline{HK}$ und $\overline{H'K'}$ nicht gleich Null sind, so kann man diese Gleichungen in zwei andere reelle oder imaginäre Gleichungen von derselben Art umformen, für welche die Bedingung $\overline{HK} = 0$ erfüllt ist. Multiplicirt man nämlich die erste Gleichung mit λ und addirt sie zur zweiten, so erhält man die Gleichung:

$$\overline{(\lambda \overline{H} + \overline{H'})\, \overline{k}} + \overline{(\lambda \overline{K} + \overline{K'})\, \omega} = 0, \tag{26}$$

die man der Bedingung unterwerfen kann:

$$\overline{(\lambda \overline{H} + \overline{H'})\, (\lambda \overline{K} + \overline{K'})} = 0,$$

d. h.

$$\overline{HK}\, \lambda^2 + (\overline{HK'} + \overline{KH'})\, \lambda + \overline{H'K'} = 0.$$

Setzt man die beiden, aus dieser Gleichung sich ergebenden Werthe von λ in (26) ein, so erhält man zwei Gleichungen von der Art, dass in jeder die Parameter auf einander senkrecht stehen. Damit die Werthe von λ reell werden, ist erforderlich, dass:

$$(\overline{HK'} + \overline{KH'})^2 - 4\overline{HK} \cdot \overline{H'K'} > 0.$$

180. In §. 146 haben wir gesehen, dass jedem Systeme möglicher Geschwindigkeiten ein Liniencomplex entspricht, der aus allen den Geraden besteht, welche man durch die verschiedenen Punkte des unveränderlichen Systems senkrecht zu den Geschwindigkeiten dieser Punkte ziehen kann; daher stellt eine Gleichung von der Form (20) den dem Geschwindigkeitssysteme (k, ω) entsprechenden Complex dar. Der Kürze halber wollen wir diesen Complex mit $[k, \omega]$ bezeichnen und eine dem Complexe angehörende Gerade als Stral betrachten. Die Lage eines Strales lässt sich durch zwei Argumente bestimmen: durch einen auf ihm gewählten Abschnitt $\overline{\lambda}$ (§. 146) und durch das Moment $\overline{\mu}$ dieses Abschnittes, d. h. durch die Geschwindigkeit, welche der Ursprung O bei einer Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\lambda}$ haben würde. Die Gleichung des Complexes lässt sich [§. 146, Gleichung (20)] in folgender Form schreiben:

$$\overline{k\lambda} + \overline{\omega\mu} = 0.$$

Man sieht hieraus, dass man, wenn für Gleichung (20) die Bedingung $\overline{HK} = 0$ erfüllt ist, $\overline{H}$ und $\overline{K}$ als Argumente eines gewissen, allen möglichen Complexen angehörenden Strals ansehen kann; man kann also sagen, dass in diesem Falle die Bedingung (20) einen allen möglichen Complexen gemeinsamen Stral bedeutet.

181. Wir wollen nun alle Fälle der Bestimmung eines möglichen Geschwindigkeitssystems (k, ω) oder eines möglichen

Complexes aus gegebenen Bedingungen von der allgemeinen Form (20) untersuchen.

1) Das Geschwindigkeitssystem (k, ω) lässt sich, wie in §. 133 gezeigt wurde, hervorbringen durch zwei Rotationen um zwei conjugirte Gerade (L) und (L') mit gewissen Winkelgeschwindigkeiten λ und λ'. Bezeichnet man mit μ und μ' die Geschwindigkeiten eines Punktes O bei diesen Rotationen, so sind λ und μ die Argumente der Geraden (L) und λ', μ' die der Geraden (L'); dabei ist $\bar{k} = \bar{\mu} + \bar{\mu'}$ und $\bar{\omega} = \bar{\lambda} + \bar{\lambda'}$. Setzen wir diese Grössen in die Bedingungsgleichung (20) ein, so folgt:

$$\overline{H\mu} + \overline{K\lambda} + \overline{H\mu'} + \overline{K\lambda'} = 0. \tag{27}$$

Da die Gerade (L) beliebig gewählt werden darf, so kann man sie der Bedingung

$$\overline{H\mu} + \overline{K\lambda} = 0 \tag{28}$$

unterwerfen, d. h. der Bedingung, ein Stral eines gegebenen Complexes $[K, H]$ zu sein. In diesem Falle geht die Gleichung (27) in die folgende über

$$\overline{H\mu'} + \overline{K\lambda'} = 0, \tag{29}$$

welche zeigt, dass die der (L) conjugirte Gerade (L') ebenfalls ein Stral des Complexes $[K, H]$ sein muss. *Bei einer einzigen Bedingung von der Form* (20) *kann man daher jedes System möglicher Geschwindigkeiten durch zwei Rotationen um zwei Stralen eines gegebenen Complexes* $[K, H]$ *erzeugen.*

Jedes Stralenpaar (L) und (L') des Complexes $[K, H]$ ist ein Paar conjugirter Rotationsaxen, die einem gewissen Systeme möglicher Geschwindigkeiten (k, ω) angehören, d. h. ein System conjugirter Geraden oder Polaren des Complexes $[k, \omega]$. Wählt man nämlich zwei Gerade (L) und (L') so, dass ihre Argumente (λ, μ) und (λ', μ') den Gleichungen (28) und (29) genügen, so hat man:

$$\overline{H(\bar{\mu} + \bar{\mu'})} + \overline{K(\bar{\lambda} + \bar{\lambda'})} = 0,$$

d. h. $\overline{Hk} + \overline{K\omega} = 0$, wenn man $\bar{k} = \bar{\mu} + \bar{\mu'}$ und $\bar{\omega} = \bar{\lambda} + \bar{\lambda'}$ setzt. Dies zeigt aber, dass das Geschwindigkeitssystem (k, ω) der Bedingung (20) genügt, also möglich ist.

Im Falle $\overline{HK} = 0$, kann man $\overline{H}$ und $\overline{K}$ als Argumente eines Strales ansehen, der allen möglichen Complexen gemeinsam ist; es können dann zwei beliebige diesen Stral schneidende Gerade (L) und (L') als conjugirte Gerade in dem System (k, ω) angenommen werden.

Bezeichnet man nämlich mit λ, μ die Argumente der Geraden (L), so ist $\overline{H\mu} + \overline{K\lambda}$, wie in §. 148 bewiesen, das sechsfache Volumen eines Tetraeders, dessen gegenüberliegende Kanten $\overline{H}$ und $\overline{\lambda}$ sind; da aber diese Kanten in einer Ebene liegen, so ist $\overline{H\mu} + \overline{K\lambda} = 0$; folglich sind $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ die Argumente eines dem Complexe $[K, H]$ angehörenden Strales.

Das System möglicher Geschwindigkeiten (k, ω) kann ausser den conjugirten Axen (L) und (L') noch eine Menge anderer (D) und (Δ) haben, die nicht Stralen des Complexes $[K, H]$ sind. Wie in §. 140 bewiesen, sind die Geraden (L), (L'), (D) und (Δ) die Erzeugenden eines und desselben geradlinigen Hyperboloids.

2) Gesetzt, die möglichen Geschwindigkeiten genügen zwei Gleichungen von der Form (20):

$$\overline{H_1 k} + \overline{K_1 \omega} = 0, \quad \overline{H_2 k} + \overline{K_2 \omega} = 0. \tag{30}$$

Wir wählen einen gemeinschaftlichen Stral (L) der beiden Complexe $[K_1, H_1]$ und $[K_2, H_2]$ als eine der conjugirten Axen des Systems (k, ω). Man findet dann wie im vorhergehenden Falle, dass die zu (L) conjugirte Gerade (L') gleichfalls ein Stral jener Complexe ist. Alle den beiden Complexen gemeinsamen Stralen bilden einen geometrischen Ort, den Plücker *Congruenz* genannt hat. Also *kann man jedes System möglicher Geschwindigkeiten, das zwei Bedingungsgleichungen genügt, durch Rotationen um zwei Stralen der Congruenz* $[K_1, H_1]$, $[K_2, H_2]$ *hervorbringen.* Um einen Stral dieser Congruenz zu erhalten, wähle man irgend einen Punkt m, bestimme seine Geschwindigkeit in dem Systeme (K_1, H_1), sowie im Systeme (K_2, H_2) und ziehe durch m eine Senkrechte zu der Ebene dieser Geschwindigkeiten.

Es seien (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) vier Stralen der Congruenz und (Γ) das geradlinige Hyperboloid, dessen Leitlinien (L_1), (L_2), (L_3) sind. Die Gerade (L_4) trifft das Hyperboloid

(Γ) in zwei Punkten, durch welche zwei Erzeugende (A) und (A') gehen.

Die auf den vier Stralen (L_1), (L_2), (L_3) und (L_4) der Congruenz liegenden Geraden (A) und (A') hat Plücker die Leitlinien der Congruenz genannt. Es ist leicht zu sehen, dass die Leitlinien der Congruenz gemeinsame conjugirte Polaren der die Congruenz bildenden Complexe $[K_1, H_1]$ und $[K_2, H_2]$ sind.

Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Schnittpunkte der Geraden (A) mit den Stralen (L_1), (L_2), (L_3), (L_4). Die Geschwindigkeiten dieser Punkte in dem Systeme (K_1, H_1) und in dem Systeme (K_2, H_2) sind resp. senkrecht auf (L_1), (L_2), (L_3), (L_4); daher geht die Ebene P_1, deren Nullpunkt A_1 ist, durch (L_1); sie schneide die Geraden (L_2) und (L_3) in den Punkten A'_2 und A'_3. Die Gerade $A'_2 A'_3$ trifft die (L_1) in einem gewissen Punkte A'_1; daher ist diese Gerade eine Erzeugende des Hyperboloids (Γ). Da die Geschwindigkeit des Punktes A_1 auf der Geraden $A_1 A'_2$ und die des Punktes A_2 auf $A_2 A'_2$ senkrecht steht, so ist die Geschwindigkeit des Punktes A'_2 auf den beiden Geraden $A_1 A'_2$ und $A_2 A'_2$, folglich auf der Ebene dieser Geraden senkrecht, d. h. der Punkt A'_2 ist der Nullpunkt der durch den Punkt A'_2 und die Gerade (A) gehenden Ebene. Ebenso sieht man, dass A'_3 der Nullpunkt der durch A'_3 und die Gerade (A) gehenden Ebene ist. Daraus folgt aber, dass die Geschwindigkeit des Punktes A_4 auf den Geraden $A'_2 A_4$ und $A'_3 A_4$ senkrecht steht, folglich auch auf der Ebene dieser Geraden; in dieser Ebene muss auch die Gerade (L_4) liegen, denn sie ist senkrecht zur Geschwindigkeit des Punktes A_4; folglich liegt die Gerade $A'_2 A'_3$ in derselben Ebene mit (L_4) und schneidet diese Gerade in einem gewissen Punkte A'_4. Somit liegt die Gerade $A'_2 A'_3$ auf den vier Geraden (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) und fällt daher mit der Leitlinie (A') zusammen. Da aber (A') die Verbindungslinie der Nullpunkte A'_2 und A'_3 zweier durch (A) gehenden Ebenen ist, so ist sie zu (A) sowohl im Systeme (K_1, H_1), als im Systeme (K_2, H_2) conjugirt, d. h. (A) und (A') sind gemeinsame conjugirte Polaren der Complexe $[K_1, H_1]$, $[K_2, H_2]$, was zu beweisen war.

Jede auf den Leitlinien (A) und (A') liegende Gerade (L) ist senkrecht zu den Geschwindigkeiten ihrer Punkte, sowohl im System (K_1, H_1), als auch im System (K_2, H_2) und ist daher ein Stral der Congruenz $[K_1, H_1]$, $[K_2, H_2]$. Umgekehrt muss jeder Stral (L) der Congruenz auf den Leitlinien (A) und (A') liegen. Wählt man nämlich auf dem Strale (L) einen Punkt m und zieht durch ihn eine auf (A) und (A') liegende Gerade, so ist dieselbe senkrecht zu den Geschwindigkeiten des Punktes m im Systeme (K_1, H_1) und im Systeme (K_2, H_2); sie muss daher mit dem Strale (L) zusammenfallen. Die Geschwindigkeiten irgend eines Punktes der Geraden (A) im Systeme (K_1, H_1) und im Systeme (K_2, H_2) sind auf der durch diesen Punkt und die Gerade (A') gehenden Ebene senkrecht; folglich fällt ihre Richtung in dieselbe Gerade. Das nämliche gilt auch von den Geschwindigkeiten der Punkte der Geraden (A').

Wenn in den gegebenen Gleichungen (30) die Parameter den Bedingungen $\overline{H_1 K_1} = 0$, $\overline{H_2 K_2} = 0$ genügen, so sind H_1 und K_1 die Argumente einer gewissen Geraden (A), H_2 und K_2 die einer andern Geraden (A'). Jede die (A) schneidende Gerade ist ein Stral des Complexes $[K_1, H_1]$, und jede die (A') schneidende Gerade ist ein Stral des Complexes $[K_2, H_2]$; mithin ist jede auf (A) und (A') liegende Gerade ein Stral der Congruenz $[K_1, H_1]$, $[K_2, H_2]$; daher sind (A) und (A') die Leitlinien der Congruenz. Wenn die Parameter in den Gleichungen (30) den Bedingungen $\overline{H_1 K_1} = 0$, $\overline{H_2 K_2} = 0$ nicht genügen, so kann man, wie in §. 179 gezeigt wurde, diese Gleichungen in zwei andere von der Art umformen, dass für sie jene Bedingungen erfüllt sind; im Falle einer reellen Transformation sind die Parameter der neuen Gleichungen die Argumente der beiden Leitlinien (A) und (A').

3) Es seien nun drei Gleichungen gegeben:

$$\overline{H_1 k} + \overline{K_1 \omega} = 0, \quad \overline{H_2 k} + \overline{K_2 \omega} = 0, \quad \overline{H_3 k} + \overline{K_3 \omega} = 0,$$

welchen jedes System möglicher Geschwindigkeiten (k, ω) genügen soll. Man betrachtet wieder dieses System als aus Rotationssystemen um zwei conjugirte Gerade (L) und (L')

zusammengesetzt und wählt als erste Gerade (L) einen den drei Complexen

$$[K_1, H_1], \quad [K_2, H_2], \quad [K_3, H_3] \tag{31}$$

gemeinsamen Stral. Ebenso wie in den vorhergehenden Fällen findet man dann, dass die zweite Gerade (L') gleichfalls ein jenen Complexen gemeinsamer Stral ist. *Man kann also jedes System möglicher Geschwindigkeiten durch Rotationen um zwei den drei Complexen* (31) *gemeinsame Stralen hervorbringen.*

Alle den drei Complexen (31) gemeinsamen Stralen liegen auf einem geradlinigen Hyperboloide (Γ), das aus drei Leitlinien construirt werden kann, die unter den Leitlinien der Congruenzen

$$[K_1 H_1] \text{ und } [K_2 H_2], \quad [K_1 H_1] \text{ und } [K_3 H_3],$$
$$[K_2 H_2] \text{ und } [K_3 H_3] \ .$$

zu wählen sind.

Ist für alle drei Gleichungen (31) die Bedingung $\overline{H_i K_i} = 0$ erfüllt, so sind H_i und K_i die Argumente eines allen möglichen Complexen $[k, \omega]$ gemeinsamen Strales; es giebt also in diesem Falle drei Gerade (A_1), (A_2), (A_3), die allen möglichen Complexen gemeinschaftlich sind. Eine dieselben schneidende Gerade (L), d. h. jede Erzeugende des Hyperboloids (Γ), das jene Geraden zu Leitlinien hat, ist ein den drei Complexen (31) gemeinsamer Stral; irgend zwei solche Stralen oder zwei Erzeugende des Hyperboloids (Γ) können als Rotationsaxen jedes möglichen Geschwindigkeitssystems (k, ω) gewählt werden.

Ist die Bedingung $\overline{H_i K_i} = 0$ nicht für alle drei Gleichungen (31) erfüllt, so kann man sie (nach §. 179) in drei andere umformen, für die jene Bedingung erfüllt ist, und wenn die Transformationen reell sind, so sind die Parameter der neuen Gleichungen die Argumente der drei Leitlinien (A_1), (A_2), (A_3) des Hyperboloids (Γ).

Jeder auf dem Hyperboloid (Γ) gelegene Punkt m kann sich auf einer bestimmten Fläche verschieben. Um sich hiervon zu überzeugen, wähle man zwei Erzeugende (L) und (L') des Hyperboloids (Γ), d. h. zwei Gerade, die auf (A_1), (A_2), (A_3) liegen, und ziehe durch m eine auf (L) und (L') liegende

Gerade (A). Da (A) auf allen Erzeugenden des Hyperboloids liegt, die zu derselben Schaar wie (L) und (L') gehören, so ist sie auf allen möglichen Geschwindigkeiten des Punktes m senkrecht; man sieht hieraus, dass der Punkt m sich nur auf einer Fläche verschieben kann, deren Normale im Punkte m die Gerade (A) ist.

Liegt aber der Punkt m nicht auf dem Hyperboloide (Γ), so kann er sich nach jeder Richtung v hin verschieben. Um dies zu beweisen, legen wir durch m eine zu v senkrechte Ebene P; dieselbe schneidet das Hyperboloid (Γ) in einer gewissen Linie zweiter Ordnung (S); eine beliebige in der Ebene P durch m gezogene Gerade (A) schneidet die Linie (S) in zwei Punkten, durch welche zwei Erzeugende (L) und (L') des Hyperboloids (Γ) gehen; diese kann man als Rotationsaxen des Systems möglicher Geschwindigkeiten wählen. Zieht man durch m zwei Gerade u und w, senkrecht zu den durch m und die Geraden (L) und (L') gehenden Ebenen, so erhält man die Richtungen der Geschwindigkeiten, welche der Punkt m bei den Rotationen um die Axen (L) und (L') hat. Die Geraden u und w liegen in derselben Ebene, wie die gegebene Richtung v; denn alle diese drei Geraden stehen auf (A) senkrecht. Nimmt man also auf der gegebenen Richtung v eine beliebige Strecke $\overline{v}$ als Geschwindigkeit des Punktes m an und zerlegt diese Geschwindigkeit in zwei andere nach den Richtungen u und w, so erhält man zwei Geschwindigkeiten, von denen eine $\overline{u}$ die Geschwindigkeit der Rotation um (L) und die andere $\overline{w}$ die der Rotation um (L') ist. Die Winkelgeschwindigkeiten dieser Bewegungen sind gleich den Verhältnissen der Geschwindigkeiten u und w zu den entsprechenden Abständen des Punktes m von den Axen (L) und (L').

Ein Beispiel eines unfreien unveränderlichen Systems, dessen Geschwindigkeiten drei Bedingungsgleichungen genügen, bietet ein System, in dem drei auf einander senkrechte Ebenen yOx, xOz, zOy ein festes Ellipsoid berühren. **Monge** hat gezeigt,*) dass der Scheitel O eines rechtwinkligen Dreikants, dessen Seitenflächen ein Ellipsoid berühren, sich auf einer

*) Application de l'Algèbre à la Géometrie, par M. M. **Monge** et

mit dem Ellipsoid concentrischen Kugel bewegt; folglich muss jener Punkt nach dem Obigen auf einem geradlinigen Hyperboloid (Γ) liegen, das zu Leitlinien die drei, in den Berührungspunkten der Seiten des Dreikants errichteten Normalen hat. Der vom Mittelpunkt des Ellipsoids nach dem Punkte O gezogene Radius ist die Normale der Kugelfläche, auf welcher der Punkt O liegen muss; folglich ist dieser Radius eine der Erzeugenden des Hyperboloids (Γ), d. h. eine Gerade, welche die drei Normalen schneidet.

4) Gesetzt, das System möglicher Geschwindigkeiten (k, ω) solle den vier Bedingungen genügen:

$$\overline{H_1 k} + \overline{K_1 \omega} = 0, \quad \overline{H_2 k} + \overline{K_2 \omega} = 0, \quad \overline{H_3 k} + \overline{K_3 \omega} = 0,$$
$$\overline{H_4 k} + \overline{K_4 \omega} = 0. \tag{32}$$

In diesem Falle kann man das Geschwindigkeitssystem durch Rotationen um zwei Stralen (L) und (L') hervorbringen, welche den vier Complexen

$$[K_1 H_1], \quad [K_2 H_2], \quad [K_3 H_3], \quad [K_4 H_4] \tag{33}$$

oder den durch Combination dieser Complexe zu je zweien entstehenden Congruenzen gemeinsam sind; wenn folglich (A_1) und (A_2) die Leitlinien der Congruenz $[K_1 H_1]$, $[K_2 H_2]$ und (A_3), (A_4) die der Congruenz $[K_3 H_3]$, $[K_4 H_4]$ sind, so sind die die vier Geraden (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) schneidenden Geraden (L) und (L') die gemeinsamen Stralen der vier Complexe (33); sie können daher für jedes System möglicher Geschwindigkeiten zu conjugirten Rotationsaxen gewählt werden. Jeder Punkt m, der nicht auf den Geraden (L) oder (L') liegt, kann sich auf einer gewissen Fläche bewegen. Eine durch diesen Punkt gehende und auf den Axen (L) und (L') liegende Gerade muss auf allen möglichen Geschwindigkeiten des Punktes m senkrecht stehen; sie ist daher die Normale der Trajectorienfläche dieses Punktes. Hieraus folgt zugleich, dass die Normalen der Trajectorienflächen der verschiedenen Systempunkte

---

Hachette, Paris 1813, p. 234. — Poisson: Sur les surfaces du second degré. Corr.de l'Éc. Pol., réd. p. Hachette, T. I, p. 240.

die beiden Geraden (L) und (L') schneiden und gemeinsame Stralen aller möglichen Complexe $[k, \omega]$ sind.

Die auf den Geraden (L) und (L') gelegenen Punkte können sich nur auf bestimmten Trajectorien bewegen; denn alle möglichen Geschwindigkeiten eines Punktes der Geraden (L) stehen als Rotationsgeschwindigkeiten um die Axe (L') allein auf dieser Axe senkrecht und fallen daher in dieselbe Gerade. Das nämliche gilt auch von jedem Punkt der Geraden (L').

Man kann die conjugirten Axen (L) und (L') als zwei Gerade construiren, die die vier Normalen N_1, N_2, N_3, N_4 der Trajectorienflächen von irgend vier Systempunkten schneiden.

Ist für die Gleichungen (32) die Bedingung $\overline{H_i K_i} = 0$ erfüllt, so sind K_i uud H_i die Argumente eines allen möglichen Complexen gemeinsamen Strales (A_i), der auch die Geraden (L) und (L') schneidet; folglich lassen sich die Geraden (L) und (L') definiren als zwei Gerade, welche die allen möglichen Complexen gemeinsamen vier Stralen (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) schneiden.*)

5) Nehmen wir endlich an, das System möglicher Geschwindigkeiten (k, ω) solle den fünf Bedingungen genügen:

$$\overline{H_1 k} + \overline{K_1 \omega} = 0,\ \overline{H_2 k} + \overline{K_2 \omega} = 0, \cdots \overline{H_5 k} + \overline{K_5 \omega} = 0. \quad (34)$$

Dann lässt sich das Geschwindigkeitssystem (k, ω) vollständig bestimmen, d. h. $\bar{k}$ und $\bar{\omega}$ haben bestimmte Richtungen und ein bestimmtes Verhältniss; folglich hat jeder Punkt seine bestimmte Trajectorie. Auch der Complex $[k, \omega]$ ist vollständig bestimmt. Alle seine Stralen lassen sich folgendermassen construiren.

Durch Combination der gegebenen Complexe

$$[K_1 H_1],\quad [K_2 H_2],\quad [K_3 H_3],\quad [K_4 H_4],\quad [K_5 H_5]$$

zu je vieren bestimme man die Paare der diesen Combinationen gemeinsamen Stralen und es seien diese Paare:

$$(L_1 L'_1),\quad (L_2 L'_2),\quad (L_3 L'_3),\quad (L_4 L'_4),\quad (L_5 L'_5). \quad (35)$$

---

*) Mannheim: Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales etc. Mém. présentés, T. 20, p. 1.

Zieht man nun aus einem beliebigen Punkte m die Geraden N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, welche resp. jene Geradenpaare (35) schneiden, so erhält man hiermit fünf Gerade, die auf der Geschwindigkeit des Punktes m senkrecht stehen; diese Geraden müssen daher in einer und derselben Ebene P liegen, welche die Normalebene der Trajectorie des Punktes m ist. Alle in dieser Ebene liegenden und durch m gehenden Geraden sind Stralen des Complexes $[k, \omega]$. In dieser Weise lassen sich alle Stralen dieses Complexes bestimmen, indem man die Lage des Punktes m ändert. Zur Construction der Ebene P genügen schon zwei Normalen N_r, N_s, d. h. zwei durch m gehende und die Paare $(L_r L'_r)$ und $(L_s L'_s)$ schneidende Gerade.

Wenn für alle fünf Gleichungen (34) die Bedingung $\overline{H_i K_i} = 0$ erfüllt ist, so sind H_i und K_i die Argumente eines Strales (A_i), der dem Complexe $[k, \omega]$ angehört. Mit Hilfe von fünf solchen Stralen $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4), (A_5)$ kann man die fünf Geradenpaare (35) erhalten, indem man jene Stralen zu je vieren combinirt und die Geraden bestimmt, welche jede Combination schneiden.*)

Mit Hilfe der Gleichungen (34) kann man leicht die Gleichung des Complexes $[k, \omega]$ finden. Bezeichnen A_i, B_i, C_i die Projectionen des Parameters H_i, und P_i, Q_i, R_i die des Parameters K_i auf die Coordinatenaxen, so ergeben sich die fünf linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + P_1 p + Q_1 q + R_1 r &= 0, \\ A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma + P_2 p + Q_2 q + R_2 r &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_5\alpha + B_5\beta + C_5\gamma + P_5 p + Q_5 q + R_5 r &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Die Gleichung des Complexes

$$[k, \omega] = \overline{k\lambda} + \overline{\omega\mu} = 0$$

lässt sich in der Form schreiben:

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma + Lp + Mq + Nr = 0, \tag{37}$$

worin X, Y, Z die Projectionen des Arguments λ und L

*) Die Eigenschaft, dass fünf durch denselben Punkt gehende Gerade, die fünf Paare conjugirter Geraden schneiden, in derselben Ebene liegen, hat Sylvestre gefunden, siehe Comptes rendus 1861, T. 52, p. 743.

M, N die des Arguments μ auf die Coordinatenaxen sind. Sollen die Gleichungen (36) und (37) gleichzeitig bestehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & L, & M, & N \\ A_1, & B_1, & C_1, & P_1, & Q_1, & R_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_5, & B_5, & C_5, & P_5, & Q_5, & R_5 \end{vmatrix}$$

gleich Null sei. Diese Bedingung lässt sich in der Form darstellen:

$$\frac{\partial D}{\partial X} X + \frac{\partial D}{\partial Y} Y + \frac{\partial D}{\partial Z} Z + \frac{\partial D}{\partial L} L + \frac{\partial D}{\partial M} M + \frac{\partial D}{\partial N} N = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung des Complexes $[k, \omega]$. Zugleich hat man die Proportionen

$$\alpha : \beta : \gamma : p : q : r = \frac{\partial D}{\partial X} : \frac{\partial D}{\partial Y} : \frac{\partial D}{\partial Z} : \frac{\partial D}{\partial L} : \frac{\partial D}{\partial M} : \frac{\partial D}{\partial N},$$

welche das System möglicher Geschwindigkeiten (k, ω) bestimmen.

Andere Einzelheiten über die möglichen Geschwindigkeiten eines unfreien, unveränderlichen Systems, sowie eine Anwendung der dargelegten Eigenschaften auf die Lösung von Aufgaben über Normalen an Flächen und Normalebenen an Linien findet man in der oben S. 388 citirten Abhandlung von Mannheim: Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable etc.

Durch Differentiation von Gleichungen von der Form (20) erhält man die Bedingungen, welchen die möglichen Beschleunigungen eines unfreien unveränderlichen Systems genügen müssen.

XVII. Capitel.

Relative Bewegung.

182. Wenn es eine Methode giebt, nach welcher man in jedem Zeitmomente die Lage eines Punktes m in Bezug auf ein unveränderliches System (A), z. B. in Bezug auf drei, dem Systeme (A) angehörige Coordinatenaxen, bestimmen kann, so kann man die Bewegung des Systems (A) ausser Acht lassen und die Ruhe oder Bewegung des Punktes m, der seine Lage gegen (A) beibehält oder ändert, als *absolut* betrachten.

Gesetzt, das System (A) sei fest; denken wir uns nun ein anderes unveränderliches System (B) und einen unver-

änderlich damit verbundenen Beobachter, der auf den Punkt m hinschaut. Hat (B) eine Bewegung bezüglich (A), so nimmt der Beobachter einen Ruhe- oder Bewegungszustand wahr, der von der absoluten Ruhe oder Bewegung verschieden ist. Diese scheinbare Ruhe oder Bewegung des Punktes m für den Beobachter in (B), der die eigene Bewegung nicht wahrnimmt, heisst *relative* Ruhe oder Bewegung.

Die unbeweglichen Sterne bilden ein unveränderliches System (A); die Erdkugel mit einem auf ihr befindlichen Beobachter repräsentirt ein in absoluter Bewegung begriffenes, unveränderliches System (B). Die tägliche Bewegung der Sterne in Verbindung mit ihren langsamen, von der Präcession und Nutation herrührenden Bewegungen machen die relative Bewegung der unbeweglichen Sterne aus.

Dasselbe gilt auch von der Bewegung der Sonne, der Planeten und der irdischen Gegenstände, deren Lage ein Beobachter auf drei, mit ihm unveränderlich verbundene Axen bezieht: auf die Verticale, die Mittagslinie und die auf diesen beiden senkrechte Gerade.

Der Punkt m bleibt in relativer Ruhe, wenn er seine Lage bezüglich des Systemes (B) nicht ändert, d. h. wenn er diesem Systeme angehört. Die absolute Bewegung jedes Punktes des Systems (B), d. h. jedes in relativer Ruhe befindlichen Punktes wollen wir die *Führungsbewegung* (mouvement d'entraînement) des Punktes m nennen.*)

183. *Die absolute Bewegung eines Punktes lässt sich als zusammengesetzt betrachten aus der relativen und der Führungsbewegung desselben.*

Fig. 75.

Es sei (Fig. 75) M die Lage des Punktes m zur Zeit t, MM' der vom Punkte m in der Zeit τ durchlaufene Weg und MM_1 die vom Punkte M bei der Führungsbewegung durchlaufene Strecke, d. h. der Weg bei derjenigen absoluten

*) Der Verfasser bedient sich einer Benennung, die sich durch „die (von dem Systeme auf den Punkt) *übertragene* Bewegung" wiedergeben liesse. Der Name *Führungsbewegung* rührt von Aronhold her, s. dessen „Grundzüge der kinem. Geom." in den Verh. d. Vereins zur Beförd. des Gewerbfl. in Preussen. Jahrg. 51. (1872) p. 130. Anm. d. Uebersetzers.

Bewegung, welche der Punkt m haben würde, wenn er sich in M befände und während der Zeit τ in relativer Ruhe verweilte.

Ein mit (B) unveränderlich verbundener Beobachter nimmt zur Zeit τ die Bewegung des Punktes m von M_1 nach M' wahr; dies ist die relative Bewegung. Man kann daher die absolute Bewegung MM' durch die Bewegung eines Punktes von M nach M_1 und von M_1 nach M' zusammen hervorbringen. Die letztere Bewegung kann man folgendermassen durch eine absolute ersetzen. Man denke sich die Punkte der scheinbaren Bahn M_1M' unveränderlich mit dem System (B) verbunden und dieses System aus der Lage zur Zeit $t+\tau$ in diejenige zurückgekehrt, welche es zur Zeit t einnahm. Dann nimmt der Punkt M' eine gewisse Lage M'' ein. Die Aenderung der Lage des Punktes M'' während der Zeit τ repräsentirt für einen mit (B) während der Zeit τ unbeweglich bleibenden Beobachter eine mit der relativen identische absolute Bewegung. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung bei der Bewegung des Punktes M'' heissen relativ.

184. Auf Grund des Satzes von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 7) können wir schliessen, dass *die Geschwindigkeit der absoluten Bewegung die geometrische Summe der Geschwindigkeiten der relativen und der Führungsbewegung ist.* Uebrigens kann man auf folgende Weise die allgemeinen Beziehungen ableiten, die zwischen den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen verschiedener Ordnungen bei diesen drei Bewegungen bestehen.

Es seien zur Zeit t: $u, u_1, u_2, \ldots$ die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen der absoluten, $v, v_1, v_2, \ldots$ die der relativen und $w, w_1, w_2, \ldots$ die der Führungsbewegung; ferner $\overline{c_a}, \overline{c_r}, \overline{c_e}$ die Sehnen der Wege MM', MM'', MM_1, welche bei jenen Bewegungen in der Zeit τ durchlaufen werden.

Wir zerlegen nun die Bewegung des Systems (B) in eine Translation, bei der alle Punkte die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen $w, w_1, w_2, \ldots$ haben und in eine Rotation um den Punkt M. Infolge der ersten Bewegung nimmt die mit dem Systeme (B) unveränderlich verbundene Sehne MM'' zur Zeit $t+\tau$ die Lage M_1M_1'' ein, infolge der zweiten die Lage MM''', so dass $\overline{M_1M_1''} = \overline{MM''}$ und $\overline{MM'''} = \overline{M_1M'}$ ist;

daher ist die Strecke $\overline{M_1''M'}$ geometrisch gleich der Sehne $\overline{M''M'''}$ des vom Punkte M'' bei der Rotation durchlaufenen Weges. Bezeichnet man diese Sehne mit γ, so ist:

$$\overline{c_a} = \overline{c_e} + \overline{c_r} + \overline{\gamma}. \qquad (1)$$

Die Formel (2) §. 30 giebt aber:

$$\begin{aligned} \overline{c_a} &= \overline{u\tau} + \overline{\tfrac{1}{2} u_1 \tau^2} + \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3} u_2 \tau^3} + \cdots, \\ \overline{c_e} &= \overline{w\tau} + \overline{\tfrac{1}{2} w_1 \tau^2} + \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3} w_2 \tau^3} + \cdots, \\ \overline{c_r} &= \overline{v\tau} + \overline{\tfrac{1}{2} v_1 \tau^2} + \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3} v_2 \tau^3} + \cdots, \\ \overline{\gamma} &= \overline{\tau D c_r} + \overline{\tfrac{1}{2} \tau^2 D^2 c_r} + \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3} \tau^3 D^3 c_r} + \cdots, \end{aligned} \qquad (2)$$

wo D, D^2, D^3, ... die geometrische Differentiation andeutet. Da sich die Länge der Sehne c_r bei der Rotation des Systems (B) um M nicht ändert, so kann man beim Differentiiren jener Sehne nach dem Zeichen D die Grössen τ, τ^2, ... als constante Factoren betrachten. Folglich wird:

$$\begin{aligned} \overline{Dc_r} &= \overline{\tau D v} + \overline{\tfrac{1}{2} \tau^2 D v_1} + \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3} \tau^3 D v_2} + \cdots, \\ \overline{D^2 c_r} &= \overline{\tau D^2 v} + \overline{\tfrac{1}{2} \tau^2 D^2 v_1} + \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3} \tau^3 D^2 v_2} + \cdots, \end{aligned} \qquad (3)$$

. . . .

Mit Hilfe der Formeln (2) und (3) geht nun Gleichung (1) über in:

$$\begin{aligned} &\overline{u\tau} + \overline{\tfrac{1}{2} u_1 \tau^2} + \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3} u_2 \tau^3} + \cdots \\ &= \overline{(\overline{w} + \overline{v})\tau} + \overline{\tfrac{1}{2} (\overline{w_1} + \overline{v_1} + \overline{2Dv})\tau^2} \\ &+ \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3} (\overline{w_2} + \overline{v_2} + \overline{3Dv_1} + \overline{3D^2 v})\tau^3} + \cdots \\ &+ \overline{\tfrac{1}{2\cdot 3 \cdots (n+1)} \left[\overline{w_n} + \overline{v_n} + \overline{(n+1)Dv_{n-1}} + \overline{\tfrac{(n+1)n}{1\cdot 2} D^2 v_{n-2}} + \cdots \right.} \\ &\qquad \overline{\left. + \overline{(n+1)D^n v}\right] \tau^{n+1}} + \cdots \end{aligned}$$

Diese geometrische Gleichung muss für jedes τ bestehen;

daher müssen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von τ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich sein; also ist:

$$\overline{u} = \overline{w} + \overline{v},$$

$$\overline{u_1} = \overline{w_1} + \overline{v_1} + \overline{2Dv},$$

und allgemein: (4)

$$\overline{u_n} = \overline{w_n} + \overline{v_n} + \overline{(n+1)Dv_{n-1}}$$

$$+ \overline{\frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} D^2 v_{n-2}} + \cdots + \overline{(n+1)D^n v}.$$

So kann man also mit Hilfe der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der relativen und der Führungsbewegung die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen der absoluten Bewegung bestimmen. Die Formel erlaubt zugleich, die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen der relativen Bewegung zu bestimmen, wenn die der absoluten und der Führungsbewegung bekannt sind; es ist nämlich:

$$\overline{v} = \overline{u} - \overline{w}, \quad (5)$$

$$\overline{v_1} = \overline{u_1} - \overline{w_1} - \overline{2Dv} \quad (6)$$

u. s. f.

Die Formel (5) zeigt, dass *die Geschwindigkeit der relativen Bewegung die geometrische Differenz der absoluten Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit der Führungsbewegung ist.*

Aus Formel (6) sieht man, dass *die relative Beschleunigung erster Ordnung gleich ist der geometrischen Differenz der Beschleunigungen derselben Ordnung bei der absoluten und der Führungsbewegung, vermindert um die doppelte geometrische Derivirte einer Strecke, die der relativen Geschwindigkeit geometrisch gleich ist und bei der Rotation des Systems (B) um den Punkt M in relativer Ruhe bleibt.* Setzt man $-\overline{2Dv} = \overline{R}$, so ist $\overline{R}$ eine gedachte Beschleunigung, die Coriolis die *zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung* genannt hat.*) Wir wollen sie die *Rückkehrbeschleunigung* nennen, da sie durch eine Umdrehung des Systems (*B*) um den Punkt *M* nach rückwärts erzeugt werden kann.

*) Die Bestimmungsweise der relativen Beschleunigung erster Ordnung rührt von Coriolis her. S. „Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps", Journ. de l'Éc. Pol. 24[me] cah. p. 142 und Traité de la Mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines.

Es sei MT die relative Geschwindigkeit $\bar{v}$ und $\bar{\omega}$ die Rotationswinkelgeschwindigkeit des Systems (B) um den Punkt M. Die geometrische Derivirte $\overline{Dv}$ ist die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes T um die Momentanaxe mit der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$; also ist $Dv = v\omega \sin(v\omega)$ und $R = 2v\omega \sin(v\omega)$, d. h. *die Rückkehrbeschleunigung ist gleich dem doppelten Producte aus der relativen Geschwindigkeit, der Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Systems (B) und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Die Richtung dieser Beschleunigung ist die einer im Punkt M auf der Ebene dieser beiden Geraden errichteten Senkrechten, in dem der Rotation des Systems (B) entgegengesetzten Sinne genommen.*

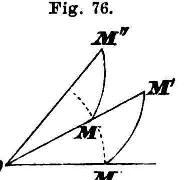
Die Rückkehrbeschleunigung ist in folgenden Fällen gleich Null: 1) wenn die relative Geschwindigkeit gleich Null ist, 2) wenn die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Systems (B) gleich Null ist und 3) wenn die relative Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Systems (B) in dieselbe Gerade fallen. Hat das System (B) nur eine Translationsbewegung, so ist die Rückkehrbeschleunigung zu jeder Zeit t gleich Null.

Beispiele.

1) Die absolute Bewegung des Punktes m sei eine geradlinige längs OM; das System (B) rotire um eine feste durch O gehende und zu OM senkrechte Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ (Fig. 76).

Im Verlaufe der auf t folgenden Zeit τ durchläuft der Punkt m bei der absoluten Bewegung auf der Geraden OM einen Weg MM' und bei der Führungsbewegung auf der Peripherie eines um O als Mittelpunkt mit dem Radius OM in der zur Rotationsaxe senkrechten Ebene beschriebenen Kreises einen Bogen MM_1; ein mit dem System (B) unveränderlich verbundener Beobachter nimmt

Fig. 76.



die Bewegung von M_1 nach M' auf einer gewissen Trajectorie M_1M' wahr. Dreht man nun das System (B) in die Lage, die es zur Zeit t eingenommen hatte, zurück, so gelangt der Bogen M_1M' in die Lage MM''. Bezeichnet r den Abstand

OM, so hat man $u = \frac{dr}{dt}$ für die absolute und $w = \omega r$ für die Führungsgeschwindigkeit; folglich setzt sich die relative Geschwindigkeit zusammen aus $\frac{dr}{dt}$ in der Richtung von r und aus ωr, das senkrecht zu r und dem Sinne der Rotation des Systems (B) entgegengesetzt gerichtet ist. Die absolute Beschleunigung erster Ordnung ist $\frac{d^2 r}{dt^2}$ und hat die Richtung von r; die Führungsbeschleunigung ist aus $\omega^2 r$, von entgegengesetztem Sinne wie r, und $r \frac{d\omega}{dt}$, das senkrecht zu r im Sinne der Rotation gerichtet ist, zusammengesetzt; die Rückkehrbeschleunigung endlich ist $R = 2v\omega$ und hat die Richtung der Normale der relativen Trajectorie MM''; ihr Sinn ist dem Drehungssinne des Endpunktes der Geschwindigkeit v bei der Rotation von (B) entgegengesetzt. Die Projection der relativen Beschleunigung v_1 auf r ist:

$$v_1 \cos(v_1 r) = \frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r$$

und ihre Projection auf eine zu r senkrechte Linie:

$$v_1 \sin(v_1 r) = r \frac{d\omega}{dt} + 2v\omega \cos(vr) = r \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\omega)}{dt} \,.$$

Bezeichnet man mit φ den Winkel, welchen der von O nach dem auf MM'' sich bewegenden Punkte m gezogene Radiusvector mit einer festen Axe Ox bildet, so hat man $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, und die obigen Formeln stimmen mit denen in §. 22 überein. Die Projection der Beschleunigung v_1 auf die Normale der relativen Trajectorie MM'' ist:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \pm \frac{1}{v} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} \omega r - \omega^3 r^2 - r \frac{d\omega}{dt} \frac{dr}{dt} - 2\omega \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right];$$

hieraus ergiebt sich der folgende Ausdruck für den Krümmungsradius der Trajectorie der relativen Bewegung:

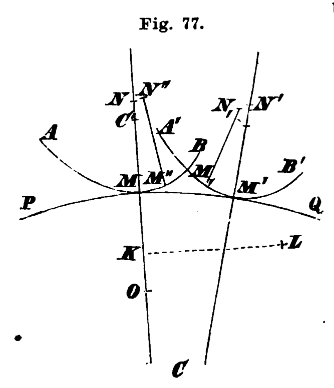
$$\varrho = \pm \frac{v^3}{\frac{d^2 r}{dt^2} r\omega - \omega^3 r^2 - r \frac{dr}{dt} \frac{d\omega}{dt} - 2\omega \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \,.$$

In dem speciellen Falle, wenn die absolute und die Führungsbewegung gleichförmig sind, ist die Trajectorie MM'' der re-

lativen Bewegung eine Archimedische Spirale. Die vorstehende Formel kann dann zur Construction des Krümmungsradius dieser Curve dienen.

2) Die ebene Curve PQ (Fig. 77) sei die Enveloppe der verschiedenen Lagen einer in ihrer Ebene sich bewegenden unveränderlichen Curve AMB. Diese letztere gelange zur Zeit τ in die Lage $A'M'B'$; der Punkt M, in dem sich die Curven zur Zeit t berührten, gelange dabei nach M_1; der Berührungspunkt der beiden Curven zur Zeit $t + \tau$ sei M'. Die Bewegung des Berührungspunktes aus der Lage M nach M' kann man als die absolute, seine Bewegung von M nach M_1 als die Führungsbewegung und die von M_1 nach M' als die relative Bewegung ansehen. Wenn $A'M'B'$ an seinen früheren Ort zurückkehrt, so gelangt M_1 nach M und M' nach M''; die Bewegung des Punktes M'' auf der als fest gedachten Curve AMB ist die in eine absolute verwandelte relative Bewegung. Suchen wir nun die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten dieser drei Bewegungen.

Fig. 77.



Die absolute Geschwindigkeit $\overline{u}$ und die relative $\overline{v}$ sind längs der gemeinsamen Tangente der beiden Curven PQ und AB im Punkte M gerichtet. Da die Führungsgeschwindigkeit $\overline{w}$ gleich der geometrischen Differenz $\overline{u} - \overline{v}$ ist, so muss auch sie die Richtung derselben Tangente haben; dabei ist:

$$u = v + w. \tag{a}$$

Es sei nun MN eine der Einheit gleiche Strecke auf der Normalen der Curve PQ im Punkt M; $M'N'$ eine ebensolche Strecke auf der Normalen derselben Curve im Punkte M'; M_1N_1 die Lage der Strecke MN zur Zeit $t + \tau$ und $M''N''$ die Lage, welche $M'N'$ einnimmt, wenn $A'M'B'$ in die Lage AMB zurückkehrt. Es ist dann NN' die absolute Bewegung des Punktes N, NN_1 seine Führungsbewegung und NN'' seine relative Bewegung. Die Richtungen der Geschwindigkeiten

dieser drei Bewegungen fallen sämmtlich in eine und dieselbe zu MN senkrechte Gerade.

Um diese Geschwindigkeiten zu bestimmen, wollen wir mit ω die Winkelgeschwindigkeit bei der Bewegung der unveränderlichen Curve AMB bezeichnen, mit ϱ den Krümmungsradius der Curve PQ im Punkte M und mit ϱ' den der Curve AMB in demselben Punkte. Man kann dann die absolute Bewegung der Geraden MN als zusammengesetzt betrachten aus einer Translation mit der gemeinsamen Verschiebung MM' und aus einer Rotation um den Punkt M; daher ist die absolute Geschwindigkeit des Punktes N gleich der Geschwindigkeit u vermehrt um die Rotationsgeschwindigkeit um die durch M gehende Momentanaxe mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{u}{\varrho}$, d. h. jene Geschwindigkeit ist gleich $u + \frac{u}{\varrho}$. Ebenso findet man, dass $v - \frac{v}{\varrho'}$ die Geschwindigkeit der relativen Bewegung des Punktes N ist und $w + \omega$ die Geschwindigkeit der Führungsbewegung. Da die erste die Summe der beiden anderen ist, so ist

$$u + \frac{u}{\varrho} = v - \frac{v}{\varrho'} + w + \omega.$$

Subtrahirt man hiervon Gleichung (a), so folgt:

$$\frac{u}{\varrho} = \omega - \frac{v}{\varrho'}. \tag{b}$$

Das Rotationscentrum O der Bewegung der Figur AMB muss auf der in M auf der Geschwindigkeit w errichteten Senkrechten liegen, d. h. auf der gemeinsamen Normale der Curven AB und PQ in diesem Punkte. Setzt man $OM = r$, so erhält man aus Gleichung (a):

$$u = v + \omega r. \tag{c}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (b) und (c) lassen sich die Geschwindigkeiten u und v bestimmen, wenn die Führungsbewegung der Figur AMB bekannt ist; man erhält nämlich:

$$u = \frac{\omega\varrho(r + \varrho')}{\varrho + \varrho'} \quad \text{und} \quad v = \frac{\omega\varrho'(\varrho - r)}{\varrho + \varrho'}. \tag{d}$$

Kennt man die Führungsbewegung der Figur AMB, so kann man den Krümmungsradius ϱ der Enveloppe PQ aus Formel (b) bestimmen.

Die Führungsbeschleunigung w_1 ist gleich der Beschleunigung $\omega^2 r$*), die die Richtung MO hat, vermehrt um die Beschleunigung des Rotationscentrums O. Ist L der geometrische Mittelpunkt der Beschleunigungen erster Ordnung, K seine Projection auf MO, so ist, wenn man $OK = k$ setzt, $\omega^2 k$ die Projection der Beschleunigung des Punktes O auf OM (§. 164); folglich ist die Projection von w_1 auf MO gleich $\omega^2 r - \omega^2 k$. Die Rückkehrbeschleunigung $-\overline{2Dv}$ ist gleich $2\omega v$ und hat die Richtung von ϱ'. Die Projection der absoluten Beschleunigung u_1 auf ϱ' endlich ist gleich $-\frac{u^2}{\varrho}$; folglich ist nach Formel (b):

$$\frac{v^2}{\varrho'} = -\frac{u^2}{\varrho} + \omega^2 r - \omega^2 k + 2\omega v.$$

Setzt man in diese Gleichung für u und v ihre Werthe aus (c) und (d) ein und löst für k auf, so folgt:

$$k = \frac{(\varrho - r)(\varrho' + r)}{\varrho + \varrho'} \tag{e}$$

oder

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\varrho - r} + \frac{1}{\varrho' + r}. \tag{f}$$

Hier muss $-\varrho'$ für ϱ' gesetzt werden, wenn die Curven AMB und PMQ nach derselben Seite concav sind. Die Formel (e) oder (f) gestattet ϱ zu berechnen, wenn r, ϱ' und k gegeben sind. Aus ihr ergiebt sich auch eine einfache Construction für ϱ; man kann sie nämlich schreiben:

$$(\varrho' + r)^2 = (\varrho' + r - k)(\varrho + \varrho').$$

Wenn man also mit C und C' die Krümmungscentra der Curven PQ und AB für den Punkt M bezeichnet, so ist:

$$C'O^2 = C'K \cdot C'C.$$

Dies bedeutet aber, dass der Krümmungsmittelpunkt C der Pol der Polaren LK ist in Bezug auf einen Kreis, dessen Mittelpunkt in C' und dessen Radius $C'O$ ist. Daher ist nach §. 164 der Punkt C der Krümmungsmittelpunkt der Trajectorie, welche der Punkt C' bei der Bewegung der unveränderlichen

*) Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Winkelgeschwindigkeit ω constant und also die Tangentialbeschleunigung $r\frac{d\omega}{dt} = 0$ ist.

Curve AMB beschreibt, d. h. *der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe ist der Krümmungsmittelpunkt der Trajectorie, welche der Krümmungsmittelpunkt der umhüllten Curve bei ihrer Bewegung beschreibt.*

Bezeichnet ϑ den Winkel LOM, so ist nach Formel (f):

$$\frac{1}{LO} = \left(\frac{1}{\varrho - r} + \frac{1}{\varrho' + r}\right) \cos \vartheta. \tag{g}$$

Die Geschwindigkeit $\bar{w}$ der Führungsbewegung des Punktes M ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Curve AMB an PQ hingleitet. Ist dieselbe gleich Null, so rollt AMB auf PQ; dann ist $r = 0$, d. h. das Rotationscentrum O fällt in den Punkt M.

Wendet man die Formel (g) auf die Curven an, welche das Momentancentrum O in der Ebene der Figur AMB und in der Ebene der Figur PMQ beschreibt und bezeichnet man die Krümmungsradien dieser Curven mit R und R', so ergiebt sich wegen

$$\frac{1}{AO} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

die folgende Beziehung:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{\varrho - r} + \frac{1}{\varrho' + r}\right) \cos \vartheta.$$

Diese Formel ist von Savary. Verschiedene Anwendungen derselben zur Construction der Krümmungsradien ebener Curven findet man in der Abhandlung von Mannheim: Construction des centres de courbures des lignes, décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan (Journal de l'École polytechnique 37[me] cahier), sowie auch in den verschiedenen Lehrbüchern der Kinematik.

3) Eine unveränderliche Fläche (S') bewege sich so, dass sie fortwährend eine andere Fläche (S) berührt; M sei der Berührungspunkt zur Zeit t, M' zur Zeit $t + \tau$ und M_1 die Lage, in welche der Punkt M zur Zeit $t + \tau$ gelangt, wenn er mit (S') unveränderlich verbunden gedacht wird. Ebenso wie im vorhergehenden Beispiele kann man auch hier die Bewegung des Berührungspunktes von M nach M' als die absolute, die von M nach M_1 als die Führungsbewegung und die von M_1 nach M' als die relative Bewegung betrachten.

Die letztere lässt sich dadurch in eine absolute (von M-nach M'') verwandeln, dass man die Fläche (S') in die Lage zurückführt, welche sie zur Zeit t inne hatte.

Bei unendlich kleinem τ ist der Winkel zwischen den Sehnen $M'M$ und $M'M_1$ eine unendlich kleine Grösse; denn sonst hätte die Rotation um den Punkt M eine unendlich grosse Winkelgeschwindigkeit, was unmöglich ist. Ist also MM_1 von derselben Ordnung wie MM', so bildet die Sehne MM_1 einen unendlich kleinen Winkel mit MM'; folglich fallen die Geschwindigkeiten der drei Bewegungen MM', MM_1 und MM'' in eine und dieselbe Gerade und es ist $u = w + v$. Ist aber MM_1 unendlich klein von höherer Ordnung als MM', so ist $w = 0$ und $u = v$; in diesem Falle rollt die Fläche (S') auf (S). Jedesmal wenn MM_1 von erster Ordnung bezüglich τ ist, gleitet die Fläche (S') auf (S) im Punkte M mit der Geschwindigkeit w. Ist aber MM' unendlich klein von höherer Ordnung oder gleich Null, so ist $u = 0$ und $v = -w$. In diesem Falle reibt die Fläche (S') die Fläche (S) in einem einzigen Punkte M mit der Geschwindigkeit $\overline{w}$.

Es sei Mx die Richtung der Geschwindigkeit $\bar{u}$, My eine dazu senkrechte Richtung in der Tangentenebene der Flächen (S) und (S') im Punkte M und Mz die gemeinsame Normale der beiden Flächen. Die drei Axen Mx, My, Mz bilden ein unveränderliches System, das infolge der absoluten Bewegung des Punktes M zur Zeit $t + \tau$ die Lage $M'x'$, $M'y'$, $M'z'$ annimmt; durch die Systembewegung kommt es in die Lage M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1, durch die relative in die Lage $M''x''$, $M''y''$, $M''z''$. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes N dieses Systems bei einer dieser Bewegungen ist gleich der geometrischen Summe aus der Geschwindigkeit des Punktes M und der Rotationsgeschwindigkeit um diesen Punkt. Wenn man also die Rotationsgeschwindigkeiten des Punktes N bei der absoluten, relativen und Führungsbewegung resp. mit U, V, W bezeichnet, so hat man: $\overline{u} + \overline{U}$ für die totale Geschwindigkeit des Punktes N bei der absoluten Bewegung, $\overline{v} + \overline{V}$ für die bei der relativen und $\overline{w} + \overline{W}$ für die bei der Führungsbewegung. Da aber $\overline{u} + \overline{U} = \overline{w} + \overline{W} + \overline{v} + \overline{V}$, und $\overline{u} = \overline{w} + \overline{v}$, so ist $\overline{U} = \overline{W} + \overline{V}$. Man sieht hieraus, dass

die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Systems (Mx, My, Mz) um den Punkt M bei der absoluten Bewegung die geometrische Summe der Winkelgeschwindigkeiten der Rotationen bei der relativen und der Führungsbewegung ist; so dass, wenn jene drei Winkelgeschwindigkeiten resp. mit $\overline{\omega'}$, $\overline{\omega''}$, $\overline{\omega}$ bezeichnet werden, man schreiben kann: $\overline{\omega'} = \overline{\omega} + \overline{\omega''}$.

Kennt man die Hauptkrümmungen der Flächen (S) und (S') im Punkte M, die ersten Krümmungen der Trajectorien MM' und MM'' und die Geschwindigkeiten u und v, so kann man die Winkelgeschwindigkeiten ω' und ω'' bestimmen und aus ihnen wiederum die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$.

Es seien C_1 und C_2 die Hauptkrümmungen der Fläche (S) im Punkte M, mit $+$ oder mit $-$ genommen, je nachdem die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte auf Mz oder in der entgegengesetzten Richtung liegen; C_1' und C_2' die Hauptkrümmungen der Fläche (S'); φ und φ' die Winkel zwischen Ox und den Richtungen der Tangenten derjenigen Hauptnormalschnitte, welchen die Krümmungen C_1 und C_1' zukommen; c und c' die Krümmungen der Schnittcurven der Flächen (S) und (S') mit der Ebene xMz; ϑ der Winkel, welchen die Schmiegungsebene der Curve MM' mit der Ebene xMz bildet; ϑ' der von der Schmiegungsebene der Curve MM'' mit der Ebene xMz gebildete Winkel; endlich p', q', r' die Projectionen der Winkelgeschwindigkeit ω' auf die Axen Mx, My, Mz, und p'', q'', r'' die der Winkelgeschwindigkeit ω'' auf dieselben Axen.

Man sieht leicht, dass

$$q' = -cu, \quad r' = cu \tan\vartheta, \quad q'' = -c'v, \quad r'' = c'v \tan\vartheta'$$

ist, wo c und c' die folgenden Bedeutungen haben:

$$c = C_1 \cos^2\varphi + C_2 \sin^2\varphi, \quad c' = C_1' \cos^2\varphi + C_2' \sin^2\varphi$$

(§. 91). Die Grösse $c \tan\vartheta$ ist die geodätische Krümmung der Curve MM', $c' \tan\vartheta'$ die der Curve MM''. Es bleibt noch übrig p' und p'' zu bestimmen. Bezeichnet man mit γ die Winkelderivirte der Geraden Mz beim Uebergange derselben in $M'z'$, so ist: $p' = -\gamma \cos(\gamma y)$ und $\gamma \cos(\gamma z) = q'$; folglich wird:

$$p' = -q' \tan(\gamma x) = cu \tan(\gamma x). \tag{1}$$

γ ist senkrecht zu der Tangente der Indicatrix im Schnittpunkte dieser Curve mit der Axe Mx (s. §. 94); der Winkel (γx) ist daher das Complement des Winkels, den die Richtung Mx mit dem zu Mx conjugirten Durchmesser der Indicatrix, d. h. mit der zu Mx conjugirten Tangente der Fläche (S) bildet. Bezeichnet man den Winkel jener beiden conjugirten Tangenten mit ψ, so findet man, dass

$$\tan(\gamma x) = \cot\psi = \frac{1}{c}(C_2 - C_1)\sin\varphi\cos\varphi;$$

folglich wird nach Formel (1):

$$p' = u(C_2 - C_1)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Ebenso erhält man:

$$p'' = v(C_2' - C_1')\sin\varphi'\cos\varphi'.$$

Hiermit findet man die Differenzen

$$p = p' - p'', \quad q = q' - q'', \quad r = r' - r'',$$

welche die Projectionen (auf die Axen Mx, My, Mz) der Winkelgeschwindigkeit der Rotation $\overline{\omega}$ bei der Führungsbewegung sind. Ausführlichere Untersuchungen über die Bewegung einer Fläche auf einer anderen findet man in der Kinematik von Resal.

185. Wir kehren nun zu den allgemeinen Formeln (5) und (6) S. 394 für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung erster Ordnung bei der relativen Bewegung zurück und wollen die Projectionen dieser Grössen auf drei Axen Ox, Oy, Oz bestimmen, welche unveränderlich mit dem Systeme (B) verbunden sind, d. h. in relativer Ruhe verharren.

Bedeuten x, y, z die Coordinaten des Punktes M bezüglich dieser Axen, so hat man:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u\cos(ux) - w\cos(wx),\\ \frac{dy}{dt} &= u\cos(uy) - w\cos(wy),\\ \frac{dz}{dt} &= u\cos(uz) - w\cos(wz)\end{aligned}\tag{7}$$

für die Projectionen der relativen Geschwindigkeit auf die Coordinatenaxen und

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= u_1 \cos(u_1 x) - w_1 \cos(w_1 x) + R \cos(Rx), \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= u_1 \cos(u_1 y) - w_1 \cos(w_1 y) + R \cos(Ry), \qquad (8) \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= u_1 \cos(u_1 z) - w_1 \cos(w_1 z) + R \cos(Rz)
\end{aligned}$$

für die Projectionen der relativen Beschleunigung erster Ordnung. Es seien p, q, r die Projectionen der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ der Rotation des Systems (B) auf die Axen Ox, Oy, Oz. Nach den Euler'schen Formeln hat man dann

$$q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt}, \quad r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt}, \quad p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt}$$

für die Projectionen der geometrischen Derivirten Dv auf die Coordinatenaxen. Da aber $\overline{R} = -\overline{2Dv}$ ist, so wird:

$$\begin{aligned}
R \cos(Rx) &= -2\left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt}\right), \\
R \cos(Ry) &= -2\left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt}\right), \qquad (9) \\
R \cos(Rz) &= -2\left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Die Projection der Rückkehrbeschleunigung R auf eine beliebige Richtung l ist durch die Formel ausgedrückt:

$$R \cos(Rl) = 2 \begin{vmatrix} \cos(lx), & \cos(ly), & \cos(lz) \\ \frac{dx}{dt}, & \frac{dy}{dt}, & \frac{dz}{dt} \\ p, & q, & r \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

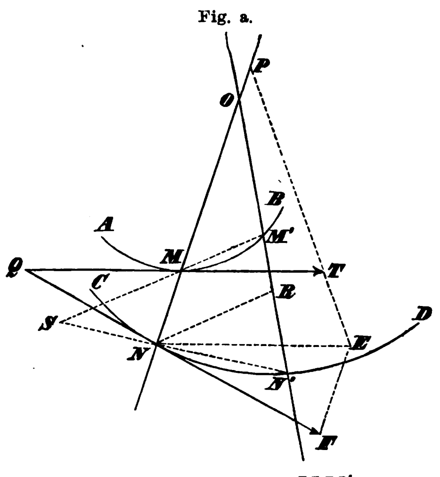
In der Kinematik von Resal und in der Abhandlung des Verfassers: Ueber die Beschleunigungen verschiedener Ordnungen bei der relativen Bewegung (Mem. der Kais. St. Petersburger Akademie der Wissenschaften, B. IX) ist gezeigt, aus welchen Componenten die relative Beschleunigung zweiter Ordnung zusammengesetzt ist. In der Dynamik werden wir andere Anwendungen der dargelegten Methoden zur Bestimmung der relativen Bewegung geben. Auf diesen dritten Theil der „Theoretischen Mechanik" verschieben wir auch einige andere kinematische Probleme, deren Lösung sich einfacher gestaltet, wenn die Ursachen der Bewegung gleichzeitig mit in Betracht gezogen werden.

Zusätze und Berichtigungen des Verfassers.

Zu Seite 6 und folg., Beispiel 2) *und* 3). Die unter 2) behandelte Aufgabe ist als Specialfall in der folgenden allgemeineren Betrachtung enthalten.

Es seien AB und CD (Fig. a) die Trajectorien zweier Punkte M und N, die sich so bewegen, dass die Gerade MN eine abwickelbare Fläche beschreibt. Das Verhältniss der Geschwindigkeiten v und w dieser Punkte zur Zeit t lässt sich auf folgende Weise bestimmen.

Fig. a.



Wenn nach Verlauf der unendlich kleinen Zeit τ der Punkt M nach M' und der Punkt N nach N' gelangt, so hat man

$$v = \lim \frac{MM'}{\tau}, \quad w = \lim \frac{NN'}{\tau},$$

woraus folgt:

$$\frac{w}{v} = \lim \frac{NN'}{MM'}.$$

Da aber die Gerade MN eine abwickelbare Fläche beschreiben soll, so müssen ihre beiden Lagen MN und $M'N'$ in einer Ebene liegen und sich daher in einem Punkte O schneiden. Ist ferner S der Schnittpunkt der Sehnen MM' und NN' und zieht man NR parallel MM' bis zum Schnitte mit ON', so hat man die Proportionen

$$\frac{NN'}{NR} = \frac{SN'}{SM'}, \quad \frac{NR}{MM'} = \frac{NO}{MO},$$

aus welchen folgt:

$$\frac{NN'}{MM'} = \frac{SN'}{SM'} \cdot \frac{NO}{MO}.$$

Geht man zur Grenze für unendlich abnehmendes τ über, so ergiebt sich, wenn Q den Schnittpunkt der Tangenten der Curven AB und CD in den Punkten M und N, P den Berührungspunkt der Geraden MN mit der Gratlinie der von MN beschriebenen abwickelbaren Fläche bedeuten, die Relation:

$$\frac{w}{v} = \frac{QN}{QM} \cdot \frac{NP}{MP}. \tag{a}$$

Die Geschwindigkeiten v und w haben die Richtungen der Tangenten QM und QN; ist eine der Geschwindigkeiten gegeben, so kann man die andere construiren. Hierzu trägt man $MT = v$ auf der Tangente QM auf, verbindet P mit T und zieht durch N eine Parallele zu MT, welche die PT im Punkte E schneiden mag. Zieht man nun durch E eine Parallele zu PN, so schneidet diese die Tangente QN in einem Punkte F so, dass $NF = w$ wird. Aus der Construction ergiebt sich nämlich

$$\frac{NF}{NE} = \frac{QN}{QM}, \quad \frac{NE}{MT} = \frac{NP}{MP},$$

woraus folgt:

$$\frac{NF}{MT} = \frac{QN}{QM} \cdot \frac{NP}{MP}.$$

Nach Formel (a) ist daher

$$\frac{NF}{MT} = \frac{w}{v},$$

woraus sich wegen $MT = v$ ergiebt:

$$NF = w.$$

Infolge der aus dem Dreieck QMN sich ergebenden Proportion

$$\frac{QN}{QM} = \frac{\sin QMN}{\sin QNM}$$

geht die Formel (a) über in:

$$\frac{w}{v} = \frac{\sin QMN}{\sin QNM} \cdot \frac{NP}{MP}. \tag{b}$$

Sind die Tangenten QM und QN parallel, d. h. liegt der Punkt Q im Unendlichen, so ist $\sin QMN = \sin QNM$, so dass die Formel (b) übergeht in:

$$\frac{w}{v} = \frac{NP}{MP}; \tag{c}$$

die Punkte E und F fallen dann zusammen.

Liegt dagegen P im Unendlichen, so dass das Verhältniss

$$\frac{NP}{MP} = \frac{NM}{MP} + 1$$

zu 1 wird, so gehen die Formeln (a) und (b) über in:

$$\frac{w}{v} = \frac{NQ}{MQ}, \quad \frac{w}{v} = \frac{\sin QMN}{\sin QNM}. \tag{d}$$

Gesetzt z. B., der Punkt M (Fig. b), der von einem festen Punkt P beleuchtet wird, bewege sich auf einer Geraden AB; N sei der Schatten des Punktes M auf einer Ebene, die sich mit der Ebene PAB in der Geraden AC schneidet. Es handelt sich darum, das Verhältniss der Geschwindigkeiten der Punkte M und N zu bestimmen.

Fig. b.

P B M C A N

Nach Formel (a) ist:

$$\frac{w}{v} = \frac{AN}{AM} \cdot \frac{PN}{PM}. \tag{e}$$

Zieht man nun PB und PC resp. parallel AN und AM und setzt $PC = a$, $PB = b$, so sieht man leicht, dass

$$\frac{AN}{AM} = \frac{b}{MB} \text{ und } \frac{PN}{PM} = \frac{a}{MB},$$

woraus folgt:

$$\frac{w}{v} = \frac{ab}{MB^2}.$$

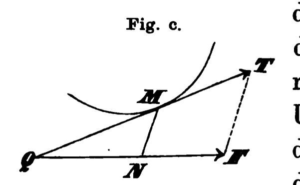
Ist die Bewegung des Punktes M von A nach B eine gleichförmige, so ist die Geschwindigkeit v constant, während die Geschwindigkeit des Punktes N

$$w = \frac{abv}{MB^2}$$

umgekehrt proportional mit dem Quadrate des Abstandes des Punktes M von B wächst; wird dieser Abstand unendlich klein, so ist die Geschwindigkeit w unendlich gross.

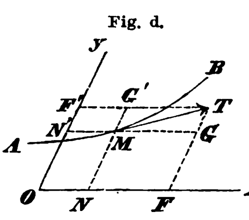
Ist der Punkt N (Fig. c) die recht- oder schiefwinklige Projection des Punktes M auf eine Ebene (Π), so dass also die Gerade MN einer gegebenen Geraden, der Projectionsrichtung, beständig parallel bleibt, so liegt der Punkt P im Unendlichen, und es gelten daher für das Verhältniss der Geschwindigkeiten die Formeln (d). Man überzeugt sich sich leicht, dass in diesem Falle die Geschwindigkeit w die Projection der Geschwindigkeit v auf die Ebene (Π) ist, d. h. *die Geschwindigkeit der Projectionen eines sich bewegenden Punktes ist gleich der Projection der Geschwindigkeit des Punktes.*

Fig. c.



Gesetzt, die Trajectorie des Punktes M sei eine ebene Curve AB (Fig. d), die auf zwei Axen Ox und Oy bezogen werden möge; $MT = v$ stelle die Geschwindigkeit des Punktes M dar. Sind nun N und N' die Projectionen des Punktes M auf diese Axen, so sind deren Geschwindigkeiten nach dem Obigen gleich den Projectionen NF und $N'F'$ der Geschwindigkeit MT des Punktes M. Es ist also umgekehrt MT die Diagonale eines Parallelogramms $MGTG'$, dessen Seiten MG und MG' resp. geometrisch gleich NF und $N'F'$ sind. Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes M mit x und y, so ist:

Fig. d.



$$NF = \pm \frac{dx}{dt}, \quad N'F' = \pm \frac{dy}{dt};$$

folglich erhält man die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ des Punktes M als Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten gleich $\pm \frac{dx}{dt}$ und $\pm \frac{dy}{dt}$ von M aus parallel den Coordinatenaxen aufzutragen sind. Für rechtwinklige Axen hat man:

$$\frac{dx}{dt} = v \cos(vx), \quad \frac{dy}{dt} = v \cos(vy),$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Für die Bewegung zweier Punkte M und N (Fig. e) auf

grössten Kreisen einer Kugelfläche lässt sich ein der Formel (e) analoger Ausdruck ableiten. Der Kugelradius sei gleich 1 angenommen und einer der Schnittpunkte der beiden grössten Kreise heisse A. Gelangen nun die Punkte M und N in der Zeit τ nach M' und N' und schneiden sich die beiden grössten Kreise MN und $M'N'$ im Punkte O, so hat man:

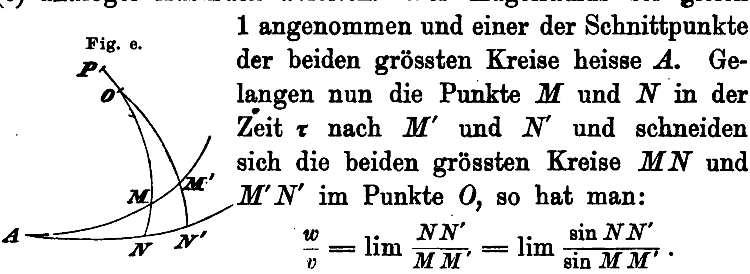


Fig. e.

$$\frac{w}{v} = \lim \frac{NN'}{MM'} = \lim \frac{\sin NN'}{\sin MM'}.$$

Es ist aber:

$$\frac{\sin NN'}{\sin O} = \frac{\sin ON}{\sin N'}, \quad \frac{\sin MM'}{\sin O} = \frac{\sin OM}{\sin M'};$$

folglich wird:

$$\frac{\sin NN'}{\sin MM'} = \frac{\sin M'}{\sin N'} \cdot \frac{\sin ON}{\sin OM}.$$

Ist nun P die Grenzlage des Punktes O für unendlich kleines τ, so hat man:

$$\frac{w}{v} = \frac{\sin M}{\sin N} \cdot \frac{\sin PN}{\sin PM}. \tag{f}$$

Im Dreieck AMN ist

$$\frac{\sin M}{\sin N} = \frac{\sin AN}{\sin AM},$$

folglich:

$$\frac{w}{v} = \frac{\sin AN}{\sin AM} \cdot \frac{\sin PN}{\sin PM}. \tag{g}$$

Gesetzt, der Kreis AN sei der Aequator und P ein Pol der Erdkugel. Dann wird $\measuredangle N = 90^0$ und arc $PN = 90^0$, so dass die Formel (f) übergeht in

$$\frac{w}{v} = \frac{\sin M}{\sin PM}.$$

Der Bogen NM ist die geographische Breite, AN die geographische Länge des Punktes M; setzt man $NM = \beta$, so ist $\sin PM = \cos\beta$, und da im Dreieck AMN

$$\sin M = \frac{\cos A}{\cos\beta}$$

ist, so wird:

$$\frac{w}{v} = \frac{\cos A}{\cos^2\beta}, \quad v = \frac{w\cos^2\beta}{\cos A}.$$

Bewegt sich nun der Punkt N auf dem Aequator gleichförmig, so ist w constant; die Geschwindigkeit v des Punktes M ist daher in diesem Falle proportional dem Quadrate des Cosinus der geographischen Breite oder dem Quadrate des Radius des Parallelkreises, auf dem der Punkt sich befindet.

Gehen zwei Punkte M' und M'' (Fig. f) zu derselben Zeit t von einem Punkte M aus und gelangen zur Zeit $t + \tau$ auf verschiedenen Trajectorien nach M' und M'', so ist das Verhältniss der Geschwindigkeiten v und w, mit denen sie von M ausgingen, gleich dem umgekehrten Verhältnisse der Sinus derjenigen Winkel, welche diese Geschwindigkeiten mit der Geraden MP bilden, wenn dies die Grenzlage ist, der sich die Verbindungslinie $M'M''$ bei unendlich abnehmendem τ nähert.

Fig. f.

Es ist nämlich

$$\frac{w}{v} = \lim \frac{MM''}{MM'} = \lim \frac{\sin MM'M''}{\sin MM''M'}.$$

Zieht man nun in M die Tangenten MT und MT' der Trajectorien der Punkte M' und M'', so ist ferner:

$$\lim \sin MM'M'' = \sin TMP, \qquad \lim \sin MM''M' = \sin T'MP,$$

folglich:

$$\frac{w}{v} = \frac{\sin TMP}{\sin T'MP}.$$

Macht man also $MT = v$, $MT' = w$, so ist die Gerade TT' parallel der Geraden MP.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich der Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten §. 4 in folgender Weise führen.

Sind, wie dort, (Fig. 4, S. 8) MC und MD die Lagen der Linien (p) und (q) zur Zeit t, $M'C'$ und $M'D'$ deren Lagen zur Zeit $t + \tau$, M_1 der Schnittpunkt von $M'D'$ und MC und M_2 der von $M'C'$ und MD, so ist M_1 ein Punkt der zur Zeit t mit der Geschwindigkeit u ausgeht und sich auf MC bewegt, während der Punkt M_2 mit der Geschwindigkeit w zur selben Zeit von demselben Punkte M ausgeht

aber auf MD fortschreitet. Die Geschwindigkeiten u und w lassen sich durch die Strecken MT_1 und MT_2 resp. darstellen, die auf den Tangenten der Linien MC und MD von M aus aufzutragen sind. Nun ist die Tangente MT_2 die Grenzlage, der sich die Secante M_1M' bei unendlich abnehmendem τ nähert; denn für $\tau = 0$ muss diese Secante in die Tangente der Linie M_1D' in demjenigen Punkt übergehen, mit dem die Punkte M_1 und M' zusammenfallen; die Linie M_1D' fällt aber bei diesem Grenzübergange in allen ihren Punkten mit MD, die Punkte M_1 und M' mit M zusammen. Ebenso lässt sich zeigen, dass MT_1 die Grenzlage der Secante M_2M' ist. Aus dem obigen Satze folgt dann aber: 1) dass T_1T parallel MT_2 und T_2T parallel MT_1 ist. Folglich ist das Viereck MT_1TT_2 ein Parallelogramm, dessen Diagonale MT ist und das zu anliegenden Seiten die Geschwindigkeiten MT_1 und MT_2 hat.

Zusatz zu §. 48, S. 102.

Wenn zwischen den drei Functionen φ_1, φ_2, φ_3 der Coordinaten q_1, q_2, q_3 eine Gleichung von der Form

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0 \qquad \text{(a)}$$

besteht, welche die Coordinaten q_1, q_2, q_3 nicht explicit enthält und durch Substitution der Ausdrücke von φ_1, φ_2, φ_3 in q_1, q_2, q_3 identisch wird, so ist eine der drei Grössen φ_1, φ_2, φ_3 eine Function der beiden andern oder einer derselben. Man hat daher in diesem Falle für jedes Werthsystem q_1, q_2, q_3 und dq_1, dq_2, dq_3:

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} d\varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_3} d\varphi_3;$$

dabei kann eine der Derivirten $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_3}$ für jedes System φ_1, φ_2, φ_3 verschwinden, nämlich wenn φ_1 die Variable, nach der die Derivirte genommen ist, gar nicht enthält.

Wählt man nun die Grössen dq_1, dq_2, dq_3 so, dass $d\varphi_2 = 0$ und $d\varphi_3 = 0$ werden, so muss gleichzeitig auch die Bedingung $d\varphi_1 = 0$ erfüllt sein. Das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungen

$$d\varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}dq_3 = 0,$$

$$d\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}dq_3 = 0,$$

$$d\varphi_3 = \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}dq_3 = 0$$

erfordert aber, dass die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = 0$$

sei. Umgekehrt, wenn $D = 0$ ist für jedes Werthsystem q_1, q_2, q_3, so muss eine Gleichung von der Form (a) bestehen. Da nämlich

$$\varphi_1 = \varphi_1(q_1, q_2, q_3),$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(q_1, q_2, q_3),$$

$$\varphi_3 = \varphi_3(q_1, q_2, q_3),$$

so kann man durch Elimination von q_1 und q_2 aus diesen Gleichungen eine Gleichung von der Form

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, q_3) = 0$$

erhalten, aus welcher folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}d\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial\varphi_2}d\varphi_2 + \frac{\partial F}{\partial\varphi_3}d\varphi_3 + \frac{\partial F}{\partial q_3}dq_3 = 0.$$

Da aber $D = 0$ ist, so kann man bei beliebigen Werthen von q_1, q_2, q_3, dq_3 ein System dq_1, dq_2, dq_3 wählen, welches die Bedingungen $d\varphi_1 = 0$, $d\varphi_2 = 0$, $d\varphi_3 = 0$ erfüllt; man erhält dann

$$\frac{\partial F}{\partial q_3}dq_3 = 0 \text{ oder } \frac{dF}{dq_3} = 0$$

für jedes Werthsystem q_1, q_2, q_3. Dies bedeutet aber, dass die Gleichung $F = 0$ die Grösse q_3 nicht enthält.

